БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.95

КАВИТОВА
Татьяна Валерьевна

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ И ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Минск, 2022

Научная работа выполнена
в **УО «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».**

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ -

Гладков Александр Львович,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой
математической кибернетики
Белорусского государственного университета.

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:

Мартынов Иван Платонович,
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры математического анализа,
дифференциальных уравнений и алгебры
УО «Гродненский государственный
университет имени Я. Купалы»;

Лемешевский Сергей Владимирович,
кандидат физико-математических наук, доцент,
директор
ГНУ «Институт математики НАН Беларуси».

ОППОНИРУЮЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ –

УО «Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины».

Защита состоится **«10» июня 2022 года** в ***10.00*** на заседании совета по защите диссертаций Д 02.01.07 при Белорусском государственном университете по адресу: *Минск, ул. Ленинградская 8 (корпус юридического факультета), ауд. 407*. Телефон ученого секретаря 209-57-09.
Почтовый адрес: пр-т Независимости 4, Минск, 220030.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан «6» мая 2022 года.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций
кандидат физ.-мат. наук доцент Т.С. Мардвилко

ВВЕДЕНИЕ

В диссертации рассматриваются проблемы глобальной разрешимости начально-краевых задач для нелинейных параболических уравнений, когда решение $u(x,t)$ определено при всех $t \geq 0$, и глобальной неразрешимости, когда решение неограниченно возрастает в течение конечного промежутка времени. Вопросам глобальной разрешимости начальных и начально-краевых задач для параболических уравнений и систем параболических уравнений посвящено большое количество работ. Прежде всего отметим статью H. Fujita[1], в которой впервые был получен оптимальный результат о глобальной разрешимости задачи Коши для полулинейного параболического уравнения $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, а также работы K. Deng, H.A. Levin[2], V.A. Galaktionov, J.-L. Vázquez[3], B. Hu[4] и P. Quittner, Ph. Souplet[5]. В этих работах содержится также обзор литературы по данной тематике.

В последние 30-40 лет интенсивно начали исследоваться задачи с нелокальными граничными условиями, что было обусловлено возможностью их приложений, например, в теории термоупругости. Отметим некоторые работы, в которых рассматривались такие задачи: A. Friedman[6], Ph. Souplet[7], H.-M. Yin[8]. Отличительной чертой данной диссертационной работы является изучение начально-краевых задач с нелокальными граничными условиями типа Дирихле и Неймана с переменными коэффициентами. Следует отметить, что данный вопрос мало изучен. В диссертации показано, что глобальная разрешимость начально-краевых задач зависит от поведения переменных коэффициентов при $t \to \infty$.

В диссертации также изучается задача Коши для нелинейного уравнения Буссинеска

$$u_t = \Delta u_t + \Delta\varphi(u) + h(t,u),$$

возникающего, например, при моделировании фильтрационных процессов. В работах В.З. Фураева, А.Л. Гладкова, А.И. Кожанова были исследованы во-

---

[1] *Fujita, H.* On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ / H. Fujita // J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. 1A. – 1966. — Vol. 13. — P. 109–124.

[2] *Deng, K.* The role of critical exponents in blow-up theorems: the sequel / K. Deng, H.A. Levine // J. Math. Anal. Appl. — 2000. – Vol. 243, № 1. — P. 85–126.

[3] *Galaktionov, V.A.* The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations / V.A. Galaktionov, J.-L. Vázquez // Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2002. — Vol. 8, № 2. — P. 399–433.

[4] *Hu, B.* Blow-up theories for semilinear parabolic equations / B. Hu. — Berlin: Springer, 2011. — 127 p.

[5] *Quittner, P.* Superlinear Parabolic Problems: Blow-up, Global Existence and Steady States / P. Quittner, Ph. Souplet. — 2nd ed. — Cham: Birkäuser, 2019. — XXII, 725 p.

[6] *Friedman, A.* Monotonic decay of solutions of parabolic equations with nonlocal boundary conditions / A. Friedman // Q. Appl. Math. — 1986. — Vol. 44, № 3. — P. 401–407.

[7] *Souplet, Ph.* Uniform blow-up profiles and boundary behavior for diffusion equations with nonlocal nonlinear source / Ph. Souplet // J. Differ. Equ. — 1999. — Vol. 153, № 2. — P. 374–406.

[8] *Yin, H.-M.* On a class of parabolic equations with nonlocal boundary conditions / H.-M. Yin // J. Math. Anal. Appl. —2004. — Vol. 294, № 2. — P. 712–728.

просы глобальной разрешимости, единственности решения начально-краевых задач и задачи Коши для данного нелинейного псевдопараболического уравнения, в котором $h(t,u) \equiv 0$ или $h(t,u) \equiv h(u)$, где $h(u)$ — степенная функция. В диссертационной работе рассматривается более общий случай функции $h(t,u)$ и изучается асимптотическое поведение решения задачи Коши при $|x| \to \infty$. Для рассматриваемого уравнения такие исследования ранее не проводились.

Таким образом, предлагаемые исследования являются актуальными и представляют интерес для занимающихся данной тематикой.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами, темами

Научные исследования по теме диссертации проводились в рамках задания «Нелинейные параболические и стационарные уравнения» (номер гос. регистрации 20062118) государственной программы фундаментальных исследований на 2006-2010 годы «Исследование математических моделей и их применение к анализу систем, структур и процессов в природе и обществе» («Математические модели-09»); в рамках задания 1.2.03 «Нелинейные параболические и эллиптические уравнения и системы» (номер гос. регистрации 20111878) подпрограммы «Разработка и исследование математических методов и их применение для решения актуальных проблем естествознания, техники, экономики и социальных наук» («Математические методы») государственной программы научных исследований на 2011-2015 годы «Междисциплинарные научные исследования, новые зарождающиеся технологии как основа устойчивого инновационного развития» («Конвергенция»); в рамках задания 1.2.03.1 «Нелинейные параболические и стационарные уравнения и системы» (номер гос. регистрации 20161890) подпрограммы «Методы математического моделирования сложных систем» государственной программы научных исследований на 2016-2020 годы «Конвергенция 2020».

Цель и задачи исследования

Цель диссертации — исследование вопросов глобального существования решений начально-краевых задач для нелинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями и описание поведения решений задачи Коши для нелинейного псевдопараболического уравнения для больших значений пространственной переменной. Для достижения этой цели были решены следующие задачи:

— установлены существование локального решения, принцип сравнения решений, единственность решения, глобальная разрешимость начально-краевой задачи для нелинейного параболического уравнения с нелинейным нелокальным граничным условием Неймана;

— установлены существование локального решения, принцип сравнения решений, глобальная разрешимость начально-краевой задачи для нелинейного нелокального параболического уравнения с нелинейным нелокальным граничным условием Дирихле;

— установлены существование решения в слое, принцип сравнения решений и стабилизация решения задачи Коши для нелинейного псевдопараболического уравнения.

Объектом исследования являются нелинейные параболические и псевдопараболические уравнения.

