



УДК 517.956.3

Классические решения неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны с полунестационарной второй косой производной в граничном условии

Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков

Белорусский государственный университет

Получены в явном виде классические решения уравнения $u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t)$, $a > 0$, $x \geq 0$, $t \geq 0$, при начальных условиях $u|_{t=0} = \phi(x)$, $u_t|_{t=0} = \psi(x)$, $0 \leq x < \infty$, и граничном условии

$$\left[\left(\alpha_2(t) \frac{\partial}{\partial t} + \beta_2(t) \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_2(t) \right) \left(\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma_1 u \right) \right]_{x=0} = \mu(t), \quad 0 \leq t < \infty,$$

где функции $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in C[0, \infty[$ непрерывны и $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – вещественные постоянные. Рассмотрен случай граничного условия с нехарактеристическими направлениями первых косых производных, т.е. $\alpha\alpha_i \neq \beta_i$, $t \in [0, \infty[$, $i = 1, 2$. Впервые для существования и единственности классических решений этой смешанной задачи для уравнения колебаний полуограниченной струны выведены необходимые и достаточные условия на правую часть уравнения, начальные данные и граничное данное:

$$\begin{aligned} f \in C(G), \phi \in C^2[0, \infty[, \psi \in C^1[0, \infty[, \mu \in C[0, \infty[, \int_0^t f^{(1,0)}(x \pm a(t-\tau), \tau) d\tau \in C(G), \\ \beta_1[\alpha_2(0)\psi'(0) + \beta_2(0)\phi''(0) + \gamma_2(0)\phi'(0)] + \gamma_1[\alpha_2(0)\psi(0) + \beta_2(0)\phi'(0) + \gamma_2(0)\phi(0)] + \\ + \alpha_1[\alpha_2(0)(a^2\phi''(0) + f(0,0)) + \beta_2(0)\psi'(0) + \gamma_2(0)\psi(0)] = \mu(0), \end{aligned}$$

где множество $G = [0, \infty[\times [0, \infty[$ и $f^{(1,0)}(y, \tau)$ – первая частная производная от f по y .

Classical Solutions of Inhomogeneous Vibration Equation of a Semibounded String with Semi-Nonstationary Second Directional Derivative in the Boundary Condition

F.E. Lomovtsev, E.N. Novikov

Belarusian State University

We obtain a closed-form expression for the classical solutions of the equation $u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t)$, $a > 0$, $x \geq 0$, $t \geq 0$, with the initial conditions $u|_{t=0} = \phi(x)$, $u_t|_{t=0} = \psi(x)$, $0 \leq x < \infty$, and the boundary condition

$$\left[\left(\alpha_2(t) \frac{\partial}{\partial t} + \beta_2(t) \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_2(t) \right) \left(\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma_1 u \right) \right]_{x=0} = \mu(t), \quad 0 \leq t < \infty,$$

where functions $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in C[0, \infty[$ are continuous and $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ are real constants. We consider the case of the boundary condition with the first directional derivatives, not directed along the characteristics, i.e. $\alpha\alpha_i \neq \beta_i$, $t \in [0, \infty[$, $i = 1, 2$. For the first time for the unique solvability of this mixed problem for vibration equation of a semibounded string we derive the necessary and sufficient conditions on the right-hand side, the initial data and the boundary data:

$$f \in C(G), \varphi \in C^2[0, \infty[, \psi \in C^1[0, \infty[, \mu \in C[0, \infty[, \int_0^t f^{(1,0)}(x \pm a(t-\tau), \tau) d\tau \in C(G),$$

$$\beta_1[\alpha_2(0)\psi'(0) + \beta_2(0)\varphi''(0) + \gamma_2(0)\varphi'(0)] + \gamma_1[\alpha_2(0)\psi(0) + \beta_2(0)\varphi'(0) + \gamma_2(0)\varphi(0)] +$$

$$+ \alpha_1[\alpha_2(0)(a^2\varphi''(0) + f(0,0)) + \beta_2(0)\psi'(0) + \gamma_2(0)\psi(0)] = \mu(0),$$

where a set G is $[0, \infty[\times [0, \infty[$ and $f^{(1,0)}(y, \tau)$ is a first partial derivative of f on y .

В настоящей работе впервые получены в явном виде классические решения смешанной задачи для неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны при второй факторизованной косо́й производной в граничном условии, в котором коэффициенты первой косо́й производной не зависят от времени, а также для ее однозначной разрешимости найдены необходимые и достаточные условия на правую часть уравнения, начальные данные и граничное данное. Эти условия состоят из необходимых и достаточных требований гладкости на правую часть уравнения, начальные данные и граничное данное и необходимого и достаточного требования согласования начальных условий с граничным условием и уравнением. Нами рассмотрен случай, когда в граничном условии вторая косо́я производная представима в виде произведения двух первых косо́х производных и направления обеих первых косо́х производных не являются характеристическими. Вторая косо́я производная в граничном условии выражает наличие на конечном конце струны динамической силы, сопротивления среды, пропорционального его смещению, скорости и ускорению. Явная формула классических решений смешанной задачи для однородного уравнения колебаний полуограниченной струны с зависящей от времени первой косо́й производной в граничном условии и для их существования и единственности достаточные условия на начальные данные и граничное данное найдены в [1]. Явная формула классических решений смешанной задачи для неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны с зависящей от времени первой косо́й производной в граничном условии, а также для их существования и единственности необходимые и достаточные условия на правую часть уравнения, начальные данные и граничное данное были установлены в [2].

