УДК 517.926+517.977

Об одном легальном маршруте в пространстве квадратных матриц

А.А. Козлов, А.Д. Бурак
Учреждение образования «Полоцкий государственный университет»

Решение многих задач современной механики, физики, техники связано с исследованием управляемых динамических систем, моделирующих физические, технические и иные процессы. Одним из основных факторов, определяющих динамику развития процесса, является его устойчивость – способность динамической системы, описывающей процесс, сохранять текущее состояние при наличии внешних воздействий. Для управляемых процессов (систем, объектов) понятие устойчивости неразрывно связано с понятием стабилизации управляемого динамического процесса, которая представляет собой возможность приведения рассматриваемого процесса с помощью некоторого управляющего воздействия в устойчивое состояние. В математической теории автоматического регулирования широко известна задача о стабилизации управляемого объекта [1], описываемого линейной стационарной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, исчерпывающе решенная [2] еще в середине XX века. Задача глобального управления асимптотическими (ляпуновскими) инвариантами линейных дифференциальных систем [3, с. 251–264] является обобщением на нестационарный случай этой задачи стабилизации.

Одним из этапов решения задачи глобальной управляемости ляпуновских инвариантов является построение в пространстве матриц так называемого легального маршрута [4]. В данной работе рассмотрена задача построения в пространстве квадратных матриц n-ого порядка одного легального маршрута [4], связывающего единичную матрицу с некоторой матрицей, последний столбец которой является наперед заданным n-мерным вектор-столбцом, сонаправленным с последним столбцом единичной матрицы.

***Ключевые слова:** легальный маршрут, пространство квадратных матриц, нормированный базис.*

About One Legal Route in the Space of Square Matrices

A.A. Kozlov, A.D. Burak
Educational establishment «Polotsk State University»

The solution of many problems of modern mechanics, physics, technology is connected with the research of controlled dynamic systems which model physical, technological and other procecces. One of the major factors, defining the dynamics of progress of the process, is its stability – ability of the dynamic system, describing the process, to keep the current state with the presence of external influences. For controlled processes (systems, objects) the definition of stability is inseparably linked with the definition of stabilization of the controlled dynamic process which represents the possibility of reduction of the considered process by means of some controlled influence in a stable state. In the mathematical theory of automatic control the task of stabilization of the controlled object [1], which is described by linear stationary system of ordinary differential equations, more full solutions [2] in the middle of the XX century, is widely known. The problem of global control of asymptotic Lyapunov invariants of linear differential systems [3, p. 251–264] is generalization on a non-stationary case of this problem of stabilization.

One of the stages of the solution of the problem of global controllability of the invariants of Lyapunov is construction of a so-called legal route [4] in space of matrices. The problem of the construction of one legal route [4] in the space of square n-dimensional matrices, which connects an identity matrix with some matrix the last column of which is beforehanded with n-dimensional vector-column, collinear with the last column of identity matrix, is considered in this paper.

***Key words:** legal route, space of square matrices, normal basis.*

Рассмотрим n-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, векторы канонического ортонормированного базиса которого обозначим через e_i, $i=\overline{1,n}$. Наряду с векторным пространством $\mathbb{R}^n$ будем рассматривать пространство M_n квадратных вещественных матриц порядка n со спектральной (операторной) нормой [5, с. 355], т.е. нормой, индуцируемой на M_n евклидовой нормой в $\mathbb{R}^n$. Дадим следующее, используемое на протяжении всей работы,

Определение 1 [4]. *Пусть* $\xi_1,\ldots,\xi_2$ – *последовательность векторов из пространства* $\mathbb{R}^n$; ρ – *некоторое положительное число. Последовательность матриц* $P_0,\ldots,P_l \in M_n$ *называется* ρ*-легальным маршрутом (относительно последовательности векторов* ξ_i), *соединяющим точки P_0 и P_l, если выполнены неравенства* $\det P_i \geq \rho$, $i=\overline{0,l}$, *и найдутся такие векторы* $u_i \in \mathbb{R}^n$, $i=\overline{1,l}$, *что при каждом* $i=\overline{1,l}$ *имеют место соотношения*

$$P_i - P_{i-1} = \xi_i \cdot u_i^T. \qquad (1)$$

Натуральное число l будем называть длиной легального маршрута.

Легальный маршрут является вспомогательным инструментом в решении задач глобальной управляемости различных асимптотических характеристик [3–4; 6–9] линейных управляемых нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geq 0. \qquad (2)$$

Так, например, используя подходящим образом построенный легальный маршрут, были получены доказательства глобальной управляемости показателей Ляпунова n-мерных линейных систем (2) с кусочно равномерно непрерывными коэффициентами [4], а также двумерных [6] и трехмерных [7–8] линейных систем (2) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными матрицами коэффициентов A и B; установлена глобальная управляемость полной совокупности ляпуновских инвариантов [3, с. 281–395; 9] двумерных линейных систем (2) с непрерывной и ограниченной матрицей A и ограниченной кусочно равномерно непрерывной матрицей B.

В данной работе на основании метода построения легального маршрута для квадратных матриц второго порядка, описанного в статье [6], найден легальный маршрут в пространстве M_n квадратных матриц n-ого порядка.

Результаты и их обсуждение. Прежде чем переходить к формулировке основных результатов работы, докажем необходимое нам в дальнейшем утверждение, обобщающее лемму 9 статьи [7] на n-мерный случай.

Лемма 1. *При любых числах $0 < \delta, \beta \leq 1$ и произвольных единичных векторах $\xi_i \in \mathbb{R}^n$, $i=\overline{1,n}$, таких, что имеет место оценка $|\det[\xi_1,\ldots,\xi_n]| \geq \delta$, среди векторов $v_i \in \mathbb{R}^n$, $\|v_i\|=1$, $i=\overline{1,n}$, удовлетворяющих неравенству $|\det[v_1,\ldots,v_n]| \geq \beta$, для каждого $l \in \{1,\ldots,n\}$ найдется хотя бы один такой вектор v, при котором справедливо соотношение*

$$|\det[\xi_1,\ldots,\xi_{l-1},v,\xi_{l+1},\ldots,\xi_n]| \geq \delta\beta/n.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольные векторы $\xi_j \in \mathbb{R}^n$, $j=\overline{1,n}$, удовлетворяющие условиям леммы 1, и индекс $l \in \{1,\ldots,n\}$ и предположим противное, что для всех векторов $v_i \in \mathbb{R}^n$, $i=\overline{1,n}$, определенных в лемме 1, выполняется обратное неравенство

$$|\det[\xi_1,\ldots,\xi_{l-1},v_i,\xi_{l+1},\ldots,\xi_n]| < \delta\beta/n. \qquad (3)$$

Из определения векторов $v_i \in \mathbb{R}^n$, $i=\overline{1,n}$, вытекает их линейная независимость, а ввиду равенства $\dim \mathbb{R}^n = n$ эти векторы образуют базис. Возьмем единичный вектор $\xi^\perp \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\xi^\perp \perp L(\xi_1,\ldots,\xi_{l-1},\xi_{l+1},\ldots,\xi_n)$, где множество $L(\xi_1,\ldots,\xi_{l-1},\xi_{l+1},\ldots,\xi_n) \subset \mathbb{R}^n$, как и всюду далее, будет обозначать линейную оболочку, натянутую на векторы $\xi_1,\ldots,\xi_{l-1},\xi_{l+1},\ldots,\xi_n \in \mathbb{R}^n$. Поскольку векторы v_i, $i=\overline{1,n}$, образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^n$, то справедливо разложение $\xi^\perp = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ с некоторыми коэффициентами $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Найдем оценки сверху на модули этих коэффициентов. Ввиду определения векторов v_i, $i=\overline{1,n}$, неравенства Адамара [5, с. 565] и простейших свойств определителя выполняются соотношения

$$\begin{aligned}1 &= \|\xi^\perp\|\|v_1\|\cdot\ldots\cdot\|v_{n-1}\| \\ &\geq |\det[\xi^\perp,v_1,\ldots v_{n-1}]| = |\det[\textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, v_1,\ldots,v_{n-1}]| = \\ &= |\alpha_1 \det[v_1,v_1,\ldots,v_{n-1}] + \ldots + \alpha_n \det[v_n,v_1,\ldots,v_{n-1}]| \\ &= |\alpha_n|\cdot|\det[v_n,v_1,\ldots,v_{n-1}]| \geq |\alpha_n|\beta,\end{aligned}$$

из которых следует неравенство $|\alpha_n| \leq 1/\beta$. Аналогичным образом находятся оценки для остальных коэффициентов $|\alpha_i| \leq 1/\beta$, $i=\overline{1,n-1}$.