Предметом исследования являются свойства решений нелинейных параболических и псевдопараболических уравнений.

Научная новизна

Для начально-краевых задач для нелинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями Дирихле и Неймана получены достаточные условия существования и отсутствия глобальных решений.

Для задачи Коши для нелинейного псевдопараболического уравнения исследовано асимптотическое поведение решения для больших значений $|x|$.

Положения, выносимые на защиту

1. Условия единственности решения, локального и глобального существования решений начально-краевой задачи для нелинейного параболического уравнения с нелинейным нелокальным граничным условием Неймана.

2. Условия локального и глобального существования решений начально-краевой задачи для нелинейного нелокального параболического уравнения с нелинейным нелокальным граничным условием Дирихле.

3. Доказательство существования решения в слое и стабилизации решения задачи Коши для нелинейного псевдопараболического уравнения.

Личный вклад соискателя ученой степени

Основные результаты получены соискателем самостоятельно. Научным руководителем были поставлены задачи и предложена методика их исследования. В совместных статьях [3, 4, 5, 6] основные идеи и методы принадлежат научному руководителю, а реализация — соискателю.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Основные результаты диссертации апробированы на научных семинарах кафедры геометрии и математического анализа учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова», а также на следующих международных и республиканских научных конференциях:

— Республиканской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «III Машеровские чтения» (24-25 марта 2009 г., Витебск);

— Международных научных конференциях по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения–2009» (26-29 мая 2009 г., Пинск), «Еругинские чтения–2013» (13-16 мая 2013 г., Гродно), «Еругинские чтения–2014» (20-22 мая 2014 г., Новополоцк), «Еругинские чтения–2017» (16-20 мая 2017 г., Минск), «Еругинские чтения–2018» (15-18 мая 2018 г., Гродно), «Еругинские чтения–2019» (14-17 мая 2019 г., Могилев);

— Международных научно-практических конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «V Машеровские чтения» (29-30 сентября 2011 г., Витебск), «VI Машеровские чтения» (27-28 сентября 2012 г., Витебск);

— Международных научных конференциях «XI Белорусская математическая конференция» (5-9 ноября 2012 г., Минск), «XII Белорусская математическая конференция» (5-10 сентября 2016 г., Минск);

— Международной научной конференции «Математическое и компьютерное моделирование» (11 ноября 2016 г., 1 декабря 2017 г., 23 ноября 2018 г., 22 ноября 2019 г., Омск);

— Международной школе-конференции «Соболевские чтения» (10-16 декабря 2018 г., Новосибирск);

— Международной конференции «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения» (17-20 декабря 2019 г., Гродно).

Отдельные результаты внедрены в учебный процесс ВГУ имени П.М. Машерова (акты о внедрении от 24.11.2014, 25.11.2016).

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 22 научных работах, в том числе 6 статьях в соответствии с п. 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (общим объемом 3,25 авторских листа), 10 статьях в сборниках материалов научных конференций, 6 тезисах.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня сокращений и условных обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав основной части, заключения, библиографического списка из 92 наименований использованных источников и 22 наименований публикаций соискателя ученой степени, одного приложения. Полный объем диссертации составляет 123 страницы, из которых 12 страниц занимает библиографический список и 4 страницы — приложение.

Автор выражает глубокую признательность и искреннюю благодарность своему научному руководителю — доктору физико-математических наук профессору Гладкову Александру Львовичу за помощь и внимание, оказанные им при написании данной диссертации.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В *первой главе* диссертации содержится краткий обзор важнейших работ по теории нелинейных параболических и псевдопараболических уравнений, к которым примыкает тема настоящей диссертации.

Во *второй главе* рассматривается начально-краевая задача для нелинейного параболического уравнения

$$u_t = \Delta u + c(x,t)u^p, \; x \in \Omega, \; t > 0, \tag{1}$$

с нелинейным нелокальным граничным условием

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} = \int_\Omega k(x,y,t)u^l(y,t)\,dy, \; x \in \partial\Omega, \; t > 0, \tag{2}$$

и начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x), \; x \in \Omega, \tag{3}$$

где $p > 0$, $l > 0$, Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, с гладкой границей $\partial\Omega$, ν — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Пусть $C^\alpha_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\times[0,\infty))$ — пространство функций, локально непрерывных по Гёльдеру с показателем α $(0 < \alpha < 1)$ в $\overline{\Omega}\times[0,\infty)$. Относительно данных задачи (1)–(3) делаются следующие предположения:

$$c(x,t) \in C^\alpha_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\times[0,\infty)), \; c(x,t) \geq 0;$$

$$k(x,y,t) \in C(\partial\Omega\times\overline{\Omega}\times[0,\infty)), \; k(x,y,t) \geq 0;$$

$$u_0(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \; u_0(x) \geq 0, \; x \in \Omega, \; \frac{\partial u_0(x)}{\partial \nu} = \int_\Omega k(x,y,0)u_0^l(y)\,dy, \; x \in \partial\Omega.$$

Пусть $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$, $\Gamma_T = S_T \cup \overline{\Omega} \times \{0\}$, $T > 0$. Обозначим

$$C^{m,k}(Q_T) = \left\{ u(x,t) : \frac{\partial^i u}{\partial x^i} \in C(Q_T),\ \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \in C(Q_T),\ 0 \le i \le m,\ 0 \le j \le k \right\},$$

где $\frac{\partial^i u}{\partial x^i} = \frac{\partial^i u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}$, $0 \le i_k \le i$, $\sum_{k=1}^n i_k = i$.

Определение 1. *Назовем неотрицательную функцию $u(x,t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(Q_T \cup \Gamma_T)$ верхним решением задачи (1)–(3) в Q_T, если*

$$u_t \ge \Delta u + c(x,t)u^p,\ (x,t) \in Q_T, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} \ge \int_\Omega k(x,y,t)u^l(y,t)\,dy,\ (x,t) \in S_T, \tag{5}$$

$$u(x,0) \ge u_0(x),\ x \in \Omega. \tag{6}$$

Неотрицательную функцию $u(x,t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(Q_T \cup \Gamma_T)$ назовем нижним решением задачи (1)–(3) в Q_T, если неравенства (4)–(6) выполнены с противоположным знаком. Функцию $u(x,t)$ будем называть решением задачи (1)–(3) в Q_T, если $u(x,t)$ одновременно является верхним и нижним решениями задачи (1)–(3) в Q_T.

Определение 2. *Назовем решение $u(x,t)$ задачи (1)–(3) в Q_T максимальным, если для любого другого решения $v(x,t)$ задачи (1)–(3) в Q_T выполнено неравенство $v(x,t) \le u(x,t)$ в Q_T.*

Определение 3. *Назовем решение $u(x,t)$ задачи (1)–(3) глобальным, если оно определено в Q_T для любого $T > 0$.*

Определение 4. *Назовем решение $u(x,t)$ задачи (1)–(3) в Q_T нетривиальным, если $u(x,t) \not\equiv 0$ в Q_T.*

Отметим, что задача (1)–(3) рассматривалась для случая $c(x,t) \le 0$ в работе[9], где получены условия существования глобальных решений и обращения решений в бесконечность в течение конечного времени.

