

О точном нахождении экстремальных полиномов на двумерном подпространстве

Сунь Байюй

Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Работа посвящена построению экстремальных полиномов на двумерном подпространстве. В большинстве случаев [1] задача о точном нахождении экстремальных в равномерной метрике полиномов для заданной непрерывной функции f даже на отрезке $[a, b]$ является неразрешимой. Поэтому рассмотрение тех случаев, когда для коэффициентов экстремальных полиномов получаются точные формулы, представляет значительный интерес. Целью данной статьи является получение точных формул для коэффициентов экстремальных полиномов при нахождении элемента наилучшего приближения на двумерном подпространстве. Из алгоритмов численного нахождения точек альтернанса $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ наиболее удачным является алгоритм Е.Я. Ремеза (1957). В этой статье решается та же самая задача – построение экстремального полинома для непрерывной функции, определенной на отрезке $[a, b]$, но исследуются те случаи, когда такое построение можно осуществить точно. Под точным построением понимается, что некоторые точки альтернанса являются корнями полученных в процессе реализации алгоритма уравнений, но очень часто подобные уравнения (или системы уравнений) имеют явные аналитические решения.

Ключевые слова: алгоритм Ремеза, полином наилучшего приближения, пространство непрерывных функций, чебышевская метрика.

About Exact Finding Extreme Polynomials on Two-Dimensional Subspace

Sun Bayuy

Educational establishment «Vitebsk State P.M. Masherov University»

The paper centers round building up extreme polynomials on two-dimensional subspace. In most cases [1] the problem on exact finding extreme, in an even metrics, polynomials for the given continuous f function even on $[a, b]$ fragment is unsolvable. That is why consideration of those cases, when for quotients of extreme polynomials exact formulas are obtained, is of great interest. The work aims at obtaining exact formulas for quotients of extreme polynomials while finding the element of best approach on two-dimensional subspace. Of the algorithms of numerical finding alternance points $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ E.Ya. Remez algorithm (1957) is most appropriate. The same problem is being solved in the article – building up extreme polynomial for the continuous function, which is defined on the fragment of $[a, b]$, but the cases are explored, when such building up can be made exactly. Exact building up is understood as some alternance points which are roots of the obtained in the process of implementation of algorithm, equations; however, such equations (or systems of equations) have vivid analytical solutions.

Key words: Remez algorithm, polynomial of best approach, space of continuous functions, Chebyshev metrics.

Работа посвящена построению экстремальных полиномов на двумерном подпространстве. В большинстве случаев [1–2] задача о точном нахождении экстремальных в равномерной метрике полиномов для заданной непрерывной функции f даже на отрезке $[a, b]$ является неразрешимой. Поэтому рассмотрение тех случаев, когда для коэффициентов экстремальных полиномов получаются точные формулы, представляет значительный интерес. Целью данной статьи является получение точных формул для коэффициентов экстремальных полиномов при нахождении

элемента наилучшего приближения на двумерном подпространстве. Из алгоритмов численного нахождения точек альтернанса $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ наиболее удачным является алгоритм Е.Я. Ремеза (1957). В этой статье решается та же самая задача – построение экстремального полинома для непрерывной функции, определенной на отрезке $[a, b]$, но исследуются те случаи, когда такое построение можно осуществить точно. Под точным построением понимается, что некоторые точки альтернанса являются корнями полученных в процессе реализации алгоритма

уравнений, но очень часто подобные уравнения (или системы уравнений) имеют явные аналитические решения.

Материал и методы. Прежде всего напомним читателю алгоритм Ремеза, так как именно в сравнении с алгоритмом Ремеза видно преимущество предлагаемого нами подхода. Алгоритм Ремеза основан на следующей последовательности операций.

