

УДК 517.538.52+517.538.53

Аппроксимации Эрмита–Паде для системы двух экспонент с сопряженными показателями

А.В. Астафьева

Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины»

Для системы функций $\{e^{(a+bi)z}, e^{(a-bi)z}\}$, где a и b – действительные числа, изучаются асимптотические свойства диагональных аппроксимаций Эрмита–Паде $\{\pi_{2n,2n}^1(z, e^{(a+bi)\xi}), \pi_{2n,2n}^2(z, e^{(a-bi)\xi})\}$. В частности, для любого комплексного числа z найдены асимптотики поведения разностей $e^{(a\pm bi)z} - \pi_{2n,2n}^j(z, e^{(a\pm bi)\xi})$ при $j=1,2$. Полученные результаты дополняют исследования Эрмита, Паде, Д. Браесса, А.И. Аптекарева, А.П. Старовойтова, относящиеся к изучению сходимости аппроксимаций Эрмита–Паде для системы экспонент.

Ключевые слова: аппроксимации Эрмита–Паде, диагональные аппроксимации Эрмита–Паде, асимптотические равенства, интегралы Эрмита, метод Лапласа, метод перевала.

Hermite-Pade approximants for the system of two exponentials with conjugate indicators

A.V. Astafyeva

Educational establishment «Gomel State University of F. Scoriny»

We study the asymptotic properties of diagonal Hermite-Pade approximants $\{\pi_{2n,2n}^1(z, e^{(a+bi)\xi}), \pi_{2n,2n}^2(z, e^{(a-bi)\xi})\}$ for the system of functions $\{e^{(a+bi)z}, e^{(a-bi)z}\}$, where a and b are real numbers. In particular, we determine asymptotic behavior of differences $e^{(a\pm bi)z} - \pi_{2n,2n}^j(z, e^{(a\pm bi)\xi})$ for $j=1,2$ for any complex number z . The obtained results supplement research of Hermite, Pade, D. Braess, A.I. Aptekarev and A.P. Starovoitov dealing with study of the convergence of Hermite-Pade approximants for systems of exponents.

Key words: Hermite-Pade approximants, diagonal Hermite-Pade approximants, asymptotic equality, Hermite integral, Laplace method, saddle-point method.

Введение. В данной статье исследуется асимптотика диагональных аппроксимаций Эрмита–Паде системы экспонент $\{e^{(a+bi)z}, e^{(a-bi)z}\}$, где a и b – действительные числа. Впервые такие аппроксимации для системы $\{1, e^z, \dots, e^{kz}\}$ рассматривал Ш. Эрмит [1] при доказательстве трансцендентности числа e . С помощью аналогичных конструкций Ф. Линдеман доказал, что натуральный логарифм любого алгебраического числа, отличного от 0 и 1, есть число трансцендентное. Отсюда и вытекает трансцендентность числа π , а значит и решение задачи о квадратуре круга [2].

Рассмотрим набор голоморфных в нуле функций

$$f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^j z^k, \quad j=1, 2, \dots, r. \quad (1)$$

Зафиксируем произвольные целые неотрицательные числа $n, m_1, m_2, \dots, m_r$. По определению полагаем $m = \sum_{i=1}^r m_i$, $n_j = n + m - m_j$, $j=1, 2, \dots, r$. Известно [3], что при $j=1, 2, \dots, r$ существуют такие многочлены $Q_m(z)$, $P_{n_j}^j(z)$, $\deg Q_m \leq m$, $\deg P_{n_j}^j \leq n_j$, для которых

$$R_{n,m}^j(z) = Q_m(z)f_j(z) - P_{n_j}^j(z) = O(z^{n+m+1}). \quad (2)$$

При $r \geq 2$ дроби $\pi_{n,m}^j(z) = \pi_{n_j,m}^j(z; f_j) = P_{n_j}^j(z) / Q_m(z)$, $j=1, 2, \dots, r$, определенные условиями (2), находятся, вообще говоря, неоднозначно. В случае единственности множества $\{\pi_{n,m}^j(z)\}_{j=1}^r$ его элементы называют аппроксимациями Эрмита–Паде

для системы функций (1). Единственность имеет место для системы экспонент $f_j(z) = e^{\lambda_j z}$, $j = 1, 2, \dots, r$, где $\{\lambda_j\}_{j=1}^r$ — различные комплексные числа [3]. Этот факт установлен Ш. Эрмитом [1]. При $m_1 = m_2 = \dots = m_r = n$ аппроксимации Эрмита–Паде $\pi_{n,n}^j(z; f_j)$ называются диагональными.