В *разделе 2.1* устанавливается принцип сравнения решений задачи (1)–(3) и доказывается единственность решения этой задачи для случая $\min(p,l) \ge 1$.

Теорема 1 [3]. *Пусть $u(x,t)$ и $v(x,t)$ — верхнее и нижнее решения задачи (1)–(3) в Q_T соответственно. Кроме того, если $\min(p,l) < 1$, то предположим, что $u(x,t) > 0$ или $v(x,t) > 0$ при $(x,t) \in Q_T \cup \Gamma_T$. Тогда $u(x,t) \ge v(x,t)$ при $(x,t) \in Q_T \cup \Gamma_T$.*

Теорема 2 [3]. *Предположим, что задача (1)–(3) имеет решение в Q_T с неотрицательным начальным условием в случае $\min(p,l) \ge 1$ и поло-*

[9] *Gladkov, A.* Blow-up problem for semilinear heat equation with nonlinear nonlocal Neumann boundary condition / A. Gladkov // Commun. Pure Appl. Anal. — 2017. — Vol. 16, № 6. — P. 2053–2068.

жительным начальным условием в противном случае. Тогда решение задачи (1)–(3) единственно в Q_T.

В *разделе 2.2* с помощью принципа сжимающих отображений доказывается существование локального решения задачи (1)–(3).

Теорема 3 [3]. *Для некоторого* $T > 0$ *задача (1)–(3) имеет максимальное решение в* Q_T.

В *разделе 2.3* исследуются вопросы единственности решения задачи (1)–(3) для случая $\min(p, l) < 1$.

Теорема 4 [3]. *Пусть* $\min(p, l) < 1$, $u_0(x) \not\equiv 0$ *в* Ω,

$$c(x,t) \text{ и } k(x,y,t) \text{ не убывают по } t \in [0, \bar{t}] \text{ для некоторого } \bar{t} \in (0,T)$$

и выполнено хотя бы одно из условий:

$$0 < p < 1 \text{ и } c(x,t) \not\equiv 0 \text{ в } Q_\tau \text{ для любого } \tau > 0;$$

$$0 < l < 1 \text{ и существуют последовательности } \{t_k\} \text{ и } \{y_k\}, k \in N,$$
$$\text{такие, что } t_k > 0,\ \lim_{k\to\infty} t_k = 0,\ y_k \in \partial\Omega,$$
$$k(x, y_k, t_k) > 0 \text{ для любого } x \in \partial\Omega.$$

Тогда решение задачи (1)–(3) единственно.

В *разделе 2.4* устанавливаются условия существования и отсутствия глобальных решений задачи (1)–(3).

В *подразделе 2.4.1* рассматривается случай $\max(p, l) \le 1$.

Теорема 5 [4]. *Пусть* $\max(p, l) \le 1$. *Тогда задача (1)–(3) глобально разрешима.*

В *подразделе 2.4.2* рассматривается случай $\max(p, l) > 1$. Введем обозначения

$$c_0(t) = |\Omega|^{1-p} \inf_{\Omega} c(x,t),\ k_0(t) = |\Omega|^{1-l} \inf_{\Omega} \int_{\partial\Omega} k(x,y,t)\, dS_x,$$

где $|\Omega|$ — мера Лебега множества Ω. Рассмотрим вспомогательную задачу Коши для одного из следующих обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$w'(t) = c_0(t) w^p,\ p > 1, \tag{7}$$

$$w'(t) = k_0(t) w^l,\ l > 1, \tag{8}$$

$$w'(t) = c_0(t) w^p + k_0(t) w^l,\ p \ge 1,\ l \ge 1, \tag{9}$$

с начальным условием

$$w(0) = \int_\Omega u_0(x)\, dx. \tag{10}$$

Теорема 6 [4]. *Пусть* $\max(p,l) > 1$. *Тогда из отсутствия глобальных решений задачи Коши (7), (10) ((8), (10) или (9), (10)) следует отсутствие глобальных решений задачи (1)–(3).*

Следствие 1 [4]. *Задача (1)–(3) не имеет глобальных решений для случаев:*

$$p > 1 \text{ и } \int_\Omega u_0(x)\,dx > \left((p-1)\int_0^\infty c_0(t)\,dt\right)^{-1/(p-1)};$$

$$l > 1 \text{ и } \int_\Omega u_0(x)\,dx > \left((l-1)\int_0^\infty k_0(t)\,dt\right)^{-1/(l-1)};$$

$p = 1,\ l > 1$ *и*

$$\int_\Omega u_0(x)\,dx > \left((l-1)\int_0^\infty k_0(t)\exp\left[(l-1)\int_0^t c_0(s)\,ds\right]\,dt\right)^{-1/(l-1)};$$

$l = 1,\ p > 1$ *и*

$$\int_\Omega u_0(x)\,dx > \left((p-1)\int_0^\infty c_0(t)\exp\left[(p-1)\int_0^t k_0(s)\,ds\right]\,dt\right)^{-1/(p-1)};$$

$$p > 1,\ l > 1 \text{ и } \int_\Omega u_0(x)\,dx >$$
$$> \min\left\{\left((p-1)\int_0^\infty c_0(t)\,dt\right)^{-1/(p-1)}, \left((l-1)\int_0^\infty k_0(t)\,dt\right)^{-1/(l-1)}\right\}.$$

При любых начальных данных задача (1)–(3) не имеет нетривиальных глобальных решений для следующих случаев:

$$p > 1 \text{ и } \int_0^\infty c_0(t)\,dt = \infty;$$

$$l > 1 \text{ и } \int_0^\infty k_0(t)\,dt = \infty;$$

$$p = 1,\ l > 1 \text{ и } \int_0^\infty k_0(t)\exp\left[(l-1)\int_0^t c_0(s)\,ds\right]\,dt = \infty;$$

$$p > 1,\ l = 1 \text{ и } \int_0^\infty c_0(t)\exp\left[(p-1)\int_0^t k_0(s)\,ds\right]\,dt = \infty;$$

$$p > 1,\ l > 1 \text{ и } \int_0^\infty (c_0(t) + k_0(t))\,dt = \infty.$$

Введем в рассмотрение следующие вспомогательные функции

$$\overline{c}(t) = \int_\Omega c(x,t)\,dx, \quad \overline{k}(t) = \int_{\partial\Omega}\int_\Omega k(x,y,t)\,dy\,dS_x.$$

Теорема 7 [4]. *Задача (1)–(3) не имеет нетривиальных глобальных решений, если*

$$p > 1 \text{ и } \int_0^\infty c_0(t)\,dt < \infty,\ \lim_{t\to\infty}\int_0^t \overline{k}(\tau)\,d\tau \left(\int_\tau^\infty c_0(\tau)\,d\tau\right)^{1/(p-1)} = \infty$$

или

$$l > 1 \text{ и } \int_0^\infty k_0(t)\,dt < \infty,\ \lim_{t\to\infty}\int_0^t \overline{c}(\tau)\,d\tau \left(\int_t^\infty k_0(\tau)\,d\tau\right)^{1/(l-1)} = \infty.$$

Пусть $c_1(t) = \sup\limits_\Omega c(x,t)$ и $k_1(t) = \sup\limits_{\partial\Omega\times\Omega} k(x,y,t)$.