Материал и методы. В первой четверти плоскости $G = [0, \infty[\times [0, \infty[$ решается смешанная задача:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad a > 0, \quad \{x, t\} \in G, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x < \infty, \quad (2)$$

$$\left(\left(\alpha_2(t) \frac{\partial}{\partial t} + \beta_2(t) \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_2(t) \right) \left(\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma_1 u \right) \right) \Big|_{x=0} = \mu(t),$$

$$0 \leq t < \infty, \quad (3)$$

где правая часть f , начальные данные φ, ψ , граничное данное μ , коэффициенты $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ – заданные функции своих независимых переменных x, t и $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – вещественные постоянные. Эту смешанную задачу мы решаем методом характеристик и методом Дюамеля.

Результаты и их обсуждение. Множество G делится характеристикой $x = at$ на два множества:

$$G_1 = \{(x, t) \in G : x > at\}, \quad G_2 = \{(x, t) \in G : x \leq at\}.$$

Пусть $C^k(G)$ – множество всех $k \geq 1$ раз непрерывно дифференцируемых функций на множестве G , $C(G)$ – множество всех непрерывных функций на $G \subset \mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}$ – вещественная прямая.

Теорема. Пусть функции $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in C[0, \infty[$ и $a\alpha_i \neq \beta_i, t \in [0, \infty[, i = 1, 2$. Смешанная задача (1)–(3) имеет единственные классические решения $u(x, t) \in C^2(G)$ вида

$$u_1(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau) d\tau + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau, \quad (4)$$

$$\{x, t\} \in G_1,$$

$$u_2(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(0)}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \psi(\tau) d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2a} \int_0^{x-at} e^{\frac{\gamma_2(\tau-x+at)}{\beta_2-a\alpha_2}} \left\{ (\beta_1 - a\alpha_1)(a\varphi'(0) - \psi(0)) e^{\int_{\beta_2(t-s-a)-a\alpha_2(t-s-a)}^{\gamma_2(t-s-a)} -a\alpha_2} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{\frac{v}{a}} \left(\beta_2 \left(\frac{-v}{a} \right) - a\alpha_2 \left(\frac{-v}{a} \right) \right)^{-1} e^{\int_0^{\frac{v}{a}} \frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a) - a\alpha_2(-s/a)} ds} \left(2a\mu \left(\frac{-v}{a} \right) - \right. \\
& - \alpha_2 \left(\frac{-v}{a} \right) \left((\beta_1 + a\alpha_1)(a^2\varphi''(-v) + a\psi'(-v)) + 2a\alpha_1 f \left(0, \frac{-v}{a} \right) + \right. \\
& + a^2\alpha_1 \int_0^{-v/a} [f^{(1,0)}(-v - a\zeta, \zeta) - f^{(1,0)}(v + a\zeta, \zeta)] d\zeta + \\
& + a\beta_1 \int_0^{-v/a} [f^{(1,0)}(-v - a\zeta, \zeta) + f^{(1,0)}(v + a\zeta, \zeta)] d\zeta + \\
& + a\gamma_1 \left(a\varphi'(-v) + \psi(-v) + \int_0^{-v/a} [f(-v - a\zeta, \zeta) + f(v + a\zeta, \zeta)] d\zeta \right) \Bigg) - \\
& - \beta_2 \left(\frac{-v}{a} \right) \left((\beta_1 + a\alpha_1)(a\varphi'(-v) + \psi'(-v)) + \right. \\
& + a\alpha_1 \int_0^{-v/a} [f^{(1,0)}(-v - a\zeta, \zeta) + f^{(1,0)}(v + a\zeta, \zeta)] d\zeta + \\
& + \beta_1 \int_0^{-v/a} [f^{(1,0)}(-v - a\zeta, \zeta) - f^{(1,0)}(v + a\zeta, \zeta)] d\zeta + \\
& + \gamma_1 \left(a\varphi'(-v) + \psi(-v) + \int_0^{-v/a} [f(-v - a\zeta, \zeta) - f(v + a\zeta, \zeta)] d\zeta \right) \Bigg) - \\
& - \gamma_2 \left(\frac{-v}{a} \right) \left((\beta_1 + a\alpha_1)(a\varphi'(-v) + \psi(-v)) + \right. \\
& + a\alpha_1 \int_0^{-v/a} [f(-v - a\zeta, \zeta) + \\
& + f(v + a\zeta, \zeta)] d\zeta + \beta_1 \int_0^{-v/a} [f(-v - a\zeta, \zeta) - f(v + a\zeta, \zeta)] d\zeta + \\
& + \gamma_1 \left(a(\varphi(-v) + \varphi(0)) + \int_0^{-v} \psi(\zeta) d\zeta + \right. \\
& + \left. \int_0^{-v/a} \int_{v+a\zeta}^{-v-a\zeta} f(s, \zeta) ds d\zeta \right) dv \Bigg\} d\tau, \{x, t\} \in G_2 \quad (5)
\end{aligned}$$

тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$f \in C(G), \varphi \in C^2[0, \infty[, \psi \in C^1[0, \infty[, \mu \in C[0, \infty[, \quad (6)$$

$$\int_0^t f^{(1,0)}(x \pm a(t - \tau), \tau) d\tau \in C(G), \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
Y \equiv & \beta_1[\alpha_2(0)\psi'(0) + \beta_2(0)\varphi''(0) + \gamma_2(0)\varphi'(0)] + \\
& + \gamma_1[\alpha_2(0)\psi(0) + \beta_2(0)\varphi'(0) + \gamma_2(0)\varphi(0)] + \\
& + \alpha_1[\alpha_2(0)(a^2\varphi''(0) + f(0, 0)) + \\
& + \beta_2(0)\psi'(0) + \gamma_2(0)\psi(0)] = \mu(0), \quad (8)
\end{aligned}$$

где одним и двумя штрихами над функциями обозначены соответственно первая и вторая производные этих функций, а $f^{(1,0)}(y, s)$ – первая частная производная по y .

Доказательство. Достаточность. Сначала мы ищем решение смешанной задачи (1)–(3) в нижнем углу G_1 в виде решения задачи Коши (1), (2) в G_1 . Нетрудно показать, что для любых функций f , φ и ψ , удовлетворяющих условиям (6), (7), единственные классические решения задачи Коши (1), (2) в G_1 выражаются известной полной формулой Даламбера (4) [3, с. 64].

Теперь мы ищем решение смешанной задачи (1)–(3) в верхнем углу G_2 в виде решения задачи Дарбу для уравнения (1) в G_2 при граничном условии (3) на одной стороне $x = 0$ и граничном условии первого рода на другой стороне угла G_2 .

Согласно методу характеристик и методу Дюамеля общее решение неоднородного уравнения (1) на множестве G_2 имеет вид

$$u(x, t) = g(x + at) + h(x - at) + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau, \quad (9)$$

где g и h – любые дважды непрерывно дифференцируемые функции в G_2 , а f удовлетворяет условиям (6), (7). Значения решений (9) на характеристике $x = at$ должны совпадать со значениями непрерывных продолжений классических решений (4) из множества G_1 на характеристику $x = at$, и еще сами решения (9) должны удовлетворять граничному условию (3) при $x = 0$. В результате получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} g(2at) + h(0) = \frac{\varphi(2at) + \varphi(0)}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^{2a} \psi(\tau) d\tau, \\ \left\{ \left(\alpha_2(t) \frac{\partial}{\partial t} + \beta_2(t) \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_2(t) \right) \left(\alpha_1 \left(\frac{1}{2} \int_0^t [f(x + a(t - \tau), \tau) + f(x - a(t - \tau), \tau)] d\tau + \right. \right. \right. \right. \\ + a g'(x + at) - a h'(x - at) + \beta_1 \left(\frac{1}{2a} \int_0^t [f(x + a(t - \tau), \tau) - f(x - a(t - \tau), \tau)] d\tau + \right. \\ \left. \left. \left. + g'(x + at) + h'(x - at) + \gamma_1 \left(g(x + at) + h(x - at) + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \int_{x-at}^{x+at} f(s, \tau) ds d\tau \right) \right) \right) \right\} \Bigg|_{x=0} = \mu(t) \end{cases} \quad (10)$$

относительно неизвестных функций g и h .

Из первого уравнения этой системы заменой переменной $2at = z$ находим функцию

$$g(z) = \frac{\varphi(z) + \varphi(0)}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^z \psi(\tau) d\tau - h(0), \quad z \geq 0. \quad (11)$$

Подставляем ее значение при $z = x + at$ во второе уравнение системы (10) и после переноса всех слагаемых, не содержащих неизвестную функцию h , вправо приходим к дифференциальному уравнению первого порядка

$$\left\{ \left(\alpha_2(t) \frac{\partial}{\partial x} + \beta_2(t) \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_2(t) \right) \left((\beta_1 - a\alpha_1) h'(x - at) + \gamma_1 h(x - at) \right) \right\} \Big|_{x=0} = P(t) \quad (12)$$

относительно функции h с правой частью

$$\begin{aligned} P(t) = & \mu(t) - \\ & - \frac{1}{2a} \left\{ \alpha_2(t) \left(a^2 \alpha_1 \int_0^t [f^{(1,0)}(a(t-\tau), \tau) - f^{(1,0)}(a(\tau-t), \tau)] d\tau + 2a\alpha_1 f(0, t) + \right. \right. \\ & + (\beta_1 + a\alpha_1)(a^2 \varphi''(at) + a\psi'(at)) + \\ & + a\beta_1 \int_0^t [f^{(1,0)}(a(t-\tau), \tau) + f^{(1,0)}(a(\tau-t), \tau)] d\tau + \\ & + a\gamma_1 \left(a\varphi'(at) + \psi(at) + \int_0^t [f(a(t-\tau), \tau) + f(a(\tau-t), \tau)] d\tau \right) \Big\} - \\ & - \beta_2(t) \left(a\alpha_1 \int_0^t [f^{(1,0)}(a(t-\tau), \tau) + f^{(1,0)}(a(\tau-t), \tau)] d\tau + \right. \\ & + (\beta_1 + a\alpha_1)(a\varphi''(at) + \psi'(at)) + \\ & + \beta_1 \int_0^t [f^{(1,0)}(a(t-\tau), \tau) - f^{(1,0)}(a(\tau-t), \tau)] d\tau + \\ & + \gamma_1 \left(a\varphi'(at) + \psi(at) + \int_0^t [f(a(t-\tau), \tau) - f(a(\tau-t), \tau)] d\tau \right) \Big\} - \\ & - \gamma_2(t) \left(a\alpha_1 \int_0^t [f(a(t-\tau), \tau) + f(a(\tau-t), \tau)] d\tau + \right. \\ & + (\beta_1 + a\alpha_1)(a\varphi'(at) + \psi(at)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \beta_1 \int_0^t [f(a(t-\tau), \tau) - f(a(\tau-t), \tau)] d\tau + \\ & + \gamma_1 \left(a(\varphi(at) + \varphi(0)) + \int_0^{at} \psi(\tau) d\tau + \int_0^t \int_{a(\tau-t)}^{a(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau - h(0) \right) \Big\}. \end{aligned}$$