Следовательно, выполняется неравенство $\sum_{i=1}^n |\alpha_i| \leq n/\beta$, из которого, ввиду определения векторов $\xi_i, \xi^\perp$, $i=\overline{1,n}$, оценки (3), а также простейших алгебраических и геометрических свойств определителя [10, с. 44], следуют соотношения

$$\begin{aligned}&|\det[\xi_1,\ldots,\xi_n]| = |\det[\xi_1,\ldots,\xi_{l-1},\xi_{l+1},\ldots,\xi_n,\xi_l]| = \\ &= \|\xi_1\|\cdot\|\xi_2\|\cdot\ldots\cdot\|\xi_{l-1}\|\cdot\|\xi_{l+1}\|\cdot\ldots\cdot\|\xi_n\|\cdot\|\xi_l\|\cdot \\ &\cdot|\sin\sphericalangle(\xi_1,\xi_2)|\cdot|\sin\sphericalangle(\xi_3,L(\xi_1,\xi_2))|\cdot\ldots\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot|\sin\sphericalangle(\xi_{l+1},L(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{l-1}))|\cdot\ldots\cdot\\
&\cdot|\sin\sphericalangle(\xi_n,L(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{l-1},\xi_{l+1},\ldots,\xi_{n-1}))|\cdot\\
&\cdot|\sin\sphericalangle(\xi_l,L(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{l-1},\xi_{l+1},\ldots,\xi_n))|\le\\
&\le\|\xi_1\|\cdot\|\xi_2\|\cdot\ldots\cdot\|\xi_{l-1}\|\cdot\|\xi_{l+1}\|\cdot\ldots\cdot\\
&\cdot\|\xi_n\|\cdot 1\cdot|\sin\sphericalangle(\xi_1,\xi_2)|\cdot|\sin\sphericalangle(\xi_3,L(\xi_1,\xi_2))|\cdot\ldots\cdot\\
&\cdot|\sin\sphericalangle(\xi_{l+1},L(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{l-1}))|\cdot\ldots\cdot\\
&\cdot|\sin\sphericalangle(\xi_n,L(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{l-1},\xi_{l+1},\ldots,\xi_{n-1}))|\cdot|\sin(\pi/2)|=\\
&=\|\xi_1\|\cdot\|\xi_2\|\cdot\ldots\cdot\|\xi_{l-1}\|\cdot\|\xi_{l+1}\|\cdot\ldots\cdot\\
&\cdot\|\xi_n\|\cdot\|\xi^{\perp}\|\cdot|\sin\sphericalangle(\xi_1,\xi_2)|\cdot|\sin\sphericalangle(\xi_3,L(\xi_1,\xi_2))|\cdot\ldots\cdot\\
&\cdot|\sin\sphericalangle(\xi_{l+1},L(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{l-1}))|\cdot\ldots\cdot\\
&\cdot|\sin\sphericalangle(\xi_n,L(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{l-1},\xi_{l+1},\ldots,\xi_{n-1}))|\cdot\\
&\cdot|\sin\sphericalangle(\xi^{\perp},L(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{l-1},\xi_{l+1},\ldots,\xi_n))|=\\
&=|\det[\xi_1,\ldots,\xi_{l-1},\xi_{l+1}\ldots,\xi_n,\xi^{\perp}]|=\\
&=|\det[\xi_1,\ldots,\xi_{l-1},\xi^{\perp},\xi_{l+1}\ldots,\xi_n]|=\\
&=|\det[\xi_1,\ldots,\xi_{l-1},\textstyle\sum_{i=1}^n\alpha_i\nu_i,\xi_{l+1}\ldots,\xi_n]|=\\
&=\left|\textstyle\sum_{i=1}^n\alpha_i\det[\xi_1,\ldots,\xi_{l-1},\nu_i,\xi_{l+1},\ldots,\xi_n]\right|\le\\
&\le\textstyle\sum_{i=1}^n|\alpha_i|\cdot|\det[\xi_1,\ldots,\xi_{l-1},\nu_i,\xi_{l+1},\ldots,\xi_n]|<\\
&<\delta\beta\textstyle\sum_{i=1}^n|\alpha_i|/n\le n\delta\beta/(\beta n)=\delta,
\end{aligned}
$$

которые приводят к противоречащему условиям леммы 1 неравенству $|\det[\xi_1,\ldots,\xi_n]|<\delta$.

Следовательно, для некоторого вектора $\nu\in\{\nu_1,\ldots,\nu_n\}\subset\mathbb{R}^n$ справедливо обратное оценке (3) соотношение $|\det[\xi_1,\ldots,\xi_{l-1},\nu,\xi_{l+1},\ldots,\xi_n]|\ge\delta\beta/n$. Поскольку же фиксированный индекс l взят произвольным образом из множества $\{1,\ldots,n\}$, то утверждение леммы 1 будет выполняться для любого $l\in\{1,\ldots,n\}$.

Лемма 1 доказана.

В дальнейшем для всех $j=\overline{1,n}$ через $\mathfrak{B}_j$ будем обозначать нормированные базисы, составленные из векторов $\nu_i(j)\in\mathbb{R}^n$, $i=\overline{1,n}$, т.е множества векторов

$$\mathfrak{B}_j=\left\{\nu_1(j),\nu_2(j),\ldots,\nu_n(j):\|\nu_i(j)\|=1,\ \nu_i(j)\in\mathbb{R}^n,\ i=\overline{1,n}\right\}.$$

Объемом системы векторов (базиса) $\mathfrak{B}=\{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n\}\subset\mathbb{R}^n$, следуя работе [11, с. 260–261], будем называть неотрицательное число, равное $|\det\mathfrak{B}|=|\det[\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n]|$.

Замечание 1. *Геометрически лемма 1 означает, что для любых двух нормированных базисов $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ пространства $\mathbb{R}^n$, имеющих достаточно большой объем, и всякого вектора $\nu_1\in\mathfrak{B}_1$ всегда найдется (хотя бы один) такой вектор $\nu_2\in\mathfrak{B}_2$, что при замене вектора ν_1 на ν_2 получившаяся из $\mathfrak{B}_1$ система векторов будет также являться нормированным базисом в $\mathbb{R}^n$ достаточно большого объема (зависящего от объемов базисов $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$).*

Замечание 2. *При доказательстве лемм и теорем, приведенных далее, в случае нахождения отдельных оценок, связанных с определителем системы векторов, мы часто будем пользоваться (так же, как при доказательстве леммы 1) геометрическим смыслом модуля определителя (объем системы векторов) и следующими из этого смысла соотношениями: для любых векторов $\xi_i\in\mathbb{R}^n$, $i=\overline{1,n}$, справедливы формула [10, с. 44]*

$$
\begin{aligned}
&|\det[\xi_1,\xi_2\ldots,\xi_n]|=\\
&=\|\xi_1\|\cdot\|\xi_2\|\cdot\ldots\cdot\|\xi_n\|\cdot|\sin\sphericalangle(\xi_1,\xi_2)|\cdot|\sin\sphericalangle(\xi_3,L(\xi_1,\xi_2))|\cdot\ldots\cdot\\
&\cdot|\sin\sphericalangle(\xi_n,L(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-1}))|
\end{aligned}
$$

(здесь $L(\xi_1,\ldots,\xi_i)$ суть линейная оболочка, натянутая на векторы $\xi_1,\ldots,\xi_i$) и вытекающие из нее очевидным образом оценка $|\det[\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n]|\le\|\xi_1\|\cdot\|\xi_2\|\cdot\ldots\cdot\|\xi_n\|\cdot|\sin\sphericalangle(\xi_1,\xi_2)|$ и неравенство (неравенство Адамара [5, с. 565]) $|\det[\xi_1,\xi_2\ldots,\xi_n]|\le\|\xi_1\|\cdot\|\xi_2\|\cdot\ldots\cdot\|\xi_n\|$.