Теорема 8 [4]. *Пусть* $\min(p,l) > 1$ *и выполнены следующие условия:*

$$\int_0^\infty (c_1(t) + k_1(t))\,dt < \infty;$$

существуют положительные постоянные β, t_0 *и* K *такие, что* $\beta > t_0$ *и*

$$\int\limits_{t-t_0}^t \frac{k_1(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau \le K \text{ для любого } t \ge \beta.$$

Тогда задача (1)–(3) имеет ограниченные глобальные решения при достаточно малых начальных данных.

Теорема 9 [4]. *Пусть* $p = 1$, $l > 1$ *и для некоторых* $K \ge 0$ *и* $\varepsilon > 0$ *функции* $k(x,y,t)$ *и* $c_1(t)$ *удовлетворяют условию*

$$\int_\Omega k(x,y,t)\,dy \le K\exp\left[-(l-1)\left\{\int\limits_0^t c_1(\tau)\,d\tau + \varepsilon t\right\}\right]$$

для любых $x \in \partial\Omega$ *и* $t \ge 0$. *Тогда задача (1)–(3) имеет глобальные решения при достаточно малых начальных данных.*

Предположим, что функции $k_1(t)$ и $c_1(t)$ удовлетворяют условию

$$\int_0^\infty k_1(t)\exp\left[(l-1)\int_0^t c_1(\tau)\,d\tau\right]dt < \infty \tag{11}$$

и существуют положительные постоянные β, t_0 и K такие, что $\beta > t_0$ и

$$\int\limits_{t-t_0}^t \frac{k_1(\tau)\exp\left[(l-1)\int_0^\tau c_1(s)\,ds\right]}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau \le K \text{ для любого } t \ge \beta. \tag{12}$$

Теорема 10 [4]. *Пусть $p = 1$, $l > 1$ и выполнены условия (11), (12). Тогда задача (1)–(3) имеет ограниченные глобальные решения при достаточно малых начальных данных.*

Предположим, что для функций $k(x, y, t)$ и $c_1(t)$ справедливо:

$$k(x, y, t) \le k_2(x),\ x \in \partial\Omega,\ y \in \Omega,\ t > 0, \tag{13}$$

и

$$\int_0^\infty c_1(t) \exp\left[(p-1)t \int_{\partial\Omega} k_2(x)\, dS\right] dt < \infty, \tag{14}$$

где $k_2(x)$ — неотрицательная непрерывная функция на $\partial\Omega$.

Теорема 11 [4]. *Пусть $l = 1$, $p > 1$ и выполнены условия (13), (14). Тогда задача (1)–(3) имеет глобальные решения при достаточно малых начальных данных.*

В *третьей главе* рассматривается нелинейное параболическое уравнение

$$u_t = \Delta u + a(x, t)u^r \int_\Omega u^p(y, t)\, dy - b(x, t)u^q,\ x \in \Omega,\ t > 0, \tag{15}$$

с нелинейным нелокальным граничным условием

$$u(x, t) = \int_\Omega k(x, y, t)u^l(y, t)\, dy,\ x \in \partial\Omega,\ t > 0, \tag{16}$$

и начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x),\ x \in \Omega, \tag{17}$$

где r, p, q, l — положительные постоянные.

Предполагаем, что

$$a(x, t),\ b(x, t) \in C^\alpha_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega} \times [0, \infty)),\ a(x, t) \ge 0,\ b(x, t) \ge 0;$$

$$k(x, y, t) \in C(\partial\Omega \times \overline{\Omega} \times [0, \infty)),\ k(x, y, t) \ge 0;$$

$$u_0(x) \in C(\overline{\Omega}),\ u_0(x) \ge 0,\ x \in \overline{\Omega},\ u_0(x) = \int_\Omega k(x, y, 0)u_0^l(y)\, dy,\ x \in \partial\Omega.$$

Определение 5. *Назовем неотрицательную функцию $u(x, t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(Q_T \cup \Gamma_T)$ верхним решением задачи (15)–(17) в Q_T, если*

$$u_t \ge \Delta u + a(x, t)u^r \int_\Omega u^p(y, t)\, dy - b(x, t)u^q,\ (x, t) \in Q_T, \tag{18}$$

$$u(x, t) \ge \int_\Omega k(x, y, t)u^l(y, t)\, dy,\ (x, t) \in S_T, \tag{19}$$

$$u(x, 0) \ge u_0(x),\ x \in \Omega. \tag{20}$$

Неотрицательную функцию $u(x,t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(Q_T \cup \Gamma_T)$ назовем нижним решением задачи (15)–(17) в Q_T, если неравенства (18)–(20) выполнены с противоположным знаком. Функцию $u(x,t)$ будем называть решением задачи (15)–(17) в Q_T, если $u(x,t)$ одновременно является верхним и нижним решениями задачи (15)–(17) в Q_T.

Определение 6. *Назовем решение $u(x,t)$ задачи (15)–(17) в Q_T максимальным, если для любого другого решения $v(x,t)$ задачи (15)–(17) в Q_T выполнено неравенство $v(x,t) \leq u(x,t)$ в Q_T.*

Определение 7. *Назовем решение $u(x,t)$ задачи (15)–(17) глобальным, если оно определено в Q_T для любого $T > 0$.*

Определение 8. *Назовем решение $u(x,t)$ задачи (15)–(17) в Q_T нетривиальным, если $u(x,t) \not\equiv 0$ в Q_T.*

Отметим, что задача (15)–(17) рассматривалась для случая $a(x,t) \equiv 0$ в работах[10,11], где доказаны существование локального решения, принцип сравнения решений и исследованы вопросы единственности и неединственности решения, а также получены условия существования глобальных решений и обращения решений в бесконечность в течение конечного времени.

В *разделе 3.1* установлен принцип сравнения решений задачи (15)–(17).

Теорема 12 [5]. *Пусть $\underline{u}(x,t)$ и $\overline{u}(x,t)$ — соответственно нижнее и верхнее решения задачи (15)–(17) в Q_T. Кроме того, если $\min(r,p,l) < 1$, то предположим, что $\underline{u}(x,t) > 0$ или $\overline{u}(x,t) > 0$ при $(x,t) \in Q_T \cup \Gamma_T$. Тогда $\overline{u}(x,t) \geq \underline{u}(x,t)$ при $(x,t) \in Q_T \cup \Gamma_T$.*

В *разделе 3.2* доказано существование локального решения задачи (15)–(17).

Теорема 13 [5]. *Для некоторого $T > 0$ задача (15)–(17) имеет максимальное решение в Q_T.*

В *разделе 3.3* установлены условия существования и отсутствия глобальных решений задачи (15)–(17).