В силу постоянных коэффициентов $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ уравнение (12) заменой неизвестной функции

$$H(x - at) = (\beta_1 - a\alpha_1) h'(x - at) + \gamma_1 h(x - at) \quad (13)$$

сводится к следующему виду:

$$\left\{ \left(\alpha_2(t) \frac{\partial}{\partial t} + \beta_2(t) \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_2(t) \right) H(x - at) \right\} \Big|_{x=0} = (\beta_2(t) - a\alpha_2(t)) H'(-at) + \gamma_2(t) H(-at) = P(t).$$

Отсюда заменой независимой переменной $z = -at \leq 0$ имеем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно новой неизвестной функции $H(z)$

$$(\beta_2(-z/a) - a\alpha_2(-z/a)) H'(z) + \gamma_2(-z/a) H(z) = P(-z/a). \quad (14)$$

Делим левую и правую части последнего уравнения на $\beta_2(-z/a) - a\alpha_2(-z/a)$, умножаем его на интегрирующий множитель

$$\sigma_1(z) = \exp \left\{ \int_0^z \frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a) - a\alpha_2(-s/a)} ds \right\}$$

и получаем простейшее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} & \left(H(z) e^{\int_0^z \frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a) - a\alpha_2(-s/a)} ds} \right)' = \\ & = \frac{P(-z/a) e^{\int_0^z \frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a) - a\alpha_2(-s/a)} ds}}{\beta_2(-z/a) - a\alpha_2(-z/a)}. \end{aligned}$$

Интегрируя это уравнение по z , имеем общее решение уравнения (14)

$$\begin{aligned} H(z) = & \int_0^z \frac{P(-v/a) e^{\int_0^v \frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a) - a\alpha_2(-s/a)} ds}}{\beta_2(-v/a) - a\alpha_2(-v/a)} dv + \\ & + C_1 e^{\int_0^0 \frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a) - a\alpha_2(-s/a)} ds}, \end{aligned}$$

из которого при $z = 0$ находим значения произвольной постоянной

$$C_1 = H(0) = (\beta_1 - a\alpha_1)h'(0) + \gamma_1 h(0).$$

Возвращаясь здесь от функции H к функции h , ввиду замены (13) имеем еще одно обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка уже относительно h :

$$(\beta_1 - a\alpha_1)h'(z) + \gamma_1 h(z) = \int_0^z \frac{P(-v/a) e^{\int_0^v \frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a) - a\alpha_2(-s/a)} ds}}{\beta_2(-v/a) - a\alpha_2(-v/a)} dv +$$

$$+ ((\beta_1 - a\alpha_1)h'(0) + \gamma_1 h(0)) e^{\int_0^z \frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a) - a\alpha_2(-s/a)} ds}. \quad (15)$$

Делим обе части этого уравнения на $\beta_1 - a\alpha_1$, умножаем его на интегрирующий множитель $\sigma_2(z) = \exp\{\gamma_1 z / (\beta_1 - a\alpha_1)\}$ и получаем простейшее дифференциальное уравнение

$$\left(h(z) e^{\frac{\gamma_1 z}{\beta_1 - a\alpha_1}} \right)' = \frac{e^{\frac{\gamma_1 z}{\beta_1 - a\alpha_1}}}{\beta_1 - a\alpha_1} \left(\int_0^z \frac{P(-\eta/a) e^{\int_0^\eta \frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a) - a\alpha_2(-s/a)} ds}}{\beta_2(-\eta/a) - a\alpha_2(-\eta/a)} d\eta + \right.$$

$$\left. + ((\beta_1 - a\alpha_1)h'(0) + \gamma_1 h(0)) e^{\int_0^z \frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a) - a\alpha_2(-s/a)} ds} \right).$$

Интегрируя его по z , выводим общее решение уравнения (15)

$$h(z) = \int_0^z \frac{e^{\frac{\gamma_1(\tau-z)}{\beta_1 - a\alpha_1}}}{\beta_1 - a\alpha_1} \left(\int_0^\tau \frac{P(-v/a) e^{\int_0^v \frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a) - a\alpha_2(-s/a)} ds}}{\beta_2(-v/a) - a\alpha_2(-v/a)} dv + \right.$$

$$\left. + ((\beta_1 - a\alpha_1)h'(0) + \gamma_1 h(0)) e^{\int_0^\tau \frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a) - a\alpha_2(-s/a)} ds} \right) d\tau +$$

$$+ C_2 e^{\frac{-\gamma_1 z}{\beta_1 - a\alpha_1}}, \quad (16)$$

из которого при $z = 0$ находим значения произвольной постоянной $C_2 = h(0)$.