Теорема 1. *Пусть для произвольного числа $\delta_0\in(0,1]$ даны единичные векторы $\vartheta_1,\vartheta_2,\ldots,\vartheta_n\in\mathbb{R}^n$, что имеет место оценка $\det[\vartheta_1,\vartheta_2,\ldots,\vartheta_n]\ge\delta_0$. Тогда при любом числе $\beta\in(0,1]$ в каждой из n совокупностей единичных векторов $\nu_1^{(i)},\nu_2^{(i)},\ldots\nu_n^{(i)}\in\mathbb{R}^n$, $i=\overline{1,n}$, удовлетворяющих неравенству $\det[\nu_1^{(i)},\nu_2^{(i)},\ldots\nu_n^{(i)}]\ge\beta$, найдется по крайней мере по одному вектору $w^{(i)}\in\{\nu_j^{(i)},\ j=\overline{1,n}\}$, при которых выполняются соотношения*

$$
\begin{gathered}
|\det[w^{(1)},\vartheta_2,\vartheta_3,\ldots,\vartheta_n]|\ge\delta_0(\beta/n)^n=:\delta_n,\\
|\det[w^{(1)},w^{(2)},\vartheta_3,\ldots,\vartheta_n]|\ge\delta_n,\\
\ldots,\quad|\det[w^{(1)},w^{(2)},w^{(3)},\ldots,w^{(n)}]|\ge\delta_n.
\end{gathered}
$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем n произвольных совокупностей n векторов $\{\nu_j^{(i)},\ j=\overline{1,n}\}$, $i=\overline{1,n}$, удовлетворяющих условиям теоремы 1. Для нахождения описанных в формулировке этой теоремы векторов $w^{(i)}$, $i=\overline{1,n}$, воспользуемся леммой 1. Возьмем вначале в качестве векторов ξ_i, $i=\overline{1,n}$, леммы 1 векторы ϑ_i, $i=\overline{1,n}$, удовлетворяющие условиям теоремы 1, а в качестве векторов v_i – векторы первой совокупности, т.е. векторы $v_i^{(1)}$, $i=\overline{1,n}$. Тогда из неравенства $\det[\vartheta_1,\vartheta_2,\ldots,\vartheta_n]\geq\delta_0$ и определения векторов ξ_i и $v_i^{(1)}$, $i=\overline{1,n}$, следует, что для этих векторов выполняются условия леммы 1. Поэтому среди векторов $v_i^{(1)}$, $i=\overline{1,n}$, найдется хотя бы один такой вектор $w^{(1)}$, при котором справедливы соотношения

$$|\det[w^{(1)},\vartheta_2,\ldots,\vartheta_n]|\geq\delta_0\beta/n. \qquad (4)$$

Для всех $i=\overline{1,n-1}$ положим $\delta_i:=\delta_0(\beta/n)^i$. Тогда отсюда в силу верных для любого $i=\overline{1,n}$ неравенств $\beta^{n-i}<1\leq n^{n-i}$, вытекающих из включений $\beta\in(0,1]$ и $n\in\mathbb{N}$, получим оценки

$$\delta_n=\delta_0(\beta/n)^n\leq\delta_0(\beta/n)^i=\delta_i,\quad i=\overline{1,n}, \qquad (5)$$

из которых, ввиду неравенства (4), следуют соотношения

$$|\det[w^{(1)},\vartheta_2,\ldots,\vartheta_n]|\geq\delta_0\cdot\beta/n=\delta_1\geq\delta_n, \qquad (6)$$

устанавливающие первую оценку теоремы 1.

Для доказательства второй оценки теоремы 1 вновь воспользуемся леммой 1. Возьмем теперь в качестве векторов ξ_i, $i=\overline{1,n}$, леммы 1 последовательность единичных векторов $w^{(1)}$, $\vartheta_2,\ldots,\vartheta_n$, а в качестве векторов v_i – векторы $v_i^{(2)}$ второй совокупности. В силу определения $v_i^{(2)}$, $i=\overline{1,n}$, и неравенства (6) легко видеть, что для выбранных последовательностей векторов выполняются все условия леммы 1. Поэтому среди $v_i^{(2)}$, $i=\overline{1,n}$, найдется по крайней мере один такой вектор $w^{(2)}$, что имеют место соотношения

$$|\det[w^{(1)},w^{(2)},\vartheta_3\ldots,\vartheta_n]|\geq\beta\delta_1/n=\delta_0\cdot(\beta/n)^2=\delta_2\geq\delta_n.$$

Последняя оценка в этих соотношениях следует из формулы (5). Таким образом, второе неравенство теоремы 1 также доказано.

Далее, на третьем шаге доказательства, взяв в качестве векторов ξ_i, $i=\overline{1,n}$, последовательность $w^{(1)}$, $w^{(2)}$, $\vartheta_3\ldots,\vartheta_n$, а в качестве векторов v_i – векторы $v_i^{(3)}$ третьей совокупности и рассуждая аналогичным вышеприведенному образом, найдем среди векторов $v_i^{(3)}$, $i=\overline{1,n}$, хотя бы один такой вектор $w^{(3)}$, при котором выполняется оценка

$$|\det[w^{(1)},w^{(2)},w^{(3)},\vartheta_4,\ldots,\vartheta_n]|\geq$$
$$\geq\beta\delta_2/n=\delta_0\cdot(\beta/n)^3=\delta_3\geq\delta_n.$$

Продолжая таким образом рассуждения, на n-ом шаге доказательства будем уже иметь последовательность из найденных на предыдущих шагах таких единичных векторов $w^{(1)},w^{(2)},\ldots,w^{(n-1)}$, принадлежащих соответственно совокупностям векторов $\{v_i^{(1)}\}$, $\{v_i^{(2)}\}$, ..., $\{v_i^{(n-1)}\}$, $i=\overline{1,n}$, при которых справедливы оценки

$$|\det[w^{(1)},\vartheta_2,\ldots,\vartheta_n]|\geq\delta_n,$$
$$|\det[w^{(1)},w^{(2)},\vartheta_3,\ldots,\vartheta_n]|\geq\delta_n,\quad\ldots,$$
$$|\det[w^{(1)},w^{(2)},\ldots,w^{(n-1)},\vartheta_n]|\geq\beta\delta_{n-2}/n=$$
$$=\delta_0\cdot(\beta/n)^{n-1}=\delta_{n-1}\geq\delta_n.$$

Взяв в качестве ξ_i, $i=\overline{1,n}$, единичные векторы $w^{(1)}$, $w^{(2)}$, ..., $w^{(n-1)}$, ϑ_n, а в качестве векторов v_i – векторы n-ой совокупности, т.е. векторы $v_i^{(n)}$, $i=\overline{1,n}$, которые, очевидно, удовлетворяют условиям леммы 1, и воспользовавшись этой леммой, найдем среди векторов $v_i^{(n)}$, $i=\overline{1,n}$, такой вектор $w^{(n)}$, при котором выполняются соотношения

$$|\det[w^{(1)},w^{(2)},\ldots,w^{(n-1)},w^{(n)}]|\geq$$
$$\geq\delta_{n-1}\beta/n=\delta_0\cdot(\beta/n)^n=\delta_n.$$

Таким образом, построенная совокупность векторов $w^{(1)}$, $w^{(2)}$, ..., $w^{(n-1)}$, $w^{(n)}\in\mathbb{R}^n$ удовлетворяет всем указанным в теореме 1 условиям и поэтому является искомой. Теорема 1 доказана.

Замечание 3. *Если для векторов* $w^{(i)}$, $i=\overline{1,n}$, *описанных в теореме 1, положить*

$$w_i:=\operatorname{sign}(\det[w_1,w_2,\ldots,w_{i-1},w^{(i)},\vartheta_{i+1},\ldots,\vartheta_n])w^{(i)},\quad i=\overline{1,n},$$

то на основании этой же теоремы получим неравенства

$$\det[w_1,\vartheta_2,\vartheta_3,\ldots,\vartheta_n]\geq\delta_n,\quad\det[w_1,w_2,\vartheta_3,\ldots,\vartheta_n]\geq\delta_n,$$
$$\ldots,\quad\det[w_1,w_2,w_3,\ldots,w_n]\geq\delta_n.$$

Замечание 4. *Геометрически теорема 1 означает, что для нормированного базиса* $\mathfrak{B}=\{\vartheta_1,\vartheta_2,\ldots,\vartheta_n\}\subset\mathbb{R}^n$ *и упорядоченной последовательности из* n *любых нормированных базисов* $\mathfrak{B}_i\subset\mathbb{R}^n$, $i=\overline{1,n}$, *(достаточно больших объемов) в каждом из них всегда найдется по* *одному вектору* $v_{j_i}^{(i)} \in \mathfrak{B}_i$, $j_i \in \{1,\ldots,n\}$, *что при последовательной замене каждого из векторов* ϑ_i *на* $v_{j_i}^{(i)} \in \mathfrak{B}_i$, $i=\overline{1,n}$, *получившиеся из исходного* $\mathfrak{B}$ *базиса системы векторов*

$$\mathfrak{B}_i' = \{v_{j_1}^{(1)}, v_{j_2}^{(2)}, \ldots, v_{j_k}^{(k)}, \vartheta_{k+1}, \ldots, \vartheta_n\},$$

$$j_k \in \{1,\ldots,n\}, \quad k=\overline{1,n},$$

будут также являться нормированными базисами в $\mathbb{R}^n$ *достаточно больших объемов (однако, возможно, противоположной исход-ному базису* $\mathfrak{B}$ *ориентации).*

Следствие 1. *Матрицы*

$$P_0 := [\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n], \ P_1 := [w_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n],$$

$$P_2 := [w_1, w_2, \vartheta_3, \ldots, \vartheta_n], \ \ldots, \ P_n := [w_1, w_2, \ldots, w_n],$$

в которых векторы ϑ_i *и* w_i, $i=\overline{1,n}$, *определяются теоремой 1 и замечанием 3, образуют в пространстве* $n \times n$*-матриц* δ_n*-легальный маршрут относительно последовательности векторов* e_i, $i=\overline{1,n}$, *соединяющий точки* P_0 *и* P_n.