Теорема 14 [6]. *Пусть $\max(r+p, l) \leq 1$ или выполнены условие*

$$b(x,t) > 0 \text{ для } x \in \overline{\Omega} \text{ и } t \geq 0$$

и одно из следующих условий:

$$l \leq 1,\ 1 < r+p < q$$

или

$$1 < l < (q+1)/2,\ \max(r+p, 2p+1) < q.$$

[10] *Gladkov, A.* Blow-up problem for semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition / A. Gladkov, M. Guedda // Nonlinear Anal. — 2011. — Vol. 74, № 13. — P. 4573–4580.

[11] *Gladkov, A.* Semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition / A. Gladkov, M. Guedda // Appl. Anal. — 2012. — Vol. 91, № 12. — P. 2267–2276.

Тогда задача (15)–(17) имеет глобальные решения при любых начальных данных.

Теорема 15 [6]. *Если $l > \max(1, (q+1)/2)$ и для некоторых положительных постоянных k_0 и t_0 выполнено условие*

$$k(x, y, t) \geq k_0 > 0, \ x \in \partial\Omega, \ y \in \Omega, \ 0 < t < t_0,$$

или $r + p > \max(q, 1)$ и для некоторых положительных постоянных a_0 и t_1 выполнено условие

$$a(x, t) \geq a_0 > 0, \ x \in \Omega, \ 0 < t < t_1,$$

то существуют решения задачи (15)–(17), которые за конечное время обращаются в бесконечность.

В *разделе 3.4* устанавливаются отсутствие нетривиальных глобальных решений и существование глобальных решений задачи (15)–(17) при достаточно малых начальных данных.

Теорема 16 [6]. *Пусть $\inf_{\Omega} b(x, 0) > 0$ и выполнено одно из условий:*

$$q < \min(r + p, 1), \ l > 1$$

или

$$r \geq q, \ (q+1)/2 < l \leq 1.$$

Тогда задача (15)–(17) имеет глобальные решения при достаточно малых начальных данных.

Рассмотрим случай $q = 1$. Положим

$$\begin{gathered} \overline{a}(t) = \sup_{\Omega} a(x,t), \ \underline{a}(t) = \inf_{\Omega} a(x,t), \ \overline{b}(t) = \sup_{\Omega} b(x,t), \ \underline{b}(t) = \inf_{\Omega} b(x,t), \\ \underline{k}(t) = \inf_{\partial\Omega\times\Omega} k(x,y,t). \end{gathered} \tag{21}$$

Обозначим через λ_1 первое собственное значение задачи

$$\begin{cases} \Delta\varphi + \lambda\varphi = 0, \ x \in \Omega, \\ \varphi(x) = 0, \ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Теорема 17 [6]. *Если $q = 1$, $\min(r + p, l) > 1$ и выполнены условия*

$$\int_0^\infty \overline{a}(t) \exp\left[-(r+p-1)\left(\sigma t + \int_0^t \underline{b}(\tau)\,d\tau\right)\right] dt < \infty, \ \sigma < \lambda_1;$$

$$\begin{gathered} \textstyle\int_\Omega k(x,y,t)\,dy \leq K \exp\left[(l-1)\left(\gamma t + \int_0^t \underline{b}(\tau)\,d\tau\right)\right], \\ x \in \partial\Omega, \ t > 0, \ K > 0, \ \gamma < \lambda_1, \end{gathered}$$

то существуют глобальные решения задачи (15)–(17) при достаточно малых начальных данных. Если $q = 1$, $\min(r, p) \geq 1$ *и выполнено условие*

$$\int_0^\infty \underline{a}(t) \exp\left[-(r+p-1)\left(\lambda_1 t + \int_0^t \overline{b}(\tau)\,d\tau\right)\right] dt = \infty,$$

или $q = 1$, $l > 1$ *и выполнено условие*

$$\int_0^\infty \underline{k}(t) \exp\left[-(l-1)\left(\lambda_1 t + \int_0^t \overline{b}(\tau)\,d\tau\right)\right] dt = \infty,$$

то любое нетривиальное решение задачи (15)–(17) обращается в течение конечного времени в бесконечность.

Далее рассматривается случай $q > 1$. Предположим, что выполнены условия

$$\int_\Omega k(x,y,t)\,dy \leq A \exp[\sigma t],\ x \in \partial\Omega,\ t > 0,\ A > 0,\ \sigma < \lambda_1(l-1), \tag{22}$$

и

$$b(x,t) \geq Ba(x,t)\exp[-\omega t],\ x \in \Omega,\ t > 0,\ B > 0,\ \omega < \lambda_1(r+p-q), \tag{23}$$

или условия

$$b(x,t) \leq \varepsilon(t)\exp[\lambda_1(q-1)t],\ x \in \Omega,\ t > 0, \tag{24}$$

$$\varepsilon(t) \in C([0,\infty)),\ \varepsilon(t) \geq 0,\ \int_0^\infty \varepsilon(t)\,dt < \infty, \tag{25}$$

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = 0, \tag{26}$$

и

$$k(x,y,t) \geq D\exp[\lambda_1(l-1)t],\ x \in \partial\Omega,\ y \in \Omega,\ D > 0, \tag{27}$$

для достаточно больших значений t.

Теорема 18 [6]. *Если* $l > 1$, $1 < q < r + p$ *и выполнены условия (22), (23), то существуют глобальные решения задачи (15)–(17) при достаточно малых начальных данных. Если* $l \geq q > 1$ *и выполнены условия (24)–(27), то любое нетривиальное решение задачи (15)–(17) обращается в течение конечного времени в бесконечность.*

Предположим, что

$$\underline{a}(t) = \gamma(t)\exp[\lambda_1(r+p-q)t]\,\overline{b}(t), \tag{28}$$

$$\int_0^\infty \underline{a}(t)\exp[-\lambda_1(r+p-1)t]\;dt = \infty, \tag{29}$$

где $\gamma(t) \in C([0,\infty))$, $\lim_{t\to\infty}\gamma(t) = \infty$, $\underline{a}(t)$ и $\overline{b}(t)$ — функции, определенные в (21).

Теорема 19 [6]. *Пусть* $\max(r,p) \geq q > 1$ *и выполнены условия (24), (25), (28), (29). Тогда любое нетривиальное решение задачи (15)–(17) обращается в течение конечного времени в бесконечность.*

В *четвертой главе* в слое $\Pi_T = \mathbb{R}^n \times [0,T]$ $(T > 0)$ рассматривается задача Коши для нелинейного псевдопараболического уравнения

$$u_t = \Delta u_t + \Delta\varphi(u) + h(t,u) \tag{30}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x), \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{31}$$

где

$$u_0(x) \in C^2(\mathbb{R}^n), \ 0 \leq u_0(x) \leq M \ (M \geq 0). \tag{32}$$

Предполагаем, что:

$$\varphi(p) \in C^2([0,\infty)), \ h(t,p) \in C^{0,1}([0,\infty) \times [0,\infty)), \tag{33}$$

$$\begin{gathered} \varphi(p) + h(t,p) \text{ не убывает по } p \in [0,\infty) \text{ для любого } t \in [0,\infty), \\ h(t,0) = 0, \ t \in [0,\infty). \end{gathered} \tag{34}$$

Пусть $C^{m,1}_{x,t}(\Pi_T) = \left\{u(x,t) : \frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i \partial t^j} \in C(\Pi_T), \ 0 \leq i \leq m, \ 0 \leq j \leq 1\right\}$, где $\frac{\partial^i u}{\partial x^i} = \frac{\partial^i u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}, \ 0 \leq i_k \leq i, \ \sum_{k=1}^n i_k = i$.