1-й шаг. Для произвольной системы точек

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b \quad (1)$$

строится экстремальный полином $P_n^{(1)}$, при этом применяются весьма громоздкие формулы [1, с. 72–73]. Далее проверяется, являются ли точки системы (1) альтернансом; для этого находится

$$\|f - P_n^{(1)}\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n^{(1)}(x)|$$

и проверяются условия альтернанса. Если условия альтернанса выполнены, то $P_n^{(1)}$ является требуемым полиномом, если нет, то выполнено неравенство

$$e_n^{(1)} = \max_{x_0, \dots, x_{n+1}} |f(x) - P_n^{(1)}(x)| \leq E_n(f) < \|f - P_n^{(1)}\|,$$

где $E_n(f)$ – норма разности $\|f - P_n^*\|$ на всем отрезке $[a, b]$ между функцией f и ее полиномом наилучшего приближения P_n^* .

2-й шаг. По определенному правилу система точек (1) заменяется другой системой

$$a \leq x_0^{(2)} < x_1^{(2)} < \dots < x_{n+1}^{(2)} \leq b, \quad (2)$$

для которой выполнены следующие три условия:

$$\text{sign}[f(x_k^{(2)}) - P_n^{(2)}(x_k^{(2)})] = -\text{sign}[f(x_{k+1}^{(2)}) - P_n^{(2)}(x_{k+1}^{(2)})] \quad (3)$$

$$|f(x_k^{(2)}) - P_n^{(2)}(x_k^{(2)})| \geq |f(x_{k+1}^{(2)}) - P_n^{(2)}(x_{k+1}^{(2)})| \quad (4)$$

$$\max_{x_0^{(2)}, \dots, x_{n+1}^{(2)}} |f(x_k^{(2)}) - P_n^{(2)}(x_k^{(2)})| = \|f - P_n^{(2)}\|. \quad (5)$$

Далее по определенному правилу находится полином $P_n^{(2)}$ и процесс повторяется.

Известно [1, с. 76], что алгоритм Ремеза сходится со скоростью геометрической прогрессии. Трудности, которые возникают в процессе реализации алгоритма Ремеза, связаны с переходом от одной системы точек к другой.

Впервые вопрос об эффективном построении полинома фиксированной степени n наилучшего приближения рассматривал Валле-Пуссен (1919). В том случае, когда область определения M функции f конечна и состоит из N точек $x_1 < x_2 < \dots < x_N$, $N \geq n + 2$, Валле-Пуссен предложил рассматривать различные подсистемы

$$\{x_{k_0}, x_{k_1}, \dots, x_{k_{n+1}}\} \subset M$$

и на каждой из этих подсистем, пользуясь формулами нахождения экстремального полинома P_n^* на системе из $n + 2$ точек, найти полином $P_n^* = P_n^*(M)$ наилучшего приближения данной функции f . После этого, вследствие того, что характеристическое множество E_0 [1, с. 52] состоит из $n + 2$ точек, следовало заключение, что среди C_N^{n+2} подмножеств множества M характеристическим будет то подмножество E_0 , на котором величина отклонения

$$\max_{x \in E_0} |f(x) - P_n^*(E_0; x)|$$

окажется максимальной. Сам же полином $P_n^*(E_0; x)$ будет искомым полиномом наилучшего приближения функции f на M . Умение найти полином наилучшего приближения на множествах

$$\{x_1, x_2, \dots, x_{n+2}\} \subset M$$

позволяет со сколь угодно большой точностью найти экстремальный полином на отрезке $[a, b]$.

В отличие от этого способа Е.Я. Ремез, используя результаты Валле-Пуссена, предложил способ перехода от одного подмножества $M_1 \subset [a, b]$ к другому $M_2 \subset [a, b]$ с приближением к точкам альтернанса и благодаря этому построил алгоритм получения экстремального полинома.

Итак, целью данной статьи является выявление тех случаев, когда построение экстремального полинома может быть выполнено точно.