К. Малер [4–5] использовал аппроксимации Эрмита–Паде для получения количественной оценки меры трансцендентности некоторых чисел. Е.М. Никишиным была поставлена задача об исследовании сходимости таких аппроксимаций для произвольной системы экспонент. Решение этой задачи было получено А.И. Аптекаревым [6], который доказал, что при различных комплексных числах λ_j , $j = 1, 2, \dots, r$ и $n + m \rightarrow +\infty$ $\pi_{n,m}^j(z; e^{\lambda_j z})$ сходится равномерно на компактах $\mathbb{C}$ к $e^{\lambda_j z}$. В [6], в частности, установлено, что

$$Q_m(z) = \exp \left\{ -\frac{\sum_{j=1}^r \lambda_j m_j}{n+m} z \right\} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n+m}\right) \right\}, \quad (3)$$

и приводятся явные формулы

$$\begin{aligned} Q_m(z) &= \frac{z^{n+m+1}}{(n+m)!} \int_0^\infty [x^n \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{m_i}] e^{-zx} dx, \\ P_{n_j}^j(z) &= \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+m+1}}{(n+m)!} \int_{\lambda_j}^\infty [x^n \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{m_i}] e^{-zx} dx, \\ R_{n,m}^j(z) &= \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+m+1}}{(n+m)!} \int_0^{\lambda_j} [x^n \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{m_i}] e^{-zx} dx, \end{aligned} \quad (4)$$

где $Q_m(z)$, $P_{n_j}^j(z)$ — соответственно знаменатель и числитель $\pi_{n,m}^j(z; e^{\lambda_j z})$. Интегралы в (4) принято называть интегралами Эрмита.

Заметим, что в последнее время интерес к аппроксимациям Эрмита–Паде значительно возрос [7–9]. Кроме традиционных приложений в теории аппроксимаций аналитических функций и диофантовых приближениях, они используются в исследованиях алгебраической природы математических констант [7], в спектральной теории некоторых классов операторов [9], теории рассеяния [9] и решении дифференциальных уравнений.

В работах [10–11] с помощью метода Лапласа исследуется асимптотика поведения диагональ-

ных аппроксимаций Эрмита–Паде $\pi_{n,n}^j(z; e^{\lambda_j z})$ в случае, когда λ_j — действительные либо чисто мнимые числа. В данной статье рассматривается система из двух экспонент с комплексно-сопряженными показателями. В этом случае метод Лапласа не работает. При исследовании будем опираться на метод перевала.

Основные результаты. Будем считать, что a и b — произвольные действительные числа. Определим следующие функции:

$$\begin{aligned} \phi(z) &= z(z - a + bi)(z - a - bi), \\ \phi_1(z) &= z(z + a - ib)(z + a + ib), \\ S(z) &= \ln \phi(z), \\ S_1(z) &= \ln \phi_1(z), \end{aligned}$$

где $\ln \phi(z)$ — главная ветвь логарифма, т.е.

$$\begin{aligned} \ln \phi(z) &= \ln |\phi(z)| + i \arg_0 \phi(z) \\ \text{и } \arg_0 \phi(z) &\in (-\pi; \pi]. \end{aligned}$$

Рассмотрим несколько кривых:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \{z = yi : y \in [0; b]\}, \\ \gamma_2 &= \{z = bi + x : x \in [0; a]\}, \\ \gamma_3 &= \{z = -bi + x : x \in [0; a]\}. \end{aligned}$$

Легко проверить, что $\max_{\gamma_2} \operatorname{Re} S(z)$ и $\max_{\gamma_3} \operatorname{Re} S_1(z)$ достигаются в точках $z_2^* = bi$ и $z_3^* = -bi$ соответственно. А $\max_{\gamma_1} \operatorname{Re} S(z)$, $\max_{\gamma_1} \operatorname{Re} S_1(z)$ достигаются в точке $z_1^* = \sqrt{(8\sqrt{3} - 12)/3} |b| i$, когда выполнено условие $a^2 = (7 - 4\sqrt{3})b^2$, в противном случае достигаются в точке z_2^* .

Сформулируем основной результат работы.