Определение 9. *Решением задачи (30), (31) в* Π_T *назовем функцию* $u(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}(\Pi_T)$, *удовлетворяющую уравнению (30) в* Π_T *и начальному условию (31).*

Определение 10. *Назовем решение* $u(x,t)$ *задачи (30), (31) в* Π_T *максимальным, если для любого другого решения* $v(x,t)$ *задачи (30), (31) в* Π_T *выполнено неравенство* $v(x,t) \leq u(x,t)$, $(x,t) \in \Pi_T$.

Отметим, что в работе[12] для случая $\varphi(u) = cu^2 \, (c > 0)$, $h(t,u) \equiv 0$ доказаны существование и единственность ограниченного решения задачи Коши (30), (31). В работе[13] в случае, когда $h(t,u) \equiv 0$ и функция $\varphi(p)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{gathered} \varphi(p) \in C^2([0,\infty)), \ \varphi(0) = 0, \ \alpha_1 p^m \leq \varphi'(p) \leq \alpha_2 p^m, \\ 0 \leq \varphi''(p) \leq \alpha_3 p^{m-1}, \ \varphi(p) \leq \alpha_4 p\varphi'(p), \ \alpha_i > 0 \, (i = \overline{1,4}), \ m \geq 1, \end{gathered}$$

---

[12] *Фураев, В.З.* О разрешимости краевых задач и задачи Коши для обобщенного уравнения Буссинеска в теории нестационарной фильтрации : дис. … канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / В.З. Фураев. — М., 1983. — 87 л.

[13] *Гладков, А.Л.* Задача Коши в классах растущих функций для некоторых нелинейных псевдопараболических уравнений / А.Л. Гладков // Дифференц. уравнения. — 1988. — Т. 24, № 2. — С. 277–288.

доказан ряд теорем о разрешимости задачи Коши (30), (31) с начальной функцией, неограниченно растущей на бесконечности.

В *разделе 4.1* в некотором цилиндре конечной высоты с ограниченной областью из пространства $\mathbb{R}^n$ в основании доказывается существование неотрицательного классического решения начально-краевой задачи для уравнения (30) с неотрицательными ограниченными граничными и начальными данными.

В *разделе 4.2* доказывается существование решения задачи Коши (30), (31) в слое.

Пусть $[0, T_0)$ $(T_0 \le \infty)$ — промежуток существования решения $\vartheta(t)$ следующей задачи Коши

$$\vartheta'(t) = h(t, \vartheta), \; \vartheta(0) = M. \tag{35}$$

Теорема 20 [1]. *Пусть выполнены условия (32)–(34). Тогда для любого* $T < T_0$ *в слое* Π_T *существует решение задачи (30), (31), удовлетворяющее неравенствам*

$$0 \le u(x,t) \le \vartheta(t), \; (x,t) \in \Pi_T.$$

В *разделе 4.3* доказывается принцип сравнения решений задачи (30), (31).

В *разделе 4.4* для любого $T < T_0$ доказывается существование максимального решения $u(x,t)$ задачи Коши (30), (31) в слое Π_T, а также устанавливается стабилизация $u(x,t)$ при $|x| \to \infty$ к решению задачи Коши (35).

Предполагается, что

$$\begin{gathered} \varphi(p) \in C^2([0,\infty)) \cap C^3((0,\infty)), \\ h(t,p) \in C^{0,1}([0,\infty) \times [0,\infty)) \cap C^{0,2}([0,\infty) \times (0,\infty)). \end{gathered} \tag{36}$$

Теорема 21 [2]. *Пусть выполнены условия (32), (34), (36), а также условия*

$$h(t,p) \ge 0, \; t \in [0,\infty), \; p \in [0,\infty);$$

$$\lim_{|x|\to\infty} u_0(x) = M.$$

Пусть $\vartheta(t)$ *— решение задачи (35), определенное на промежутке* $[0, T_0)$, *и* $u(x,t)$ *— максимальное решение задачи (30), (31) в* Π_T $(T < T_0)$. *Тогда*

$$u(x,t) \to \vartheta(t) \text{ при } |x| \to \infty$$

равномерно по $t \in [0, T]$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. Получены условия единственности решения, локального и глобального существования решений начально-краевой задачи для нелинейного параболического уравнения с нелинейным нелокальным граничным условием Неймана [3, 4, 8, 9, 18, 19, 20].

2. Найдены условия локального и глобального существования решений начально-краевой задачи для нелинейного нелокального параболического уравнения с нелинейным нелокальным граничным условием Дирихле [5, 6, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22].

3. Доказазано существование решения в слое и установлена стабилизация решения задачи Коши для нелинейного псевдопараболического уравнения [1, 2, 7, 17].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании параболических и псевдопараболических уравнений, а также при чтении спецкурсов по дифференциальным уравнениям с частными производными для студентов математических специальностей, написании курсовых и дипломных проектов, магистерских и кандидатских диссертаций. Имеется 2 акта о внедрении в учебный процесс.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

Статьи в соответствии с п. 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь

1. *Кавитова, Т.В.* Существование решения задачи Коши для псевдопараболического уравнения / Т.В. Кавитова // Весн. Віцебск. дзярж. ун-та. — 2011. — № 3 (63). — С. 14–19.

2. *Kavitova, T.V.* Behavior of the maximal solution of the Cauchy problem for some nonlinear pseudoparabolic equation as $|x| \to \infty$ [Electronic resource] / T.V. Kavitova // Electron. J. Differ. Equ. — 2012. — Vol. 2012, № 141. — Mode of access: https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2012/141/kavitova.pdf. — Date of access: 20.08.2012.

3. *Гладков, А.Л.* Начально-краевая задача для полулинейного параболического уравнения с нелинейными нелокальными граничными условиями / А.Л. Гладков, Т.В. Кавитова // Укр. мат. журн. — 2016. — Т. 68, № 2. — С. 162–174.

4. *Gladkov, A.* Blow-up problem for semilinear heat equation with nonlinear nonlocal boundary condition / A. Gladkov, T. Kavitova // Appl. Anal. — 2016. — Vol. 95, № 9. — P. 1974–1988.