Подставляем найденные функции g и h в общее решение (9) и согласно формулам (11), (16) при $C_1 = (\beta_1 - a\alpha_1)h'(0) + \gamma_1 h(0)$ и $C_2 = h(0)$ во множестве G_2 получаем решения

$$u_2(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(0)}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \psi(\tau) d\tau -$$

$$- h(0) + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau + h(0) e^{\frac{\gamma_1(at-x)}{\beta_1 - a\alpha_1}} +$$

$$+ \int_0^{x-at} \frac{e^{\frac{\gamma_1(\tau+at-x)}{\beta_1 - a\alpha_1}}}{\beta_1 - a\alpha_1} \times$$

$$\times \left\{ 2a((\beta_1 - a\alpha_1)h'(0) + \gamma_1 h(0)) e^{\int_0^t \frac{\gamma_2(-s/a)(\beta_2(-s/a) - a\alpha_2(-s/a))^{-1}}{ds}} ds + \right.$$

$$+ \int_0^t \left(\beta_2\left(\frac{-v}{a}\right) - a\alpha_2\left(\frac{-v}{a}\right) \right)^{-1} \times$$

$$\times e^{\int_0^v \frac{\gamma_2(-s/a)(\beta_2(-s/a) - a\alpha_2(-s/a))^{-1}}{ds}} \left(2a\mu\left(\frac{-v}{a}\right) - \right.$$

$$- \alpha_2\left(\frac{-v}{a}\right) \left((\beta_1 + a\alpha_1)(a^2\varphi''(-v) + \right.$$

$$+ a\psi'(-v)) + 2a\alpha_1 f\left(0, \frac{-v}{a}\right) +$$

$$+ a^2\alpha_1 \int_0^{-v/a} [f^{(1,0)}(-v - a\zeta, \zeta) - f^{(1,0)}(v + a\zeta, \zeta)] d\zeta +$$

$$+ a\beta_1 \int_0^{-v/a} [f^{(1,0)}(-v - a\zeta, \zeta) + f^{(1,0)}(v + a\zeta, \zeta)] d\zeta +$$

$$+ a\gamma_1(a\varphi'(-v) + \psi(-v) + \int_0^{-v/a} [f(-v - a\zeta, \zeta) +$$

$$+ f(v + a\zeta, \zeta)] d\zeta) -$$

$$- \beta_2\left(\frac{-v}{a}\right) \left((\beta_1 + a\alpha_1)(a\varphi'(-v) + \psi'(-v)) + \right.$$

$$+ a\alpha_1 \int_0^{-v/a} [f^{(1,0)}(-v - a\zeta, \zeta) + f^{(1,0)}(v + a\zeta, \zeta)] d\zeta +$$

$$+ \beta_1 \int_0^{-v/a} [f^{(1,0)}(-v - a\zeta, \zeta) - f^{(1,0)}(v + a\zeta, \zeta)] d\zeta +$$

$$+ \gamma_1 \left(a\varphi'(-v) + \psi(-v) + \int_0^{-v/a} [f(-v - a\zeta, \zeta) - f(v + a\zeta, \zeta)] d\zeta \right) \Bigg\} -$$

$$- \gamma_2\left(\frac{-v}{a}\right) \left((\beta_1 + a\alpha_1)(a\varphi'(-v) + \psi(-v)) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + a\alpha_1 \int_0^{-v/a} [f(-v - a\zeta, \zeta) + f(v + a\zeta, \zeta)] d\zeta + \\
 & + \beta_1 \int_0^{-v/a} [f(-v - a\zeta, \zeta) - f(v + a\zeta, \zeta)] d\zeta + \\
 & + \gamma_1 \left(a(\varphi(-v) + \varphi(0)) + \int_0^{-v} \psi(\zeta) d\zeta - \right. \\
 & \left. ; -h(0) + \int_0^{-v/a} \int_{v+a\zeta}^{-v-a\zeta} f(s, \zeta) ds d\zeta \right) dv \Bigg\} d\tau. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Эти решения содержат, вообще говоря, произвольные постоянные $h(0)$ и $h'(0)$.