Это прежде всего случай, когда подпространство $G \subset C[a, b]$ образовано обобщенными полиномами $\varphi_0 \equiv 1$, $\varphi_1(x) \equiv \varphi(x)$ – произвольная

дифференцируемая функция ($x \in [a, b]$). В данном случае система уравнений для нахождения точек чебышевского альтернанса запишется следующим образом:

$$\begin{cases} d + c_0 + c_1 \varphi_1(x_1) = f(x_1), \\ -d + c_0 + c_1 \varphi_1(x_2) = f(x_2), \\ d + c_0 + c_1 \varphi_1(x_3) = f(x_3). \end{cases} \quad (6)$$

Рассматривая систему уравнений (1) как систему относительно неизвестных d, c_0, c_1 , получаем, что

$$d = \begin{vmatrix} f_1 & 1 & \varphi_1 \\ f_2 & 1 & \varphi_2 \\ f_3 & 1 & \varphi_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varphi_3 - \varphi_1} \cdot f_3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{\varphi_3 - \varphi_1} \cdot f_1 - \frac{1}{2} f_2,$$

где $\varphi_j = \varphi(x_j)$, $f_j = f(x_j)$ ($j=1,2,3$).

Результаты и их обсуждение.

Теорема. Пусть для непрерывно дифференцируемых функций $f, \varphi: [a, b] \rightarrow R$ выполнены следующие условия:

- 1) $\varphi'(x) > 0$ ($x \in (a, b)$);
- 2) на интервале (a, b) функция $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$

строго возрастает.

Тогда

$$\begin{aligned} \inf_{c_0, c_1} \|f - c_0 - c_1 \varphi\| &= E_1(f) = \\ &= \frac{1}{2[\varphi(b) - \varphi(a)]} \{[\varphi(x_2^*) - \varphi(a)]f(b) + \\ &+ [\varphi(b) - \varphi(x_2^*)]f(a)\} - \frac{1}{2} f(x_2^*), \end{aligned}$$

где x_2^* — единственный корень уравнения

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}$$

на интервале (a, b) .

Коэффициенты экстремального полинома $P_1^*(x) = c_0^* + c_1^* \varphi(x)$ находятся по следующим формулам:

$$c_0^* = \frac{1}{2[\varphi(b) - \varphi(a)]} \{[\varphi(x_2^*) + \varphi(b)]f(a) - [\varphi(a) - \varphi(x_2^*)]f(b)\} + \frac{1}{2} f(x_2^*);$$

$$c_1^* = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)},$$

при этом система точек, на которой достигается альтернанс, единственна и имеет вид

$$a < x_2^* < b.$$

Доказательство. Рассмотрим частную производную

$$\begin{aligned} \frac{\partial d}{\partial x_1} &= \frac{(\varphi_3 - \varphi_2)\varphi'(x_1)}{2(\varphi_3 - \varphi_1)} \times \\ &\times \left[\frac{f'(x_1)}{\varphi'(x_1)} - \frac{f_3 - f_1}{\varphi_3 - \varphi_1} \right]. \end{aligned}$$

В силу теоремы Коши существует такая точка c ($x_1 < c < x_3$), для которой

$$\begin{aligned} \frac{\partial d}{\partial x_1} &= -\frac{(\varphi_3 - \varphi_2)\varphi'(x_1)}{2(\varphi_3 - \varphi_2)} \times \\ &\times \left[\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} - \frac{f'(x_1)}{\varphi'(x_1)} \right], \end{aligned}$$

т.е., учитывая, что по условию теоремы

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} - \frac{f'(x_1)}{\varphi'(x_1)} > 0 \quad (a \leq x_1 < c < x_3 \leq b),$$

получаем отрицательность частной производной $\frac{\partial d}{\partial x_1}$ при любых $x_2, x_3 \in (a, b)$ ($x_2 < x_3$). Это оз-

начает, что максимальное значение d по переменной x_1 достигается при $x_1 = a$.