5. *Гладков, А.Л.* О начально-краевой задаче для нелокального параболического уравнения с нелокальным граничным условием / А.Л. Гладков, Т.В. Кавитова // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. — 2018. — № 1. — С. 29–38.
Гладков, А.Л. Письмо в редакцию / А.Л. Гладков, Т.В. Кавитова // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. — 2019. — № 1. — С. 33–34.

6. *Gladkov, A.* Global existence of solutions of initial boundary value problem for nonlocal parabolic equation with nonlocal boundary condition / A. Gladkov, T. Kavitova // Math. Meth. Appl. Sci. — 2020. — Vol. 43, № 8. — P. 5464–5479.

Статьи в сборниках материалов конференций

7. *Кавитова, Т.В.* Принцип сравнения для решений задачи Коши для псевдопараболических уравнений / Т.В. Кавитова // III Машеровские чтения. Математика. Информатика. Философия. Экономика. Юриспруденция : материалы респ. науч.-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 24–25 марта 2009 г. / М-во образования Респ. Бел., Вит. гос.

ун-т ; редкол.: А.Л. Гладков (гл. ред.) [и др.]. — Витебск : УО «ВГУ имени П.М. Машерова», 2009. — С. 9–10.

8. *Кавитова, Т.В.* Положительность решения начально-краевой задачи с нелокальными граничными данными / Т.В. Кавитова // VI Машеровские чтения : материалы междунар. науч.-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 27–28 сентября 2012 г. / М-во образования Респ. Бел., Вит. гос. ун-т ; редкол.: А.П. Солодков (гл. ред.) [и др.]. — Витебск : УО «ВГУ имени П.М. Машерова», 2012. — С. 24–25.

9. *Гладков, А.Л.* О глобальной разрешимости начально-краевой задачи для полулинейного параболического уравнения с нелинейными нелокальными граничными условиями Неймана / А.Л. Гладков, Т.В. Кавитова // XII Белорусская математическая конференция : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 5–10 сентября 2016 г. : в 5 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ ; ред. С.Г. Красовский. — Минск : Институт математики НАН Беларуси, 2016. – Ч. 2. — С. 65-66.

10. *Кавитова, Т.В.* Принцип сравнения для первой начально-краевой задачи для нелинейного параболического уравнения с нелокальностями в уравнении и граничном условии / Т.В. Кавитова // Математическое и компьютерное моделирование : сб. материалов IV Междунар. науч. конф., Омск, 11 ноября 2016 г. / М-во образования и науки Рос. Федерации, ФГБОУ ВО «ОмГУ им. Ф.М. Достоевского». — Омск : Изд-во Омского гос. ун-та, 2016. — С. 29-31.

11. *Гладков, А.Л.* Положительность решений первой начально-краевой задачи для нелинейного параболического уравнения с нелокальностями в уравнении и граничном условии / А.Л. Гладков, Т.В. Кавитова // Математическое и компьютерное моделирование : сб. материалов V Междунар. науч. конф., посвящ. памяти Р.Л. Долганова, Омск, 1 декабря 2017 г. / М-во образования и науки Рос. Федерации, ФГБОУ ВО «ОмГУ им. Ф.М. Достоевского». — Омск : Изд-во Омского гос. ун-та, 2017. — С. 17–18.

12. *Гладков, А.Л.* Об одной начально-краевой задаче для нелинейного нелокального параболического уравнения с нелинейным нелокальным граничным условием / А.Л. Гладков, Т.В. Кавитова // XVIII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2018): материалы Междунар. науч. конф., Гродно, 15–18 мая 2018 г.: в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ, ГрГУ им. Я. Купалы. — Минск : Институт математики НАН Беларуси, 2018. — Ч. 2. — С. 10–11.

13. *Гладков, А.Л.* Первая начально-краевая задача для нелинейного

параболического уравнения с нелинейным нелокальным граничным условием / А.Л. Гладков, Т.В. Кавитова // Математическое и компьютерное моделирование : сб. материалов VI Междунар. науч. конференции, посвящ. памяти Б.А. Рогозина, Омск, 23 ноября 2018 г. / М-во науки и высш. обр. Рос. Федерации, ФГБОУ ВО «ОмГУ им. Ф.М. Достоевского». — Омск : Изд-во Омского гос. ун-та, 2018. — С. 15–16.

14. *Гладков, А.Л.* Отсутствие нетривиальных глобальных решений начально-краевой задачи для нелинейного нелокального параболического уравнения / А.Л. Гладков, Т.В. Кавитова // XIX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2019): материалы Междунар. науч. конф., Могилев, 14–17 мая 2019 г. : в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ, Белорусско-российский ун-т. — Минск : Институт математики НАН Беларуси, 2019. — Ч. 2. — С. 12–13.

15. *Гладков, А.Л.* О глобальной разрешимости начально-краевой задачи для нелинейного параболического уравнения с нелинейным нелокальным граничным условием / А.Л. Гладков, Т.В. Кавитова // Математическое и компьютерное моделирование : сб. материалов VII Междунар. науч. конф., посвящ. памяти С.С. Ефимова, Омск, 22 ноября 2019 г. / М-во образования и науки Рос. Федерации, ФГБОУ ВО «ОмГУ им. Ф.М. Достоевского». — Омск : Изд-во Омского гос. ун-та, 2019. — С. 13–14.

16. *Гладков, А.Л.* О положительности решений начально-краевой задачи для нелинейного параболического уравнения с нелинейным нелокальным граничным условием / А.Л. Гладков, Т.В. Кавитова // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: материалы IV междунар. науч. конф., посвящ. 95-лет. со дня рожд. чл.-кор. АН БССР, проф. Иванова Евгения Алексеевича, Гродно, 17–20 декабря 2019 г. / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ, ГрГУ им. Я. Купалы ; редкол.: В.И. Корзюк (гл. ред.) [и др.]. — Гродно : ГрГУ, 2019. — С. 45–46.

Тезисы докладов

17. *Кавитова, Т.В.* Стабилизация на бесконечности решений задачи Коши для некоторых псевдопараболических уравнений / Т.В. Кавитова // XIII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2009) : тез. докладов Междунар. науч. конф., Пинск, 26–29 мая 2009 г. / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ, Полесский гос. ун-т. — Минск : Институт математики НАН Беларуси, 2009. — С. 96.

18. *Кавитова, Т.В.* Единственность решения начально-краевой задачи для полулинейного параболического уравнения с нелинейными нелокаль-

ными граничными данными / Т.В. Кавитова // XI Белорусская математическая конференция : тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 5–9 ноября 2012 г. : в 5 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ. — Минск : Институт математики НАН Беларуси, 2012. — Ч. 2. — С. 69–70.

19. *Кавитова, Т.В.* Глобальная разрешимость начально-краевой задачи для параболического уравнения с нелинейными нелокальными граничными данными / Т.В. Кавитова // XV Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2013) : тез. докладов Междунар. науч. конф., Гродно, 13–16 мая 2013 г. : в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ, ГрГУ. — Минск : Институт математики НАН Беларуси, 2013. — Ч. 2. — С. 7–8.