Теорема. Пусть $\{e^{(a+bi)z}, e^{(a-bi)z}\}$ — набор из двух экспонент с действительными числами a и b , а $\{\pi_{2n,2n}^1(z), \pi_{2n,2n}^2(z)\}$ — соответствующие этому набору аппроксимации Эрмита–Паде, и $m_1 = m_2 = n$, $n_1 = n_2 = 2n$. Тогда при $n \rightarrow +\infty$ для любого комплексного числа $|z| \leq M$ справедливы асимптотические равенства

$$\begin{aligned}
& e^{(a+bi)z} - \pi_{2n,2n}^1(z) = \\
& = -\frac{e^{(a+bi)z} z^{3n+1}}{(3n)!n} \times \\
& \times \left(\frac{2}{S'(z_1^*)} \varphi^n(z_1^*) e^{-z_1^* z} + \frac{1}{S'(z_2^*)} \varphi^n(z_2^*) e^{-z_2^* z} \right) e^{2az/3} (1+O(1)), \\
& e^{(a-bi)z} - \pi_{2n,2n}^2(z) = \\
& = \frac{e^{(a-bi)z} z^{3n+1}}{(3n)!n} \times \\
& \times \left((-1)^n \frac{2}{S'(z_1^*)} \varphi^n(z_1^*) e^{z_1^* z} - \frac{1}{S'(z_3^*)} \varphi^n(z_3^*) e^{-z_3^* z} \right) e^{2az/3} (1+O(1)), \\
& \text{если } a^2 = (7-4\sqrt{3})b^2, \\
& e^{(a+bi)z} - \pi_{2n,2n}^1(z) = \\
& = -\frac{2e^{(a+bi)z} z^{3n+1}}{(3n)!nS'(z_2^*)} \varphi^n(z_2^*) e^{-z_2^* z} e^{2az/3} (1+O(1)), \\
& e^{(a-bi)z} - \pi_{2n,2n}^2(z) = \\
& = \frac{e^{(a-bi)z} z^{3n+1}}{(3n)!n} \times \\
& \times \left(\frac{(-1)^n}{S'(z_2^*)} \varphi^n(z_2^*) e^{z_2^* z} - \frac{1}{S'(z_3^*)} \varphi^n(z_3^*) e^{-z_3^* z} \right) e^{2az/3} (1+O(1)), \\
& \text{если } a^2 \neq (7-4\sqrt{3})b^2.
\end{aligned}$$

Здесь и далее M – фиксированное положительное число.

Следствие 1. Пусть $\{e^{(a+i)z}, e^{(a-i)z}\}$ – набор из двух экспонент и $a^2 \neq (7-4\sqrt{3})b^2$, а $\{\pi_{2n,2n}^1(z), \pi_{2n,2n}^2(z)\}$ – соответствующие этому набору аппроксимации Эрмита-Паде, и $m_1 = m_2 = n$, $n_1 = n_2 = 2n$. Тогда при $n \rightarrow +\infty$ для любого комплексного числа $|z| \leq M$

$$\begin{aligned}
& e^{(a+i)z} - \pi_{2n,2n}^1(z) = \\
& = \frac{2z^{3n+1} a^{n+1} (2+ia)^{n+1}}{(3n)!(2+4ia-a^2)n} e^{5az/3} (1+O(1)), \\
& e^{(a-i)z} - \pi_{2n,2n}^2(z) = \\
& = \frac{2(-1)^{n+1} z^{3n+1} a^{n+1} (ia-2)^{n+1}}{(3n)!(2+4ia-a^2)n} e^{5az/3} (1+O(1)).
\end{aligned}$$

Для доказательства следствия достаточно заметить, что при $b=1$, $z_2^* = i$, $z_3^* = -i$ и выполнении условий верны следующие равенства:

$$\begin{aligned}
S(z_2^*) &= \ln(2a+ia), \quad S'(z_2^*) = -\frac{a^2i+4a-2i}{a(a-2i)}, \\
S_1(z_2^*) &= \ln(a^2i-2a), \quad S_1'(z_2^*) = \frac{2i+4a-ia^2}{2ia+a^2},
\end{aligned}$$

$$S(z_3^*) = \ln(2a-a^2i), \quad S'(z_3^*) = -\frac{2i+4a-ia^2}{2ia+a^2}.$$

Следствие 2. Пусть $\{e^{(1+2i)z}, e^{(1-2i)z}\}$ – набор из двух экспонент, а $\{\pi_{2n,2n}^1(z), \pi_{2n,2n}^2(z)\}$ – соответствующие этому набору аппроксимации Эрмита-Паде, и $m_1 = m_2 = n$, $n_1 = n_2 = 2n$. Тогда при $n \rightarrow +\infty$ для любого комплексного числа $|z| \leq M$