Доказательство следствия 1 вытекает непосредственно из оценок $\det P_i \geq \delta_n$, установленных в замечании 3, и очевидных соотношений $P_i - P_{i-1} = e_i \cdot (w_i - \vartheta_i)^T$.

Лемма 2. *При любых числах* $0 < \delta \leq 1$ *и* $0 < \varphi < \delta/2$, *произвольных единичных векторах* $\xi_i \in \mathbb{R}^n$, $i=\overline{1,n}$, *таких, что имеет место оценка* $|\det[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]| \geq \delta$, *если для единичного вектора* $\xi_k' \in \mathbb{R}^n$ *выполняется неравенство* $\sphericalangle(\xi_k', \xi_k) \leq \varphi$ *при некотором* $k \in \{1,\ldots,n\}$, *то справедливо соотношение*

$$|\det[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_k', \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n]| \geq \delta/2.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольные числа δ, φ и векторы $\xi_i \in \mathbb{R}^n$, $i=\overline{1,n}$, удовлетворяющие условиям леммы 2. Возьмем такой единичный вектор $\xi_k' \in \mathbb{R}^n$, что для некоторого $k \in \{1,\ldots,n\}$ выполняется оценка $\sphericalangle(\xi_k', \xi_k) \leq \varphi$. Пусть $\omega := \xi_k - \xi_k'$. Из последней оценки, неравенства $\sin\psi \leq \psi$, верного для любого $0 < \psi \leq \pi/2$, убывания функции cos на промежутке $[0, \pi/2]$, определений величин φ и δ, векторов ω, ξ_k', ξ_k, а также скалярного произведения векторов следуют соотношения

$$\|\omega\|^2 = \|\xi_k - \xi_k'\|^2 = \|\xi_k\|^2 +$$

$$+ \|\xi_k'\|^2 - 2\|\xi_k\| \cdot \|\xi_k'\| \cdot \cos\sphericalangle(\xi_k, \xi_k') = 1^2 +$$

$$+ 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos\sphericalangle(\xi_k, \xi_k') \leq 2 - 2\cos\varphi =$$

$$= 4\sin^2(\varphi/2) \leq 4(\varphi/2)^2 = \varphi^2,$$

т.е. $\|\omega\| \leq \varphi < \delta/2$. Отсюда с учетом определения векторов ω и ξ_i, $i=\overline{1,n}$, замечания 2 и простейших свойств определителя вытекают соотношения

$$\delta \leq |\det[\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots, \xi_n]| =$$

$$= |\det[\xi_1, \ldots, \xi_k', \ldots, \xi_n] + \det[\xi_1, \ldots, \omega, \ldots, \xi_n]| \leq$$

$$\leq |\det[\xi_1, \ldots \xi_{k-1}, \xi_k', \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n]| +$$

$$+ \|\xi_1\| \cdot \ldots \cdot \|\xi_{k-1}\| \cdot \|\omega\| \cdot \|\xi_{k+1}\| \cdot \ldots \cdot \|\xi_n\| \leq$$

$$\leq |\det[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_k', \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n]| + \delta/2,$$

из которых следует требуемое неравенство. Лемма 2 доказана.

Замечание 5. *Лемма 2 представляет собой обобщение на* n*-мерный случай леммы 10 работы [8].*

Замечание 6. *Геометрически лемма 2 означает, что при «отклонении» одного из векторов нормированного базиса на достаточно ма́лую угловую меру (т.е. при замене одного из векторов нормированного базиса на единичный вектор, лежащий вместе с заменяемым вектором в конусе достаточно ма́лой угловой меры) получим новую систему векторов, которая будет также являться базисом, причем ее объем изменится незначительно по сравнению с объемом исходного базиса.*

В дальнейшем при построении легального маршрута, работая с векторами различных нормированных базисов пространства $\mathbb{R}^n$, будем считать выполнимыми следующие операции над этими векторами:

1) растяжение (сжатие) любого из векторов (т.е. умножение вектора на вещественное, отличное от нуля, число);

2) замена любого вектора каждого из базисов на такие два единичных вектора пространства $\mathbb{R}^n$, которые «отклоняются» от заменяемого вектора на достаточно ма́лую угловую меру (т.е. лежат вместе с заменяемым вектором в конусе достаточно ма́лой угловой меры) и некоторая линейная комбинация которых дает заменяемый вектор.

Правомерность введения и выполнимости этих операций над векторами нормированных базисов пространства $\mathbb{R}^n$ следует из возможности их введения и обоснования при решении одной из задач теории управления асимптотическими инвариантами – задачи глобального управления показателей Ляпунова (напр., для двумерного случая см. леммы 2–5 работы [6]).

Для произвольных ненулевого вектора $h \in \mathbb{R}^n$ и вещественных чисел $0 < \beta, \delta \le 1$ положим

$$\alpha(h,\beta,\delta) := [2^{3n+2} \cdot n \cdot (\| h \| + 1) \cdot (n/\beta)^{2n}] / \delta^2,$$
$$\gamma(h,\beta,\delta) := [(2n/\beta)^n \cdot (\| h \| + 1)] / \delta,$$
$$\Delta(h,\beta,\delta) := 2^n \cdot \gamma(h,\beta,\delta) \cdot \min\{1, \| h \|\}.$$

Теорема 2. *Зафиксируем произвольные числа* $0 < \beta, \delta \le 1$. *Пусть заданы* n *единичных векторов* $\nu_1, \ldots, \nu_n \in \mathbb{R}^n$ *и* n *нормированных базисов*

$$\mathfrak{B}_i = \left\{ w_1(i), w_2(i), \ldots, w_n(i) : \| w_j(i) \| = 1,\ w_j(i) \in \mathbb{R}^n, j = \overline{1,n} \right\},$$
$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

пространства $\mathbb{R}^n$, *удовлетворяющих неравенствам*

$$\det P_0 := \det[\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n] \ge \delta,$$
$$|\det \mathfrak{B}_i| = |\det[w_1(i), w_2(i), \ldots, w_n(i)]| \ge \beta, \qquad i = \overline{1,n}.$$

Тогда для любого вектора $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0, \nu_n\}$, *сонаправленного с* ν_n, *и каждого* $i = \overline{1,n}$ *найдутся такие единичные векторы* $w_i^0 \in \mathfrak{B}_i$, *что для любых векторов* $w_i, w_i' \in \mathbb{R}^n$, *удовлетворяющих условиям*

$$\begin{gathered} w_i^0 \in L(w_i, w_i') \subset \mathbb{R}^n, \quad \| w_i \| = \| w_i' \| = 1, \quad \sphericalangle(w_i^0, w_i) \le \varphi, \\ \sphericalangle(w_i^0, w_i') \le \varphi, \quad \sphericalangle(w_i, w_i') \le \varphi, \quad i = \overline{1,n}, \end{gathered} \tag{7}$$

существуют такие числа $\alpha_i' \in \mathbb{R}$, $|\alpha_i'| \le \gamma(h,\beta,\delta) =: \gamma$, *что выполняется равенство*

$$h - \nu_n = \alpha_1' w_1' + \alpha_2' w_2' + \ldots + \alpha_n' w_n'. \tag{8}$$

Кроме того, если при этом имеет место оценка

$$\varphi \le \arcsin(1/\alpha), \quad \text{где} \quad \alpha := \alpha(h,\beta,\delta), \tag{9}$$