20. *Кавитова, Т.В.* Разрешимость начально-краевой задачи для параболического уравнения с нелинейными нелокальными граничными данными / Т.В. Кавитова // XVI Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2014) : тез. докл. Междунар. науч. конф., Новополоцк, 20–22 мая 2014 г. : в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ, ПГУ.— Минск : Институт математики НАН Беларуси, 2014. — Ч. 2. — С. 12–13.

21. *Кавитова, Т.В.* Единственность решения начально-краевой задачи для одного параболического уравнения с нелокальностями в уравнении и граничном условии / Т.В. Кавитова // XVII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2017): тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 16–20 мая 2017 г.: в 2 ч. / М-во образования Респ. Бел., Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ, БНТУ. — Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2017. — Ч. 2. — С. 9–10.

22. *Gladkov, A.L.* Blow-up Problem For Nonlocal Parabolic Equation with Absorption and Nonlocal Boundary Condition / A.L. Gladkov, T.V. Kavitova // Соболевские чтения. Международная школа-конференция, посвященная 110-летию со дня рождения С.Л. Соболева, Новосибиск, 10–16 декабря 2018 г. : тез. докладов / Ин-т математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирский гос. ун-т. ; ред.: Г.В. Демиденко. — Новосибирск: Изд-во Института математики, 2018. — С. 215.

РЕЗЮМЕ

Кавитова Татьяна Валерьевна

О поведении решений и глобальной разрешимости задач для нелинейных параболических и псевдопараболических уравнений

Ключевые слова: псевдопараболическое уравнение, задача Коши, стабилизация, принцип сравнения решений, параболическое уравнение, нелокальное граничное условие, глобальное существование.

Цель работы: исследование вопросов глобального существования решений начально-краевых задач для нелинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями и описание поведения решений задачи Коши для нелинейного псевдопараболического уравнения для больших значений пространственной переменной.

Методы исследования: метод параболической регуляризации, построение верхних и нижних решений, переход к интегро-дифференциальным уравнениям, исследование обыкновенных дифференциальных уравнений, принцип сжимающих отображений, принципы максимума.

Полученные результаты и их новизна. Для второй начально-краевой задачи для нелинейного параболического уравнения с нелинейным нелокальным граничным условием установлены теоремы существования локального решения, единственности решения, принцип сравнения решений и исследованы вопросы глобальной разрешимости. Для первой начально-краевой задачи для нелинейного параболического уравнения с нелокальностями в уравнении и граничном условии установлены теорема существования локального решения, принцип сравнения решений и исследованы вопросы глобальной разрешимости. Для задачи Коши для нелинейного псевдопараболического уравнения доказаны существование решения в слое и стабилизация решения.

Все полученные результаты являются новыми.

Рекомендации по использованию. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании параболических и псевдопараболических уравнений, а также при чтении спецкурсов по дифференциальным уравнениям с частными производными для студентов математических специальностей, написании курсовых и дипломных проектов, магистерских и кандидатских диссертаций.

Область применения: дифференциальные уравнения с частными производными.

РЭЗЮМЭ

Кавітава Таццяна Валер'еўна

Аб паводзінах рашэнняў і глабальнай вырашальнасці задач для нелінейных парабалічных і псеўдапарабалічных ураўненняў

Ключавыя словы: псеўдапарабалічнае ўраўненне, задача Кашы, стабілізацыя, прынцып параўнання рашэнняў, парабалічнае ўраўненне, нелакальная краявая ўмова, глабальнае існаванне.

Мэта працы: даследаванне пытанняў глабальнага існавання рашэнняў пачаткова-краявых задач для нелінейных парабалічных ураўненняў з нелінейнымі нелакальнымі краявымі умовамі і апісанне паводзін рашэнняў задачы Кашы для нелінейнага псеўдапарабалічнага ўраўнення для вялікіх значэнняў прасторавай зменнай.

Метады даследавання: метад парабалічнай рэгулярызацыі, пабудова верхніх і ніжніх рашэнняў, пераход да інтэгра-дыферэнцыяльных ураўненняў, даследаванне звычайных дыферэнцыяльных ураўненняў, прынцып сціскальных адлюстраванняў, прынцыпы максімума.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. Для другой пачаткова-краявой задачы для нелінейнага парабалічнага ўраўнення з нелінейнай нелакальнай краявой умовай устаноўлены тэарэмы існавання лакальнага рашэння, адзінасці рашэння, прынцып параўнання рашэнняў і даследаваны пытанні глабальнай вырашальнасці. Для першай пачаткова-краявой задачы для нелінейнага парабалічнага ўраўнення з нелакальнасцямі ва ўраўненні і краявой умове ўстаноўлены тэарэма існавання лакальнага рашэння, прынцып параўнання рашэнняў і даследаваны пытанні глабальнай вырашальнасці. Для задачы Кашы для нелінейнага псеўдапарабалічнага ўраўнення дадзены доказы існавання рашэння ў пласце і стабілізацыі рашэння.

Усе атрыманыя вынікі з'яўляюцца новымі.

Рэкамендацыі па выкарыстанні. Атрыманыя вынікі могуць быць выкарыстаны пры даследаванні парабалічных і псеўдапарабалічных ураўненняў, а таксама пры чытанні спецкурсаў па дыферэнцыяльным ураўненням з частковымі вытворнымі для студэнтаў матэматычных спецыяльнасцяў, напісанні курсавых і дыпломных праектаў, магістарскіх і кандыдацкіх дысертацый.

Галіна прымянення: дыферэнцыяльныя ўраўненні з частковымі вытворнымі.

SUMMARY

Kavitova Tatiana Valeryevna

On the behavior of solutions and the global solvability of problems for nonlinear parabolic and pseudoparabolic equations

Keywords: pseudoparabolic equation, Cauchy problem, stabilization, comparison principle, parabolic equation, nonlocal boundary condition, global existence.

Research aim: studying the global existence of solutions of the initial-boundary value problems for nonlinear parabolic equations with nonlinear nonlocal boundary conditions and describing the behavior of solutions of the Cauchy problem for nonlinear pseudoparabolic equation for large values of the spatial variable.

Research methods: the method of parabolic regularization, construction of super and subsolutions, transition to integro-differential equations, ordinary differential equations investigation, the contraction mapping principle, maximum principles.

Obtained results and their novelty. For the second initial-boundary value problem for a nonlinear parabolic equation with a nonlinear nonlocal boundary condition we get theorems of the existence of a local solution and uniqueness of a solution, comparison principle and we investigate the problem of global solvability. For the first initial-boundary value problem for a nonlinear parabolic equation with nonlocalities in the equation and the boundary condition we obtain a theorem of the existence of a local solution and comparison principle, and we research the problem of global solvability. For the Cauchy problem for a nonlinear pseudoparabolic equation we prove the existence of a solution in a layer and stabilization of a solution.

All results are new.

Recommendation for use. The results can be applied for the study of parabolic and pseudoparabolic equations, as well as for reading special courses on partial differential equations for students of mathematical specialities, while writing terms papers and graduation projects, master of philosophy and doctor of philosophy theses.

Application field: partial differential equations.