В первую очередь, убедимся в том, что сумма всех слагаемых, содержащих множитель $h(0)$, равна нулю, т.е. в формуле (17) для суммы этих коэффициентов при любом значении множителя $h(0)$ имеет место равенство

$$\begin{aligned}
 & h(0) e^{\frac{\gamma_1(at-x)}{\beta_1 - a\alpha_1}} - h(0) + \\
 & + h(0) \int_0^{x-at} e^{\frac{\gamma_1(\tau-x+at)}{\beta_1 - a\alpha_1}} \left\{ \gamma_1 e^{\int_0^{\tau} \frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a) - a\alpha_2(-s/a)} ds} + \right. \\
 & \left. + \int_0^{\tau} \frac{\gamma_2(-v/a) \gamma_1}{\beta_2(-v/a) - a\alpha_2(-v/a)} e^{\int_0^v \frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a) - a\alpha_2(-s/a)} ds} dv \right\} d\tau = 0. \quad (18)
 \end{aligned}$$

В третьем слагаемом равенства (18) под интегралом выносим за фигурную скобку общий множитель $\gamma_1 \exp \left\{ \int_0^{\tau} \frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a) - a\alpha_2(-s/a)} ds \right\}$, и левая часть этого равенства без общего множителя $h(0)$ приобретает вид

$$\begin{aligned}
 & \left(e^{\frac{\gamma_1(at-x)}{\beta_1 - a\alpha_1}} - 1 \right) + \\
 & + \int_0^{x-at} \frac{\gamma_1}{\beta_1 - a\alpha_1} e^{\frac{\gamma_1(\tau-x+at)}{\beta_1 - a\alpha_1} + \int_0^{\tau} \frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a) - a\alpha_2(-s/a)} ds} \\
 & \left\{ 1 + \int_0^{\tau} \frac{\gamma_2(-v/a) \gamma_1}{\beta_2(-v/a) - a\alpha_2(-v/a)} e^{\int_0^v \frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a) - a\alpha_2(-s/a)} ds} dv \right\} \quad (19)
 \end{aligned}$$

Замечаем, что в третьем слагаемом под интегралом в фигурных скобках интеграл допускает представление

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\tau} \frac{\gamma_2(-v/a)}{\beta_2(-v/a) - a\alpha_2(-v/a)} e^{\int_0^v \frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a) - a\alpha_2(-s/a)} ds} dv = \\
 & = \int_0^{\tau} \left(e^{\int_0^v \frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a) - a\alpha_2(-s/a)} ds} \right)' dv = e^{\int_0^{\tau} \frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a) - a\alpha_2(-s/a)} ds} - 1.
 \end{aligned}$$

Подставляем это представление интеграла в (19) и имеем выражение

$$\left(e^{\frac{\gamma_1(at-x)}{\beta_1 - a\alpha_1}} - 1 \right) + e^{\frac{\gamma_1(at-x)}{\beta_1 - a\alpha_1}} \int_0^{x-at} \frac{\gamma_1}{\beta_1 - a\alpha_1} e^{\frac{\gamma_1\tau}{\beta_1 - a\alpha_1}} d\tau.$$

Снова замечаем, что здесь в третьем слагаемом под интегралом возможно представление

$$\frac{\gamma_1}{\beta_1 - a\alpha_1} e^{\frac{\gamma_1\tau}{\beta_1 - a\alpha_1}} = \left(e^{\frac{\gamma_1\tau}{\beta_1 - a\alpha_1}} \right)',$$

с помощью которого последнее выражение интегрированием приводится к выражению

$$\left(e^{\frac{\gamma_1(at-x)}{\beta_1 - a\alpha_1}} - 1 \right) + \left(1 - e^{\frac{\gamma_1(at-x)}{\beta_1 - a\alpha_1}} \right) = 0.$$

В силу доказанного нами равенства (18) решения u_2 приобретают вид

$$\begin{aligned}
 u_2(x, t) = & \frac{\varphi(x + at) + \varphi(0)}{2} + \\
 & + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \psi(\tau) d\tau + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau + \\
 & + \frac{1}{2a} \int_0^{x-at} e^{\int_0^{\tau} \frac{\gamma_1}{\beta_1 - a\alpha_1} ds} (\beta_1 - a\alpha_1)^{-1} \times \\
 & \times \left\{ 2a(\beta_1 - a\alpha_1) h'(0) e^{\int_0^{\tau} \frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a) - a\alpha_2(-s/a)} ds} + \right. \\
 & \left. + \int_0^{\tau} (\beta_2(-v/a) - a\alpha_2(-v/a))^{-1} \cdot \right. \\
 & \left. e^{\int_0^v \frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a) - a\alpha_2(-s/a)} ds} (2a\mu(-v/a) - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha_2(-v/a)((\beta_1 + a\alpha_1)(a^2\varphi''(-v) + \\
& + a\psi'(-v)) + 2a\alpha_1 f(0, -v/a) + \\
& + a^2\alpha_1 \int_0^{-v/a} [f^{(1,0)}(-v - a\zeta, \zeta) - \\
& - f^{(1,0)}(v + a\zeta, \zeta)] d\zeta + \\
& + a\beta_1 \int_0^{-v/a} [f^{(1,0)}(-v - a\zeta, \zeta) + f^{(1,0)}(v + a\zeta, \zeta)] d\zeta + \\
& + a\gamma_1(a\varphi'(-v) + \psi(-v) + \\
& + \int_0^{-v/a} [f(-v - a\zeta, \zeta) + f(v + a\zeta, \zeta)] d\zeta) - \\
& - \beta_2(-v/a)((\beta_1 + a\alpha_1)(a\varphi''(-v) + \psi'(-v)) + \\
& + a\alpha_1 \int_0^{-v/a} [f^{(1,0)}(-v - a\zeta, \zeta) + f^{(1,0)}(v + a\zeta, \zeta)] d\zeta + \\
& + \beta_1 \int_0^{-v/a} [f^{(1,0)}(-v - a\zeta, \zeta) - f^{(1,0)}(v + a\zeta, \zeta)] d\zeta + \\
& + \gamma_1(\varphi'(-v) + \psi(-v) + \\
& + \int_0^{-v/a} [f(-v - a\zeta, \zeta) - f(v + a\zeta, \zeta)] d\zeta) - \\
& - \gamma_2(-v/a)((\beta_1 + a\alpha_1)(a\varphi'(-v) + \psi(-v)) + \\
& + a\alpha_1 \int_0^{-v/a} [f(-v - a\zeta, \zeta) + f(v + a\zeta, \zeta)] d\zeta + \\
& + \beta_1 \int_0^{-v/a} [f(-v - a\zeta, \zeta) - f(v + a\zeta, \zeta)] d\zeta + \\
& + \gamma_1(a(\varphi(-v) + \varphi(0)) + \\
& + \int_0^{-v} \psi(\zeta) d\zeta + \int_0^{-v/a} \int_{v+a\zeta}^{-v-a\zeta} f(\theta, \zeta) d\theta d\zeta)) dv \Big\} d\tau.
\end{aligned} \tag{20}$$