$$\begin{aligned}
& e^{(1+2i)z} - \pi_{2n,2n}^1(z, e^{(1+2i)\xi}) = \\
& = \frac{2^{n+2} z^{3n+1} (4+i)^{n+1}}{(3n)!(7+8i)n} e^{5z/3} (1+O(1)), \\
& e^{(1-2i)z} - \pi_{2n,2n}^2(z, e^{(1-2i)\xi}) = \\
& = \frac{(-1)^{n+1} 2^{n+2} z^{3n+1} (i-4)^{n+1}}{(3n)!(7+8i)n} e^{5z/3} (1+O(1)).
\end{aligned}$$

Для доказательства следствия достаточно вычислить значения функций в точках $z_2^* = 2i$, $z_3^* = -2i$:

$$\begin{aligned}
S(z_2^*) &= \ln(8+2i), \quad S'(z_2^*) = -\frac{7+8i}{8+2i}, \\
S_1(z_2^*) &= \ln(2i-8), \quad S_1'(z_2^*) = \frac{7+8i}{2i-8}, \\
S(z_3^*) &= \ln(8-2i), \quad S'(z_3^*) = \frac{7+8i}{2i-8}.
\end{aligned}$$

Доказательство теоремы. Для исследования асимптотики интегралов (4) будем применять метод перевала [12]. Приведем без доказательства необходимый в дальнейшем результат.

Будем рассматривать интегралы вида

$$F(\lambda) = \int_{\gamma} f(z) e^{\lambda S(z)} dz,$$

где γ – конечная кривая и функции $f(z)$, $S(z)$ регулярны в некоторой области D , содержащей контур γ . Нас интересует асимптотика функции $F(\lambda)$, при $\lambda \rightarrow +\infty$, когда $\max_{z \in \gamma} \operatorname{Re} S(z)$ достигается на конце кривой γ . Тогда верно следующее утверждение.

Утверждение 1 (метод перевала). Пусть γ – конечная кривая и функции $f(z)$, $S(z)$ регулярны в некоторой области D , содержащей контур γ . Если $\max_{z \in \gamma} \operatorname{Re} S(z)$ достигается только в на-

чальной точке z_0 контура γ и $S'(z_0) \neq 0$, то при $\lambda \rightarrow +\infty$ главный член асимптотики имеет

$$F(\lambda) = \frac{1}{-\lambda S'(z_0)} e^{\lambda S(z_0)} [f(z_0) + O(1/\lambda)].$$

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы.

Из (4) следует, что

$$R_{n,2n}^1 = \frac{e^{(a+bi)z} z^{3n+1}}{(3n)!} \int_0^{a+bi} x^n (x-a+bi)^n (x-a-bi)^n e^{-zx} dx.$$

В этом интеграле представим кривую интегрирования в виде двух отрезков. Тогда получим, что

$$R_{n,2n}^1 = \frac{e^{(a+bi)z} z^{3n+1}}{(3n)!} \int_0^{bi} x^n (x-a+bi)^n (x-a-bi)^n e^{-zx} dx + \frac{e^{(a+bi)z} z^{3n+1}}{(3n)!} \int_{bi}^{a+bi} x^n (x-a+bi)^n (x-a-bi)^n e^{-zx} dx. \quad (5)$$

Введем новые обозначения

$$I_1^1(z) = \int_0^{bi} x^n (x-a+bi)^n (x-a-bi)^n e^{-zx} dx, \quad (6)$$

$$I_2^1(z) = \int_{bi}^{a+bi} x^n (x-a+bi)^n (x-a-bi)^n e^{-zx} dx. \quad (7)$$

Рассмотрим интеграл (6) и найдем его асимптотику с помощью метода перевала. Для этого преобразуем (6) к следующему виду:

$$I_1^1(z) = \int_0^{bi} e^{-zx} e^{n \ln(x(x-a-bi)(x-a+bi))} dx.$$

Интегрирование будем проводить по отрезку $\gamma_1 = \{z = yi : y \in [0; b]\}$.