Аналогично

$$\begin{aligned} \frac{\partial d}{\partial x_3} &= \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)\varphi'(x_3)}{2(\varphi_3 - \varphi_1)} \times \\ &\times \left[\frac{f'(x_3)}{\varphi'(x_3)} - \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \right] > 0 \end{aligned}$$

и, следовательно, максимум достигается при $x_3 = b$. Остается найти значение x_2^* , при котором

$$|f(x_2) - c_0 - c_1 \varphi_1(x_2)| = \|f - c_0 - c_1 \varphi_1\|.$$

Для этого, полагая, что $x_1 = a$, $x_3 = b$, найдем частную производную

$$\frac{\partial d}{\partial x_2} = \frac{\varphi'(x_2)}{2} \left[\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} - \frac{f'(x_2)}{\varphi'(x_2)} \right].$$

В силу предположения о строгом возрастании функции $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ уравнение

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \quad (7)$$

однозначно разрешимо при $x \in (a, b)$ и частная производная $\frac{\partial d}{\partial x_2}$ в точке x_2^* , являющейся решением уравнения (7), меняет знак с «+» на «-».

Таким образом, получена единственная система точек, образующих альтернанс

$$a < x_2^* < b.$$

Значения коэффициентов C_0^* , C_1^* и величины $E_1(f)$ получаются из системы (6) при $x_1 = a$, $x_2 = x_2^*$, $x_3 = b$.

Рассмотрим далее случай, когда проектирование осуществляется на трехмерное подпространство. В следующем примере возьмем отрезок $[1, 4]$, а подпространство G , образованное тремя базисными функциями

$$\varphi_0(x) \equiv 1, \quad \varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = x^2.$$

В качестве функции $f(x)$ рассмотрим функцию $f(x) = 1/x$. Система уравнений (6) в этом случае примет следующий вид:

$$\begin{aligned} d + c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 &= \frac{1}{x_1}, \\ -d + c_0 + c_1 x_2 + c_2 x_2^2 &= \frac{1}{x_2}, \\ d + c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 &= \frac{1}{x_3}, \\ -d + c_0 + c_1 x_4 + c_2 x_4^2 &= \frac{1}{x_4}. \end{aligned} \quad (8)$$

Функция $d = d(x_1, x_2, x_3, x_4)$, найденная из системы (8), будет иметь вид:

$$d = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(x_3 - x_4)(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)(x_1 - x_2)}{x_1 x_2 x_3 x_4 (x_1 + x_3 - x_2 - x_4)}. \quad (9)$$

Анализ поведения частных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial d}{\partial x_1} &= \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{(x_3 - x_4)(x_2 - x_3)(x_1^2 x_3 + x_2^2 x_4 + x_2 x_4^2 - x_2 x_3 x_4 - 2x_1 x_2 x_4)}{x_1^2 x_2 x_3 x_4 (x_1 + x_3 - x_2 - x_4)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial d}{\partial x_4} &= \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x_2 - x_3)(x_1 - x_2)(x_1^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_4^2 x_2 - x_1 x_2 x_3 - 2x_1 x_3 x_4)}{x_1 x_2 x_3 x_4^2 (x_1 + x_3 - x_2 - x_4)^2} \end{aligned}$$

приводит к выводу о том, что на множестве

$$1 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < 4$$

выполняются неравенства

$\frac{\partial d}{\partial x_1} < 0$, $\frac{\partial d}{\partial x_4} > 0$, т.е. для максимизации функции $d = d(x_1, x_2, x_3, x_4)$ можно взять $x_1 = a = 1$, $x_4 = b = 4$, тогда выражение (9) примет вид

$$d = \frac{3}{8} \cdot \frac{(x_3 - 4)(x_2 - x_3)(1 - x_2)}{x_2 x_3 (x_3 - x_2 - 3)}.$$