Пока эти решения u_2 еще содержат произвольную постоянную $h'(0)$.

Найдем значение этой постоянной $h'(0)$ на основании необходимости совпадения частных производных первого порядка от u_2 и u_1 на ха-

рактеристике $x = at$. Поскольку для классических решений $u(x, t) \in C^2(G)$ задачи (1)–(3) значения решений u_2 на характеристике $x = at$ из G должны совпадать с предельными значениями единственных решений u_1 из G_1 на характеристике $x = at$ вместе со всеми своими частными производными до второго порядка включительно, то разности значений решений (20) и предельных значений решения (4) и их частных производных на характеристике $x = at$ соответственно равны:

$$\begin{aligned}
& u_2|_{x=at} - u_1|_{x=at} = 0, \\
& \frac{\partial u_2}{\partial t} \Big|_{x=at} - \frac{\partial u_1}{\partial t} \Big|_{x=at} = \frac{a\varphi'(0) - \psi(0)}{2} - ah'(0), \tag{21} \\
& \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=at} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=at} = h'(0) - \frac{a\varphi'(0) - \psi(0)}{2a}, \\
& \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \Big|_{x=at} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \Big|_{x=at} = \frac{a^2(a\alpha_1 - \beta_1)}{a\alpha_2(0) - \beta_2(0)}(\mu(0) - \\
& - \alpha_1(\alpha_2(0)(a^2\varphi''(0) + f(0,0)) + \beta_2(0)\psi'(0) + \frac{\gamma_2(0)}{2}(\psi(0) + a(\varphi'(0) - 2h'(0)))) - \\
& - \beta_1\left(\alpha_2(0)\psi'(0) + \beta_2(0)\varphi''(0) + \frac{1}{2a}\gamma_2(0)(a(\varphi'(0) + 2h'(0)) + \psi(0))\right) - \\
& - \gamma_1\left(\frac{1}{2}\alpha_2(0)(a(\varphi'(0) - h'(0)) + \psi(0)) + \frac{1}{2a}\beta_2(0)(a(\varphi'(0) + h'(0)) + \psi(0)) + \gamma_2(0)\varphi(0)\right), \\
& \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \Big|_{x=at} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \Big|_{x=at} = \frac{a\alpha_1 - \beta_1}{a\alpha_2(0) - \beta_2(0)}(\mu(0) - \\
& - \alpha_1(\alpha_2(0)(a^2\varphi''(0) + f(0,0)) + \beta_2(0)\psi'(0) + \frac{\gamma_2(0)}{2}(\psi(0) + a(\varphi'(0) - 2h'(0)))) - \\
& - \beta_1\left(\alpha_2(0)\psi'(0) + \beta_2(0)\varphi''(0) + \frac{1}{2a}\gamma_2(0)(a(\varphi'(0) + 2h'(0)) + \psi(0))\right) - \\
& - \gamma_1\left(\frac{1}{2}\alpha_2(0)(a(\varphi'(0) - h'(0)) + \psi(0)) + \frac{1}{2a}\beta_2(0)(a(\varphi'(0) + h'(0)) + \psi(0)) + \gamma_2(0)\varphi(0)\right), \\
& \frac{\partial^2 u_2}{\partial t \partial x} \Big|_{x=at} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial x} \Big|_{x=at} = \frac{a(\beta_1 - a\alpha_1)}{a\alpha_2(0) - \beta_2(0)}(\mu(0) - \\
& - \alpha_1(\alpha_2(0)(a^2\varphi''(0) + f(0,0)) + \beta_2(0)\psi'(0) + \frac{\gamma_2(0)}{2}(\psi(0) + a(\varphi'(0) - 2h'(0)))) - \\
& - \beta_1\left(\alpha_2(0)\psi'(0) + \beta_2(0)\varphi''(0) + \frac{1}{2a}\gamma_2(0)(a(\varphi'(0) + 2h'(0)) + \psi(0))\right) - \\
& - \gamma_1\left(\frac{1}{2}\alpha_2(0)(a(\varphi'(0) - h'(0)) + \psi(0)) + \frac{1}{2a}\beta_2(0)(a(\varphi'(0) + h'(0)) + \psi(0)) + \gamma_2(0)\varphi(0)\right).
\end{aligned}$$