то также найдутся и такие числа $\sigma_i \in \{1,2\}$, $i = \overline{1,n}$, *при которых справедливы соотношения*

$$\begin{gathered} \det P_1 := \\ = \det[\nu_1 + (-1)^{\sigma_1} \alpha w_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-1}, \nu_n] \ge \Delta(h,\beta,\delta) =: \Delta, \\ \det P_2 := \\ = \det[\nu_1 + (-1)^{\sigma_1} \alpha w_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-1}, \nu_n + \alpha_1' w_1'] \ge \Delta, \\ \det P_3 := \det[\nu_1 + (-1)^{\sigma_1} \alpha w_1, \nu_2 + \\ +(-1)^{\sigma_2} \alpha w_2, \ldots, \nu_{n-1}, \nu_n + \alpha_1' w_1'] \ge \Delta, \\ \det P_4 := \det[\nu_1 + (-1)^{\sigma_1} \alpha w_1, \nu_2 + \\ +(-1)^{\sigma_2} \alpha w_2, \ldots, \nu_{n-1}, \nu_n + \alpha_1' w_1' + \alpha_2' w_2'] \ge \Delta, \quad \ldots, \\ \det P_{2n-1} := \det[\nu_1 + (-1)^{\sigma_1} \alpha w_1, \nu_2 + \\ + (-1)^{\sigma_2} \alpha w_2, \ldots, \nu_{n-1} + (-1)^{\sigma_{n-1}} \alpha w_{n-1}, \nu_n + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' w_i'] = \\ = \det[\nu_1 + (-1)^{\sigma_1} \alpha w_1, \nu_2 + \\ +(-1)^{\sigma_2} \alpha w_2, \ldots, \nu_{n-1} + (-1)^{\sigma_{n-1}} \alpha w_{n-1}, h] \ge \Delta. \end{gathered} \tag{10}$$

Доказательство. Зафиксируем совокупности векторов $\{w_j(i), j = \overline{1,n}\} \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $\nu_i \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1,n}$, удовлетворяющие условиям теоремы 2. Тогда, очевидно, для них будет справедлива теорема 1, воспользовавшись которой, найдем среди векторов последовательности $w_j(1)$, $j = \overline{1,n}$, такой вектор w_1^0, что выполняется неравенство $|\det[w_1^0, \nu_2, \ldots, \nu_n]| \ge \delta(\beta/n)^n =: \beta_1 \in (0,1)$; среди векторов $w_j(2)$, $j = \overline{1,n}$, – такой вектор w_2^0, что справедлива оценка $|\det[w_1^0, w_2^0, \nu_3, \ldots, \nu_n]| \ge \beta_1$; ...; среди векторов совокупности $w_j(n)$ найдем такой вектор w_n^0, при котором имеет место соотношение $|\det[w_1^0, w_2^0, \ldots, w_n^0]| \ge \beta_1$. Таким образом, при любом $i = \overline{1,n}$ для векторов w_i^0 выполняется оценка

$$|\det[w_1^0, w_2^0, \ldots, w_i^0, \nu_{i+1}, \ldots, \nu_n]| \ge \beta_1. \tag{11}$$

Возьмем произвольный ненулевой вектор $h \in \mathbb{R}^n$, для которого справедливы соотношения $h = \| h \| \cdot \nu_n$ и $\| h \| \ne 1$. Очевидно, что $h \uparrow\uparrow \nu_n$. Положим

$$\alpha := \alpha(h,\beta,\delta) = 2^{3n+2} n(\| h \| + 1)(n/\beta)^{2n} / \delta^2$$

и зафиксируем произвольное число

$$0 < \varphi \le \arcsin(1/\alpha).$$

Из неравенств $n \ge 1$ и $0 < \beta, \delta < 1$ непосредственно следует соотношение $\alpha > 1$. Поэтому для величины φ справедлива оценка $0 < \varphi < \pi/2$.

Для каждого $i = \overline{1,n}$ возьмем такие произвольные векторы w_i и $w_i' \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие соотношениям (7), некоторая линейная комбинация которых образует вектор w_i^0. Зафиксируем эти векторы. Ввиду определения величин α, β, β_1, φ, оценки (9), а также возрастания функции arcsin на отрезке $[0,1]$, для всякого $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеют место оценки

$$\begin{gathered} \varphi \le \arcsin(\delta^2 \beta^{2n} / (2^{3n+2} n^{2n+1} (\| h \| + 1))) \le \\ \le \arcsin(\delta(\beta/2n)^n) = \\ = \arcsin(\beta_1 / 2^n) \le \arcsin(\beta_1 / 2^i) \le \beta_1 / 2^i. \end{gathered}$$

Отсюда и из неравенств (7) при любом $i=\overline{1,n}$ для векторов w_i, w_i' и w_i^0 следуют оценки

$$\measuredangle(w_i^0,w_i)\le\varphi\le\beta_1/2^i \text{ и } \measuredangle(w_i^0,w_i')\le\varphi\le\beta_1/2^i,$$

из которых, применяя лемму 2, получим следующие цепочки неравенств:

$$|\det[w_1^0,v_2,\ldots,v_n]|\ge\beta_1,\quad |\det[w_1,v_2,\ldots,v_n]|\ge\beta_1/2;$$
$$|\det[w_1^0,v_2,\ldots,v_n]|\ge\beta_1,\quad |\det[w_1',v_2,\ldots,v_n]|\ge\beta_1/2;$$
$$|\det[w_1^0,w_2^0,v_3,\ldots,v_n]|\ge\beta_1,$$
$$|\det[w_1,w_2^0,v_3,\ldots,v_n]|\ge\beta_1/2,$$
$$|\det[w_1,w_2,v_3,\ldots,v_n]|\ge\beta_1/2^2;$$
$$|\det[w_1^0,w_2^0,v_3,\ldots,v_n]|\ge\beta_1,$$
$$|\det[w_1',w_2^0,v_3,\ldots,v_n]|\ge\beta_1/2,$$
$$|\det[w_1',w_2',v_3,\ldots,v_n]|\ge\beta_1/2^2;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|\det[w_1^0,w_2^0,\ldots,w_n^0]|\ge\beta_1,$$
$$|\det[w_1,w_2^0,\ldots,w_n^0]|\ge\beta_1/2,\ldots,$$
$$|\det[w_1,w_2,w_3,\ldots,w_n]|\ge\beta_1/2^n;$$
$$|\det[w_1^0,w_2^0,\ldots,w_n^0]|\ge\beta_1,$$
$$|\det[w_1',w_2^0,\ldots,w_n^0]|\ge\beta_1/2,\ldots,$$
$$|\det[w_1',w_2',w_3',\ldots,w_n']|\ge\beta_1/2^n.$$

Таким образом, для взятых векторов w_i и w_i' справедливы оценки

$$|\det[w_1',w_2',\ldots,w_n']|\ge\beta_1/2^n, \tag{12}$$
$$|\det[w_1,w_2,\ldots,w_i,v_{i+1},\ldots,v_n]|\ge\beta_1/2^n,\quad i=\overline{1,n}. \tag{13}$$

Неравенство (12) говорит о том, что векторы $w_i'\in\mathbb{R}^n$, $i=\overline{1,n}$, образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^n$, а поскольку $(h-v_n)\in\mathbb{R}^n$, найдутся такие числа α_i', что справедливо разложение

$$h-v_n=\alpha_1'w_1'+\alpha_2'w_2'+\ldots+\alpha_n'w_n'. \tag{14}$$

Кроме того, так как выполняются оценки (12), то по формулам Крамера для всех $i=\overline{1,n}$ получим равенства

$$\alpha_i'=\det[w_1',w_2',\ldots,w_{i-1}',h-v_n,w_{i+1}',\ldots,w_n']:$$
$$:\det[w_1',w_2',\ldots,w_{i-1}',w_i',w_{i+1}',\ldots,w_n'],$$

из которых, ввиду неравенств Адамара [5, с. 565] и (12), а также определения векторов v_n, w_i', $i=\overline{1,n}$, и величины β_1, следуют оценки

$$|\alpha_i'|\le\|h-v_n\|\prod_{j=1,n,\,j\ne i}\|w_j'\|:$$
$$:|\det[w_1',w_2',\ldots,w_{i-1}',w_i',w_{i+1}',\ldots,w_n']|\le$$
$$\le 2^n(\|h\|+\|v_n\|)/\beta_1=2^n(\|h\|+1)/\beta_1=$$
$$=[(2n/\beta)^n(\|h\|+1)]/\delta=$$
$$=\gamma(h,\beta,\delta)=:\gamma,\quad i=\overline{1,n}. \tag{15}$$

Для произвольных действительных чисел α_i, $i=\overline{1,n-1}$, обозначим через G_{kj}, $j=\overline{1,k}$, $k=\overline{2,n-1}$, матрицы вида

$$G_{kj}=[w_1,\ldots,w_{j-1},v_j,v_{j+1}+\alpha_{j+1}w_{j+1},\ldots,v_k+$$
$$+\alpha_kw_k,v_{k+1},\ldots,v_{n-1},v_n+\alpha_1'w_1'+\ldots+\alpha_{k-1}'w_{k-1}'].$$