Учитывая равенства

$$\frac{\partial d}{\partial x_2} = \frac{3}{8} \cdot \frac{(x_3 - 4)(4x_2^2 - 2x_2 x_3 + x_3^2 - 3x_3)}{x_2^2 x_3 (x_3 - x_2 - 3)^2},$$

$$\frac{\partial d}{\partial x_3} = \frac{3}{8} \cdot \frac{(x_2 - 1)(4x_2^2 - 8x_2 x_3 + x_3^2 + 12x_2)}{x_2 x_3^2 (x_3 - x_2 - 3)^2},$$

получаем, что система уравнений для нахождения стационарных точек имеет вид:

$$\begin{cases} 4x_2^2 - 2x_2 x_3 + x_3^2 - 3x_3 = 0, \\ 4x_2^2 - 8x_2 x_3 + x_3^2 + 12x_2 = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Система (10) содержит точное решение $x_2 = 3/2$, $x_3 = 3$. Подставляя эти значения

в равенство (9), находим $d = 1/24$, после чего из системы (8) получаем значения коэффициентов

$$c_0^* = \frac{13}{8}, \quad c_1^* = -\frac{7}{9}, \quad c_2^* = \frac{1}{9}$$

и, следовательно, экстремальный полином имеет вид

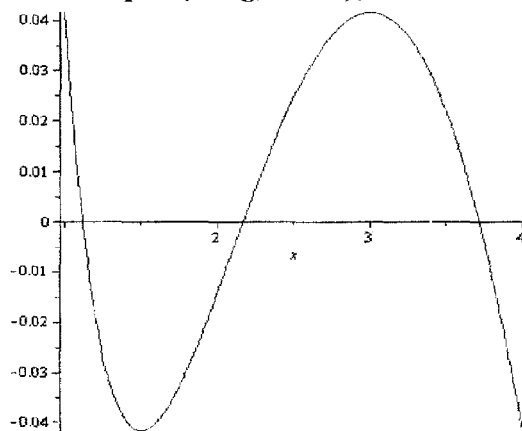
$$P_1^*(x) = \frac{13}{8} - \frac{7}{9}x + \frac{1}{9}x^2.$$

Факт альтернанса можно подтвердить построением соответствующего графика:

```
> g:=(13/8)-(7/9)*x+(1/9)*x^2;
```

$$g := \frac{13}{8} - \frac{7}{9}x + \frac{1}{9}x^2$$

```
> plot(1/x-g,x=1..4);
```



Заключение. Как известно, в большинстве случаев задача о точном нахождении экстремальных в равномерной метрике полиномов для заданной непрерывной функции f даже на отрезке $[a, b]$ является неразрешимой. Поэтому рассмотрение тех случаев, когда для коэффициентов экстремальных полиномов получаются точные формулы, представляет существенный интерес. В этой статье получены точные формулы для коэффициентов экстремальных полиномов в том случае, когда приближающее функцию подпространство является двумерным. В исследовании решена задача точного построения экстремального полинома для дифференцируемой функции, определенной на отрезке $[a, b]$. Под точным построением понимается, что некоторые точки альтернанса являются корнями полученных в процессе реализации алгоритма уравнений, но очень часто подобные уравнения (или системы уравнений) имеют явные аналитические решения. Кроме того, рассмотрен пример проектирования функции на трехмерное подпространство, в котором коэффициенты экстремального полинома также найдены точно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дзядык, В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В.К. Дзядык. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
2. Коллатц, Л. Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения / Л. Коллатц, В. Крабс. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

REFERENCES

1. Dzyadyk V.K. Vvedeniye v teoriyu ravnomernogo priblizheniya funktsii polinomami [Introduction into the Theory of Even Approach of Functions with Polynomials], Moscow: Nauka, 1977, 512 p.
2. Collats L., Crabs V. Moscow: Nauka, 1978, 272 p.

Поступила в редакцию 03.02.2014. Принята в печать 21.04.2014
Адрес для корреспонденции: e-mail: kteorfiz@vsu.by – Сунь Байюй