Поскольку для классических решений разность (21) предельных значений первой частной производной по t от решений u_2 и первой частной производной по t от решения u_1 на характеристике $x = at$ должна равняться нулю, то из формулы (21) находим единственное значение постоянной

$$h'(0) = \frac{a\varphi'(0) - \psi(0)}{2a}. \quad (22)$$

Подставив выражение (22) постоянной $h'(0)$ и выражение постоянной Y из (8) в указанные выше разности на характеристике $x = at$, получаем соотношения

$$\begin{aligned} u_2|_{x=at} - u_1|_{x=at} &= \frac{\partial u_2}{\partial t}\bigg|_{x=at} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\bigg|_{x=at} = \frac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x=at} - \frac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x=at} = 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\bigg|_{x=at} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\bigg|_{x=at} &= \\ &= a^2 \frac{\mu(0) - Y}{(a\alpha_1 - \beta_1)(a\alpha_2(0) - \beta_2(0))}, \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\bigg|_{x=at} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\bigg|_{x=at} = \\ &= \frac{\mu(0) - Y}{(a\alpha_1 - \beta_1)(a\alpha_2(0) - \beta_2(0))}, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t \partial x}\bigg|_{x=at} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial x}\bigg|_{x=at} &= a \frac{Y - \mu(0)}{(a\alpha_1 - \beta_1)(a\alpha_2(0) - \beta_2(0))}. \end{aligned}$$

Из этих соотношений следует, что если выполняется условие согласования (8), то значения единственных решений u_2 на характеристике $x = at$ множества G_2 совпадают с предельными значениями решений u_1 из G_1 на характеристике $x = at$ вместе со всеми своими частными производными до второго порядка включительно. Поэтому решения (20) смешанной задачи (1)–(3) на множестве G_2 при значении $h'(0)$ из (22) приобретают вид (5).

Наконец, непосредственно проверяется, что если правая часть f , начальные данные φ , ψ и граничное данное μ удовлетворяют условиям гладкости (6), (7), то решения u_2 вида (5) на множестве G_2 имеют гладкость классических решений $u \in C^2(G_2)$ смешанной задачи (1)–(3). Итак, достаточность условий (6)–(8) для существования единственных классических решений (4), (5) смешанной задачи (1)–(3) в G установлена.

Необходимость условий (6)–(8) для однозначной разрешимости смешанной задачи (1)–(3) непосредственно вытекает из уравнения (1), начальных условий (2), граничного условия (3), определения классических решений $u \in C^2(G)$ и обосновывается так же, как в [2]. Наша теорема доказана.

Заключение. В настоящей работе впервые найдены в явном виде классические решения смешанной задачи (1)–(3), которые выражаются формулами (4) и (5) на множествах G_1 и G_2 соответственно. Из этих формул видна их непрерывная зависимость от исходных данных задачи f , φ , ψ и μ в топологии равномерной сходимости, т.е. задача (1)–(3) является корректной по Адамару в соответствующей паре пространств решений и исходных данных. Установлены необходимые и достаточные условия (6)–(8) существования, единственности и устойчивости ее классических решений. Условия (6), (7) представляют собой необходимые и достаточные требования гладкости на правую часть уравнения, начальные данные и граничное данное. Они обеспечивают дважды непрерывную дифференцируемость решений этой задачи. Условие (8) является требованием согласования начальных условий (2) с граничным условием (3) и уравнением (1). Оно позволяет нам гладко «сшить» решения (4) и (5) вдоль характеристики $x = at$.

Замечание. Граничное условие (3) со второй косой производной при $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 1$ настоящей работы становится граничным условием (3) с первой косой производной статьи [2]. В этом исследовании одно из необходимых и достаточных условий (10) на правую часть f уравнения (1) для однозначной разрешимости во множестве классических решений смешанной задачи (1)–(3) с первой косой производной в нестационарном граничном условии (3) выполняется ввиду условия (9). Чтобы в этом убедиться, достаточно в (10) сделать замену $t' = x - (t/a)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барановская, С.Н. Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косой производной в краевом условии / С.Н. Барановская, Н.И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 8. – С. 1188–1191.
2. Ломовцев, Ф.Е. Метод Дюамеля решения неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны с косой производной в нестационарном граничном условии / Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков // Вестн. Белорус. гос. ун-та. – 2012. – Сер. I, № 1. – С. 83–86.
3. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: МГУ, 2004. – 498 с.

REFERENCES

1. Baranovskaya S.N., Yurchuk N.I. Differ. uravneniya [Differential Equations], 2009, 45(8), pp. 1188–1191.
2. Lomovtsev F. E., Novikov E.N. Vestn. Belarus. Gos. Univ. [Journal of Belarusian State University], 2012, 1(1), pp. 83–86.
3. Tikhonov A.N., Samarsky A.A. Uravneniya matematicheskoi fiziki [Equations of Mathematical Physics], M.: MGU, 2004, 498 p.

Поступила в редакцию 21.02.2014. Принята в печать 21.04.2014.
Адрес для корреспонденции: e-mail: lomovtsev@bsu.by – Ломовцев Ф.Е.