При любых $k=\overline{2,n-1}$ и $j=\overline{1,k}$ найдем оценку сверху на модуль определителя матрицы G_{kj}, используя замечание 2, определения векторов v_i, w_i и w_i', а также неравенства (15) для величин α_i',

$$|\det G_{kj}|=|\det[w_1,\ldots,w_{j-1},v_j,v_{j+1}+\alpha_{j+1}w_{j+1},\ldots,$$
$$v_k+\alpha_kw_k,v_{k+1},v_{k+2},\ldots,v_{n-1},v_n+$$
$$+\alpha_1'w_1'+\ldots+\alpha_{k-1}'w_{k-1}']|\le$$
$$\le\left(\prod_{i=1}^{j-1}\|w_i\|\right)\cdot\|v_j\|\cdot\left(\prod_{i=j+1}^{k}\|v_i+\alpha_iw_i\|\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\prod_{i=k}^{n-1}\|v_i\|\right)\cdot\|v_n+\alpha_1'w_1'+\ldots+\alpha_{k-1}'w_{k-1}\|\le$$
$$\le\left(\prod_{i=j+1}^{k}(\|v_i\|+|\alpha_i|\cdot\|w_i\|)\right)\cdot$$
$$\cdot(\|v_n\|+|\alpha_1'|\cdot\|w_1'\|+\ldots+|\alpha_{n-1}'|\cdot\|w_{n-1}'\|)\le$$
$$\le\left(\prod_{i=j+1}^{k}(1+|\alpha_i|)\right)\cdot(1+(n-1)\gamma),$$
$$j=\overline{1,k},\quad k=\overline{2,n-1}. \tag{16}$$

Введем в рассмотрение матрицы

$$P_1:=[v_1+\alpha_1w_1,v_2,\ldots,v_{n-1},v_n],$$
$$P_3:=[v_1+\alpha_1w_1,v_2+\alpha_2w_2,\ldots,v_{n-1},v_n+\alpha_1'w_1'],\quad\ldots,$$
$$P_{2k-1}:=[v_1+\alpha_1w_1,v_2+\alpha_2w_2,\ldots,v_k+$$
$$+\alpha_kw_k,v_{k+1},\ldots,v_{n-1},v_n+\alpha_1'w_1'+\ldots+\alpha_{k-1}'w_{k-1}'],$$
$$\ldots,\quad P_{2n-3}:=[v_1+\alpha_1w_1,v_2+\alpha_2w_2,\ldots,v_{n-1}+$$
$$+\alpha_{n-1}w_{n-1},v_n+\alpha_1'w_1'+\ldots+\alpha_{n-2}'w_{n-2}'],$$

в которых числа α_i, $i=\overline{1,n-1}$, определим ниже, и покажем, что для некоторого $\Delta>0$ при любом $k=\overline{1,n-1}$ выполняется неравенство $\det P_{2k-1}\ge\Delta$.

Положим $\alpha_0:=1$, тогда, ввиду определения матриц G_{kj} и простейших свойств определителя, для всех $k=\overline{1,n-1}$ имеем равенства

$$\det P_{2k-1} :=$$
$$= \det[v_1 + \alpha_1 w_1, v_2 + \alpha_2 w_2, \ldots, v_k +$$
$$+ \alpha_k w_k, v_{k+1}, \ldots, v_{n-1}, v_n + \alpha_1' w_1' + \ldots + \alpha_{k-1}' w_{k-1}'] =$$
$$= \det[v_1, v_2 + \alpha_2 w_2, \ldots, v_k + \alpha_k w_k, v_{k+1}, \ldots, v_{n-1}, v_n +$$
$$+ \alpha_1' w_1' + \ldots + \alpha_{k-1}' w_{k-1}'] +$$
$$+ \alpha_1 \det[w_1, v_2 + \alpha_2 w_2, \ldots, v_k + \alpha_k w_k, v_{k+1}, \ldots, v_{n-1}, v_n +$$
$$+ \alpha_1' w_1' + \ldots + \alpha_{k-1}' w_{k-1}'] =$$
$$= \det G_{k1} + \alpha_1 (\det[w_1, v_2, v_3 + \alpha_3 w_3, \ldots, v_k +$$
$$+ \alpha_k w_k, v_{k+1}, \ldots, v_{n-1}, v_n + \alpha_1' w_1' + \ldots + \alpha_{k-1}' w_{k-1}'] +$$
$$+ \alpha_2 \det[w_1, w_2, v_3 + \alpha_3 w_3, \ldots, v_k +$$
$$+ \alpha_k w_k, v_{k+1}, \ldots, v_{n-1}, v_n + \alpha_1' w_1' + \ldots + \alpha_{k-1}' w_{k-1}']) =$$
$$= \alpha_0 \det G_{k1} + \alpha_0 \alpha_1 \det G_{k2} +$$
$$+ \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \det[w_1, w_2, v_3 + \alpha_3 w_3, \ldots, v_k + \alpha_k w_k, v_{k+1},$$
$$\ldots, v_{n-1}, v_n + \alpha_1' w_1' + \ldots + \alpha_{k-1}' w_{k-1}'] = \ldots =$$
$$= \alpha_0 \det G_{k1} + \alpha_0 \alpha_1 \det G_{k2} + \ldots + \left(\prod_{i=0}^{k-1} \alpha_i\right) \cdot \det G_{kk} +$$
$$+ \left(\prod_{i=0}^{k} \alpha_i\right) \cdot \det[w_1, w_2, w_3, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_{n-1}, v_n +$$
$$+ \alpha_1' w_1' + \ldots + \alpha_{k-1}' w_{k-1}'] =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \left[\left(\prod_{j=0}^{i-1} \alpha_j\right) \cdot \det G_{ki}\right] +$$
$$+ \left(\prod_{i=0}^{k} \alpha_i\right) \cdot \Big(\det[w_1, w_2, w_3, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_{n-1}, v_n] +$$
$$+ \sum_{j=1}^{k-1} \Big(\alpha_j' \cdot \det[w_1, w_2, w_3, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_{n-1}, w_j']\Big)\Big). \quad (17)$$

При каждом $k = \overline{1, n-1}$ положим $\alpha_k := (-1)^{\sigma_k} \alpha$, где величина $\alpha := \alpha(h, \beta, \delta)$, а число $\sigma_k \in \{1, 2\}$ таково, что выполняются соотношения

$$\left(\prod_{i=1}^{k} \alpha_i\right) \cdot \det[w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_n] = \quad (18)$$
$$= \alpha^k \cdot \det[w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_n] > 0$$

(строгое неравенство будет выполняться ввиду формулы (13) и определения α).

Используя замечание 2, оценки (7), (9), (13), (15), (16) и $\alpha > 1$, соотношение (18), равенства $\alpha_0 = \| w_i \| = \| v_i \| = \| w_i' \| = 1$, верное для любого $k \in \mathbb{N}$ неравенство $k - 1 < 2^k$, формулу суммы геометрической прогрессии, а также определение величин α_i, $i = \overline{1, n-1}$, γ и φ, для всех $k = \overline{1, n-1}$ оценим снизу определитель $\det P_{2k-1}$:

$$\det P_{2k-1} \geq -\left|\sum_{i=1}^{k} \left[\left(\prod_{j=0}^{i-1} \alpha_j\right) \cdot \det G_{ki}\right]\right| +$$
$$+ \left(\prod_{i=0}^{k} \alpha_i\right) \cdot \Big(\det[w_1, w_2, w_3, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_{n-1}, v_n] -$$
$$- \sum_{j=1}^{k-1} \Big(|\alpha_j'| \cdot |\det[w_1, w_2, w_3, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_{n-1}, w_j']|\Big)\Big) \geq$$
$$\geq -\sum_{i=1}^{k} |\alpha^{i-1} \cdot \det G_{ki}| +$$
$$+ \alpha^k \det[w_1, w_2, w_3, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_{n-1}, v_n] -$$
$$- \alpha^k \sum_{i=1}^{k-1} \Big(|\alpha_i'| \cdot \| w_i' \| \cdot \| w_i \| \cdot |\sin \sphericalangle(w_i, w_i')| \cdot$$
$$\cdot \left(\prod_{j=\overline{1,k},\, j \neq i} \| w_j \|\right) \cdot \left(\prod_{j=k+1}^{n-1} \| v_j \|\right)\Big) \geq$$
$$\geq -\sum_{i=1}^{k} \alpha^{i-1} (1 + \alpha)^{k-i} \cdot (1 + (n-1)\gamma) +$$
$$+ \alpha^k \det[w_1, w_2, w_3, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_{n-1}, v_n] - \alpha^k \cdot$$
$$\cdot \left(\sum_{i=1}^{k-1} |\alpha_i'|\right) \cdot |\sin \varphi| \geq$$
$$\geq -\sum_{i=1}^{k} \alpha^{i-1} (2\alpha)^{k-i} \cdot (1 + (n-1)\gamma) +$$
$$+ \alpha^k \beta_1 / 2^n - \alpha^k \cdot (k-1)\gamma \cdot |\sin \varphi| \geq$$
$$\geq -\alpha^{k-1} (1 + (n-1)\gamma) \sum_{i=1}^{k} 2^{k-i} + \alpha^k \beta_1 / 2^n - (k-1) \alpha^{k-1} \gamma =$$
$$= \alpha^{k-1} \cdot \Big(-(1 + (n-1)\gamma) 2^{k-1} (1 - (1/2)^k) / (1 - 1/2)$$
$$+ \alpha \beta_1 / 2^n - (k-1)\gamma\Big) \geq$$
$$\geq \alpha^{k-1} \cdot \Big(\alpha \beta_1 / 2^n - 2^k (1 + (n-1)\gamma) - (k-1)\gamma\Big) \geq$$
$$\geq \alpha^{k-1} \cdot \Big(\alpha \beta_1 / 2^n - 2^k (1 + (n-1)\gamma) - 2^k \gamma\Big) =$$
$$= \alpha^{k-1} (\alpha \beta_1 / 2^n - 2^k (1 + n\gamma)).$$