Предположим, что $a^2 = (7-4\sqrt{3})b^2$. Тогда максимум на γ_1 функции $\operatorname{Re} S(z)$ достигается в точке $z_1^* = \sqrt{(8\sqrt{3}-12)/3} |b| i$. Представим интеграл (6) в виде суммы двух интегралов

$$I_1^1(z) = \int_0^{z_1^*} e^{-zx} e^{nS(x)} dx + \int_{z_1^*}^{bi} e^{-zx} e^{nS(x)} dx.$$

Из утверждения 1 следует, что в предыдущем равенстве два интеграла равны. Следовательно, исходный интеграл (6) равен

$$I_1^1(z) = -\frac{2}{nS'(z_1^*)} \varphi^n(z_1^*) e^{-z_1^* z} (1 + O(1)). \quad (8)$$

Если $a^2 \neq (7-4\sqrt{3})b^2$, то не трудно проверить, что $\max_{\gamma_1} \operatorname{Re} S(z)$ достигается в точке z_2^* .

Применяя утверждение 1 к интегралу (6), получим

$$I_1^1(z) = -\frac{1}{nS'(z_2^*)} \varphi^n(z_2^*) e^{-z_2^* z} (1 + O(1)). \quad (9)$$

Найдем асимптотику интеграла (7). Приведем данный интеграл к следующему виду:

$$I_2^1(z) = \int_{bi}^{a+bi} e^{-zx} e^{nS(x)} dx,$$

где интегрировать будем по отрезку $\gamma_2 = \{z = bi + x : x \in [0; a]\}$. Тогда для любых значений a и b $\max_{\gamma_2} \operatorname{Re} S(z)$ достигается в точке z_2^* .

Применяя утверждение 1 непосредственно к последнему интегралу, получим

$$I_2^1(z) = -\frac{1}{nS'(z_2^*)} \varphi^n(z_2^*) e^{-z_2^* z} (1 + O(1)). \quad (10)$$

Подставляя (8), (9) и (10) в (5), пользуясь при этом известным фактом, что $Q_{2n}(z) = e^{-2az/3} (1 + O(1))$, найдем асимптотику разности $e^{(a+bi)z} - \pi_{2n,2n}^1(z)$.

Перейдем к нахождению асимптотики разности $e^{(a-bi)z} - \pi_{2n,2n}^2(z)$. Из (4) получим

$$R_{n,2n}^2 = \frac{e^{(a-bi)z} z^{3n+1}}{(3n)!} \int_0^{a-bi} x^n (x-a+bi)^n (x-a-bi)^n e^{-zx} dx.$$

Преобразуем данное равенство к следующему виду:

$$R_{n,2n}^2 = \frac{e^{(a-bi)z} z^{3n+1}}{(3n)!} \int_0^{-bi} x^n (x-a+bi)^n (x-a-bi)^n e^{-zx} dx + \frac{e^{(a-bi)z} z^{3n+1}}{(3n)!} \int_{-bi}^{a-bi} x^n (x-a+bi)^n (x-a-bi)^n e^{-zx} dx. \quad (11)$$

Введем следующие обозначения:

$$I_1^2(z) = \int_0^{-bi} x^n (x-a+bi)^n (x-a-bi)^n e^{-zx} dx, \quad (12)$$

$$I_2^2(z) = \int_{-bi}^{a-bi} x^n (x-a+bi)^n (x-a-bi)^n e^{-zx} dx. \quad (13)$$

Найдем асимптотику интеграла (12). Представим данный интеграл в виде:

$$I_1^2(z) = (-1)^{n+1} \int_0^{bi} e^{zx} e^{nS_1(x)} dx.$$

Применим к последнему интегралу метод перевала, считая, что кривой интегрирования является $\gamma_1 = \{z = yi : y \in [0; b]\}$. Поступая аналогично, как при нахождении интеграла (6), при $a^2 = (7 - 4\sqrt{3})b^2$ получим

$$I_1^2(z) = \frac{2(-1)^n}{nS_1'(z_1^*)} \varphi_1^n(z_1^*) e^{z_1^* z} (1 + O(1)). \quad (14)$$

В противном случае, если $a^2 \neq (7 - 4\sqrt{3})b^2$,

$$I_1^2(z) = \frac{(-1)^n}{nS_1'(z_2^*)} \varphi_1^n(z_2^*) e^{z_2^* z} (1 + O(1)). \quad (15)$$

Рассмотрим интеграл (13). Приведем данный интеграл к следующему виду:

$$I_2^2(z) = \int_{-bi}^{a-bi} e^{-zx} e^{nS(x)} dx,$$

где будем интегрировать по отрезку $\gamma_3 = \{z = -bi + x : x \in [0; a]\}$. Тогда для любых значений a и b $\max_{\gamma_3} \operatorname{Re} S(z)$ достигается в точке z_3^* . Применяя утверждение 1 к последнему интегралу, получим

$$I_2^1(z) = -\frac{1}{nS'(z_3^*)} \varphi^n(z_3^*) e^{-z_3^* z} (1 + O(1)). \quad (16)$$

Подставляя (14), (15) и (16) в (11), учитывая, что $Q_{2n}(z) = e^{-2az/3} (1 + O(1))$, получим асимптотику разности $e^{(a-bi)z} - \pi_{2n,2n}^2(z, e^{(a-bi)z})$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hermite, C. Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Acad. Sci. (Paris). – 1873. – Vol. 77. – P. 18–293.