Поскольку

$$\alpha = 2^{3n+2} n (\| h \| + 1)(n/\beta)^{2n} / \delta^2 = 4^{n+1} n\gamma / \beta_1 > 1$$

в силу определений величин α, β, β_1 и γ, то, ввиду неравенств $\gamma > 1$ и $n \geq 1$, для всех $k = \overline{1, n}$ имеем соотношения

$$\alpha = 2^{2n+2} n\gamma / \beta_1 = 2^{2n+1} \gamma (n + n) / \beta_1 \geq 2^{2n+1} \gamma (1 + n) / \beta_1 \geq$$
$$\geq 2^n \left(2^{n+1} \gamma + 2^n (n\gamma + n\gamma)\right) / \beta_1 \geq$$
$$\geq 2^n \left(2^{n+1} \gamma + 2^n (1 + n\gamma)\right) / \beta_1 \geq$$
$$\geq 2^n \left((2^n + 2^n)\gamma + 2^k (1 + n\gamma)\right) / \beta_1 \geq$$
$$\geq 2^n \left((2^k + 2^n)\gamma + 2^k (1 + n\gamma)\right) / \beta_1.$$

Поэтому, полагая

$$\Delta := \Delta(h, \beta, \delta) = 2^n \gamma \min\{1, \| h \|\} =$$
$$= (4n / \beta)^n (\| h \| + 1) \min\{1, \| h \|\} / \delta,$$

при любом $k=\overline{1,n-1}$ с учетом неравенства $\alpha>1$ получим оценку

$$\det P_{2k-1} \ge \alpha^{k-1}(\alpha\beta_1/2^n - 2^k(1+n\gamma)) \ge$$
$$\ge \alpha^{k-1}\Big(\big((2^k+2^n)\gamma + 2^k(1+n\gamma)\big)\cdot 2^n\beta_1/(2^n\beta_1) - 2^k(1+n\gamma)\Big) \ge$$
$$\ge (2^k+2^n)\gamma\alpha^{k-1} \ge \Delta,$$

т.е.

$$\det P_{2k-1} \ge (2^k+2^n)\gamma\alpha^{k-1} \ge \Delta, \quad k=\overline{1,n-1}. \quad (19)$$

При каждом $k=\overline{1,n-1}$ рассмотрим матрицы

$$P_{2k} := [v_1+\alpha_1 w_1,\dots,v_k+\alpha_k w_k, v_{k+1},\dots,v_{n-1}, v_n+\alpha_1' w_1'+\dots+\alpha_k' w_k'].$$

Тогда с учетом замечания 2, оценок (7), (9), (15) и (19), равенств $\|w_i\|=\|w_i'\|=\|v_i\|=1$, $i=\overline{1,n}$, а также определения матриц P_{2k-1}, $k=\overline{1,n-1}$, и величин Δ, φ, α и α_i, $i=\overline{1,n}$, для всех $k=\overline{1,n-1}$ выполняются соотношения

$$\det P_{2k} = \det[v_1+\alpha_1 w_1,\dots,v_k +$$
$$+\alpha_k w_k, v_{k+1},\dots,v_{n-1}, v_n+\alpha_1' w_1'+\dots+\alpha_{k-1}' w_{k-1}'] +$$
$$+\det[v_1+\alpha_1 w_1,\dots,v_{k-1} +$$
$$+\alpha_{k-1}w_{k-1}, v_k+\alpha_k w_k, v_{k+1},\dots,v_{n-1}, \alpha_k' w_k'] =$$
$$= \det P_{2k-1} + \alpha_k'(\det[v_1+\alpha_1 w_1,\dots,v_{k-1} +$$
$$+\alpha_{k-1}w_{k-1}, v_k, v_{k+1},\dots,v_{n-1}, w_k'] +$$
$$+\alpha_k \det[v_1+\alpha_1 w_1,\dots,v_{k-1} +$$
$$+\alpha_{k-1}w_{k-1}, w_k, v_{k+1},\dots,v_{n-1}, w_k']) \ge$$
$$\ge (2^k+2^n)\gamma\alpha^{k-1} - \gamma(|\det[v_1+\alpha_1 w_1,\dots,v_{k-1} +$$
$$+\alpha_{k-1}w_{k-1}, v_k, v_{k+1},\dots,v_{n-1}, w_k']| +$$
$$+|\alpha_k|\cdot|\det[v_1+\alpha_1 w_1,\dots,v_{k-1} +$$
$$+\alpha_{k-1}w_{k-1}, w_k, v_{k+1},\dots,v_{n-1}, w_k']|) \ge$$
$$\ge (2^k+2^n)\gamma\alpha^{k-1} - \gamma\cdot\left(\left(\prod_{i=1}^{k-1}\|v_i+\alpha_i w_i\|\right)\right.$$
$$\cdot\left(\prod_{i=k}^{n-1}\|v_i\|\right)\cdot\|w_k'\| + |\alpha_k|\cdot\left(\prod_{i=1}^{k-1}\|v_i+\alpha_i w_i\|\right)\cdot\|w_k\|\cdot$$
$$\left.\cdot\left(\prod_{i=k+1}^{n-1}\|v_i\|\right)\cdot\|w_k'\|\cdot|\sin\sphericalangle(w_k,w_k')|\right) \ge$$
$$\ge (2^k+2^n)\gamma\alpha^{k-1} - \gamma\cdot\left(\prod_{i=1}^{k-1}(\|v_i\|+|\alpha_i|\cdot\|w_i\|)\right)\cdot(1+\alpha\sin\varphi) \ge$$
$$\ge (2^k+2^n)\gamma\alpha^{k-1} - 2\gamma(1+\alpha)^{k-1} \ge$$
$$\ge (2^k+2^n)\gamma\alpha^{k-1} - 2^k\gamma\alpha^{k-1} = 2^n\gamma\alpha^{k-1} \ge \Delta,$$

т.е.

$$\det P_{2k} \ge 2^n\gamma\alpha^{k-1} \ge \Delta, \quad k=\overline{1,n-1}. \quad (20)$$

Рассмотрим матрицу

$$P_{2n-1} := [v_1+\alpha_1 w_1,\dots,v_{n-1}+\alpha_{n-1}w_{n-1}, v_n+\alpha_1' w_1'+\dots+\alpha_n' w_n'],$$

тогда в силу разложения (14) имеем равенство

$$P_{2n-1} = [v_1+\alpha_1 w_1,\dots,v_{n-1}+\alpha_{n-1}w_{n-1}, h].$$

Для всех $i=\overline{1,n}$ определим матрицы G_{ni} равенствами

$$G_{ni} := [w_1, w_2,\dots,w_{i-1}, v_i, v_{i+1}+\alpha_{i+1}w_{i+1},\dots,v_{n-1} +$$
$$+\alpha_{n-1}w_{n-1}, v_n+\alpha_1' w_1'+\dots+\alpha_n' w_n'] =$$
$$= [w_1, w_2,\dots,w_{i-1}, v_i, v_{i+1} +$$
$$+\alpha_{i+1}w_{i+1},\dots,v_{n-1}+\alpha_{n-1}w_{n-1}, h]$$

и, используя замечание 2, равенства $\|w_i\|=\|v_i\|=1$, $i=\overline{1,n}$, а также определение величин α_i, $i=\overline{1,n}$, оценим сверху модули определителей этих матриц

$$|\det G_{ni}| = |\det[w_1, w_2,\dots,w_{i-1}, v_i, v_{i+1} +$$
$$+\alpha_{i+1}w_{i+1},\dots,v_{n-1}+\alpha_{n-1}w_{n-1}, h]| \le$$
$$\le \left(\prod_{j=1}^{i-1}\|w_j\|\right)\cdot\|v_i\|\cdot\left(\prod_{j=i+1}^{n-1}\|v_j+\alpha_j w_j\|\right)\cdot$$
$$\cdot\|h\| \le (1+\alpha)^{n-1-i}\|h\|, \quad i=\overline{1,n}.$$