2. Клейн, Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: в 2 т. / Ф. Клейн. – М.: Наука, 1987. – Т. 1: Арифметика. Алгебра. Анализ. – 324 с.
3. Никишин, Е.М. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 256 с.
4. Mahler, K. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus / K. Mahler // J. Reine Angew. Math. – 1932. – Vol. 166. – P. 118–150.
5. Mahler, K. On the approximation of logarithms of algebraic numbers / K. Mahler // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. – 1953. – Vol. 245. – P. 371–398.
6. Аптекарев, А.И. О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент / А.И. Аптекарев // Вестн. Моск. ун-та. – Сер. 1, Математика. Механика. – 1981. – № 1. – С. 68–74.
7. Аптекарев, А.И. Рациональные приближения постоянной Эйлера и рекуррентные соотношения / А.И. Аптекарев // Совр. пробл. матем.: сб. ст. – М.: МИАН, 2007.
8. Калягин, В.А. Аппроксимации Эрмита Падэ и спектральная теория несимметричных разностных операторов / В.А. Калягин // Матем. сб. – 1994. – Т. 185, № 6. – С. 79–100.
9. Бейкер, Дж. Аппроксимации Падэ / Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
10. Старовойтов, А.П. О свойствах аппроксимаций Эрмита-Падэ для системы функций Миттаг-Леффлера / А.П. Старовойтов // Докл. НАН Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 1. – С. 5–10.
11. Старовойтов, А.П. Асимптотика аппроксимаций Эрмита-Падэ системы экспонент / А.П. Старовойтов // Докл. НАН Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 2. – С. 5–10.
12. Сидоров, Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного: учебник для вузов / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – 3-е изд. – М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 480 с.

REFERENCES

1. Hermite C. Sur la fonction exponentielle, C.R. Acad. Sci. (Paris), 1873, 77, pp. 18–293.
2. Klein F., Elementarnaya matematika s tochki zreniya vysshei: v 2-h tomah. T.1. Arifmetika. Algebra. Analiz [Elementary Mathematics from the Points of View of the Higher One: In 2 Volumes. V.1. Arithmetics. Algebra. Analysis], M.: Nauka, 1987, 324 p.
3. Nikishin E.M., Sorokin V.N. Ratsionalnye approksimatsii i ortogonalnost [Rational Approximants and Orthogonality], M.: Nauka, 1988, 256 p.
4. Mahler K., J. Reine Angew. Math., 1932, 166, pp. 118–150.
5. Mahler K., Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A, 1953, 245, pp. 371–398.
6. Aptekarev A.I. Vestnik MGU. Seriya 1. Matematika. Mekhanika. [Journal of MSU. Series 1. Mathematics. Mechanics.], 1981, 1, pp. 68–74.
7. Aptekarev A.I. Sbornik statei. Sovr. probl. matem. [Collection of Articles. Modern Issues of Mathematics], MIAN, M., 2007.
8. Kaliagin V.A. Matem. Sb. [Mathematical Collection], 1994, 185(6), pp. 79–100.
9. Baker J., Greivs-Morris P. Approksimatsii Pade [Pade Approximants], M.: Mir, 1986, 502 p.
10. Starovoitov A.P. Dokladi Natsionalnoi akademii nauk Belarusi [Reports of the National academy of Sciences of Belarus], 2013, 57(1), pp. 5–10.
11. Starovoitov A.P. Dokladi Natsionalnoi akademii nauk Belarusi [Reports of the National academy of Sciences of Belarus], 2013, 57(2), pp. 5–10.
12. Sidorov Y.V., Fedoriuk M.V., Shabunin M.I. Leksii po teorii funktsii kompleksnogo peremennogo: Uchebnik dlia vuzov [Lectures on the Theory of Functions of Complex Variable: Textbook for universities], M.: Nauka, 1989, 480 p.