Применив эти оценки, неравенства (13) и (18) для $k=n-1$, формулу суммы геометрической прогрессии, а также соотношения, аналогичные формулам (17), с учетом равенств $h=\|h\|\cdot v_n$, $\alpha=4^{n+1}n\gamma/\beta_1 \ge 1$ и $\Delta=2^n\gamma\min\{1,\|h\|\}$, неравенств $\gamma>1$ и $n\ge 1$, получим следующую цепочку соотношений:

$$\det P_{2n-1} = \det[v_1+\alpha_1 w_1, v_2 +$$
$$+\alpha_2 w_2,\dots,v_{n-1}+\alpha_{n-1}w_{n-1}, h] =$$
$$= \det[v_1, v_2+\alpha_2 w_2,\dots,v_{n-1}+\alpha_{n-1}w_{n-1}, h] +$$
$$+\alpha_1\det[w_1, v_2+\alpha_2 w_2,\dots,v_{n-1}+\alpha_{n-1}w_{n-1}, h] =$$
$$= \det G_{n1} + \alpha_1(\det[w_1, v_2, v_3+\alpha_3 w_3,\dots,v_{n-1}+\alpha_{n-1}w_{n-1}, h] +$$
$$+\alpha_2\det[w_1, w_2, v_3+\alpha_3 w_3,\dots,v_{n-1}+\alpha_{n-1}w_{n-1}, h]) =$$
$$= \alpha_0\det G_{n1} + \alpha_0\alpha_1\det G_{n2} +$$
$$+\alpha_0\alpha_1\alpha_2\det[w_1, w_2, v_3+\alpha_3 w_3,\dots,v_{n-1}+\alpha_{n-1}w_{n-1}, h] =$$
$$= \dots = \alpha_0\det G_{n1} + \alpha_0\alpha_1\det G_{n2} + \dots +$$
$$+\left(\prod_{i=0}^{n-2}\alpha_i\right)\cdot\det G_{nn-1} + \left(\prod_{i=0}^{n-1}\alpha_i\right)\cdot\det[w_1, w_2,\dots,w_{n-1}, h] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\left[\left(\prod_{j=0}^{i-1}\alpha_j\right)\cdot \det G_{ni}\right] +$$

$$+ \| h \| \cdot\left(\prod_{i=0}^{n-1}\alpha_i\right)\cdot\det[w_1, w_2, w_3, \dots, w_{n-1}, v_n] \ge$$

$$\ge \alpha^{n-1} \| h \| \beta_1 / 2^n - \sum_{i=1}^{n-1}\left(\alpha^{i-1}\cdot |\det G_{ni}|\right) \ge$$

$$\ge \alpha^{n-1} \| h \| \beta_1 / 2^n - \sum_{i=1}^{n-1}\left(\alpha^{i-1}(1+\alpha)^{n-1-i}\right)\cdot \| h \| \ge$$

$$\ge \alpha^{n-2} \| h \| (\alpha\beta_1 / 2^n - \sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-1-i}) =$$

$$= \alpha^{n-2} \| h \| \cdot \left(\alpha\beta_1 / 2^n - 2^{n-2}\left(1-(1/2)^{n-1}\right)/(1-1/2)\right) \ge$$

$$\ge \alpha^{n-2} \| h \| (\alpha\beta_1 / 2^n - 2^{n-1}) \ge$$

$$\ge \alpha^{n-2} \| h \| (4^{n+1} n\gamma\beta_1 / (2^n \beta_1) - 2^{n-1}) =$$

$$= \alpha^{n-2} \| h \| 2^{n-1}(8n\gamma - 1) \ge$$

$$\ge 7n\gamma\alpha^{n-2} \| h \| 2^{n-1} \ge 2^{n+1} n\gamma\alpha^{n-2} \| h \| \ge \Delta,$$

т.е.

$$\det P_{2n-1} \ge 2^{n+1} n\gamma\alpha^{n-2} \| h \| \ge \Delta. \qquad (21)$$

Таким образом, на основании формул (19), (20) и (21) справедливы оценки

$$\det P_i \ge \delta, \quad i = \overline{1, 2n-1}.$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 7. *Теорему 2 (в частном случае) можно переформулировать следующим образом. Если имеется n базисов пространства* $\mathbb{R}^n$ *достаточно большого объема, с векторами которых можно производить операции, определенные в замечании 6, то, взяв в качестве матрицы* P_0 *единичную матрицу* $E = [e_1, \dots, e_n]$, *на основании доказательства теоремы 2 конструктивным образом можно построить* Δ*-легальный маршрут, связывающий единичную матрицу* E *с некоторой матрицей, последний столбец которой будет сонаправлен с вектором* e_n.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф13М-055).

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов, В.М. Гиперустойчивость автоматических систем / В.М. Попов. – М.: Наука, 1970. – 335 с.
2. Popov, V.M. Hyperstability and optimality of automatic systems with several control functions / V.M. Popov // Rev. Roumaine. Sci. Techn., Electrotechn. et Energ. – 1964. – Vol. 9, № 4. – P. 629–690.
3. Макаров, Е.К. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем / Е.К. Макаров, С.Н. Попова. – Минск: Беларус. навука, 2012. – 407 с.
4. Попова, С.Н. Глобальная приводимость линейных управляемых систем к системам скалярного типа / С.Н. Попова // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 1. – С. 41–46.
5. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
6. Козлов, А.А. Об управлении показателями Ляпунова двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами / А.А. Козлов // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1319–1335.
7. Козлов, А.А. О существовании линейно-независимых направлений движения для равномерно вполне управляемой трехмерной линейной системы с локально интегрируемыми коэффициентами / А.А. Козлов, А.Д. Бурак // Весн. Віцебск. дзярж. ун-та. – 2013. – № 3(75). – С. 29–45.
8. Козлов, А.А. Об управлении характеристическими показателями трехмерных линейных дифференциальных систем с разрывными и быстро осциллирующими коэффициентами / А.А. Козлов, А.Д. Бурак // Весн. Віцебск. дзярж. ун-та. – 2013. – № 5(77). – С. 11–31.
9. Макаров, Е.К. О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов двумерных линейных систем / Е.К. Макаров, С.Н. Попова // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 1. – С. 97–106.
10. Мишина, А.П. Высшая алгебра. Линейная алгебра, многочлены, общая алгебра / А.П. Мишина, И.В. Проскуряков. – М.: Наука, 1970. – 399 с.
11. Глазман, И.М. Конечномерный линейный анализ / И.М. Глазман, Ю.И. Любич. – М.: Наука, 1969. – 476 с.

REFERENCES

1. Popov V.M. Giperustoichivost avtomaticheskih sistem [Hyperstability of Automatic Systems], M.: Nauka, 1970, 335 p.
2. Popov V.M. Rev. Roumaine. Sci. Techn., Electrotechn. et Energ., 1964, 9(4), pp. 629–690.
3. Makarov E.K., Popova S.N. Upravliayemost asimptoticheskih invariantov nestatsionarnih lineinih sistem [Controllability of Asymptotic Invariants of Non Stationary Linear Systems], Minsk: Belarus. navuka, 2012, 407 p.
4. Popova S.N. Differents. Uravneniya [Differencial Equations], 2004, 40(1), pp. 41–46.
5. Horn R., Johnson C. Matrichnii analiz [Matrix Analysis], M.: Mir, 1989, 655 p.
6. Kozlov A.A. Differents. Uravneniya [Differencial Equations], 2008, 44(10), pp. 1319–1335.
7. Kozlov A.A., Burak A.D. Vesnik VDU [Journal of VSU], 2013, 3(75), pp. 29–45.
8. Kozlov A.A., Burak A.D. Vesnik VDU [Journal of VSU], 2013, 5(77), pp. 11–31.
9. Makarov E.K., Popova S.N. Differents. Uravneniya [Differencial Equations], 1999, 35(1), pp. 97–106.
10. Mishina A.P., Proskuriakov I.V. Visshaya algebra. Lineinaya algebra, mnogochleni, obshchaya algebra [Higher Algebra. Linear Algebra, Multi Members, General algebra], M.: Nauka, 1970, 399 p.
11. Glazman I.M., Liubich Yu. I. Konechnomerni lineini analiz [Final Measure Linear Analysis], M.: Nauka, 1969, 476 p.

Поступила в редакцию 05.02.2014. Принята в печать 21.04.2014
Адрес для корреспонденции: e-mail: kozlovaa@tut.by – Козлов А.А.