Матэматыка

УДК 517.956.3

Классические решения неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны с полунестационарной второй косой производной в граничном условии

Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков
Белорусский государственный университет

Получены в явном виде классические решения уравнения $u_{tt}(x,t)-a^2u_{xx}(x,t)=f(x,t)$, $a>0$, $x\ge 0$, $t\ge 0$, *при начальных условиях* $u|_{t=0}=\phi(x)$, $u_t|_{t=0}=\psi(x)$, $0\le x<\infty$, *и граничном условии*

$$\left[\left(\alpha_2(t)\frac{\partial}{\partial t}+\beta_2(t)\frac{\partial}{\partial x}+\gamma_2(t)\right)\left(\alpha_1\frac{\partial u}{\partial t}+\beta_1\frac{\partial u}{\partial x}+\gamma_1 u\right)\right]\Bigg|_{x=0}=\mu(t),\ 0\le t<\infty,$$

где функции $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2\in C[0,\infty[$ *непрерывны и* $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ *– вещественные постоянные. Рассмотрен случай граничного условия с нехарактеристическими направлениями первых косых производных, т.е.* $a\alpha_i\ne\beta_i$, $t\in[0,\infty[$, $i=1,2$. *Впервые для существования и единственности классических решений этой смешанной задачи для уравнения колебаний полуограниченной струны выведены необходимые и достаточные условия на правую часть уравнения, начальные данные и граничное данное:*

$$f\in C(G),\varphi\in C^2[0,\infty[,\psi\in C^1[0,\infty[,\mu\in C[0,\infty[,\ \int_0^t f^{(1,0)}(x\pm a(t-\tau),\tau)\,d\tau\in C(G),$$

$$\beta_1[\alpha_2(0)\psi'(0)+\beta_2(0)\varphi''(0)+\gamma_2(0)\varphi'(0)]+\gamma_1[\alpha_2(0)\psi(0)+\beta_2(0)\varphi'(0)+\gamma_2(0)\varphi(0)]+$$
$$+\alpha_1[\alpha_2(0)(a^2\varphi''(0)+f(0,0))+\beta_2(0)\psi'(0)+\gamma_2(0)\psi(0)]=\mu(0),$$

где множество $G=[0,\infty[\times[0,\infty[$ *и* $f^{(1,0)}(y,\tau)$ *– первая частная производная от* f *по* y.

Classical Solutions of Inhomogeneous Vibration Equation of a Semibounded String with Semi-Nonstationary Second Directional Derivative in the Boundary Condition

F.E. Lomovtsev, E.N. Novikov
Belarusian State University

We obtain a closed-form expression for the classical solutions of the equation $u_{tt}(x,t)-a^2u_{xx}(x,t)=f(x,t)$, $a>0$, $x\ge 0$, $t\ge 0$, *with the initial conditions* $u|_{t=0}=\phi(x)$, $u_t|_{t=0}=\psi(x)$, $0\le x<\infty$, *and the boundary condition*

$$\left[\left(\alpha_2(t)\frac{\partial}{\partial t}+\beta_2(t)\frac{\partial}{\partial x}+\gamma_2(t)\right)\left(\alpha_1\frac{\partial u}{\partial t}+\beta_1\frac{\partial u}{\partial x}+\gamma_1 u\right)\right]\Bigg|_{x=0}=\mu(t),\ 0\le t<\infty,$$

where a functions $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2\in C[0,\infty[$ *are continuous and* $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ *are a real constants. We consider the case of the boundary condition with the first directional derivatives, not directed along the characteristics, i.e.* $a\alpha_i\ne\beta_i$, $t\in[0,\infty[$, $i=1,2$. *For the first time for the unique solvability of this mixed problem for vibration equation of a semibounded string we derive the necessary and sufficient conditions on the right-hand side, the initial data and the boundary data:*

$$f \in C(G), \varphi \in C^2[0,\infty[, \psi \in C^1[0,\infty[, \mu \in C[0,\infty[, \ \int_0^t f^{(1,0)}(x \pm a(t-\tau),\tau)\,d\tau \in C(G),$$

$$\beta_1[\alpha_2(0)\psi'(0) + \beta_2(0)\varphi''(0) + \gamma_2(0)\varphi'(0)] + \gamma_1[\alpha_2(0)\psi(0) + \beta_2(0)\varphi'(0) + \gamma_2(0)\varphi(0)] +$$
$$+\alpha_1[\alpha_2(0)(a^2\varphi''(0) + f(0,0)) + \beta_2(0)\psi'(0) + \gamma_2(0)\psi(0)] = \mu(0),$$

where a set G *is* $[0,\infty[\times[0,\infty[$ *and* $f^{(1,0)}(y,\tau)$ *is a first partial derivative of* f *on* y.

В настоящей работе впервые получены в явном виде классические решения смешанной задачи для неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны при второй факторизованной косой производной в граничном условии, в котором коэффициенты первой косой производной не зависят от времени, а также для ее однозначной разрешимости найдены необходимые и достаточные условия на правую часть уравнения, начальные данные и граничное данное. Эти условия состоят из необходимых и достаточных требований гладкости на правую часть уравнения, начальные данные и граничное данное и необходимого и достаточного требования согласования начальных условий с граничным условием и уравнением. Нами рассмотрен случай, когда в граничном условии вторая косая производная представима в виде произведения двух первых косых производных и направления обеих первых косых производных не являются характеристическими. Вторая косая производная в граничном условии выражает наличие на конечном конце струны динамической силы, сопротивления среды, пропорционального его смещению, скорости и ускорению. Явная формула классических решений смешанной задачи для однородного уравнения колебаний полуограниченной струны с зависящей от времени первой косой производной в граничном условии и для их существования и единственности достаточные условия на начальные данные и граничное данное найдены в [1]. Явная формула классических решений смешанной задачи для неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны с зависящей от времени первой косой производной в граничном условии, а также для их существования и единственности необходимые и достаточные условия на правую часть уравнения, начальные данные и граничное данное были установлены в [2].

Материал и методы. В первой четверти плоскости $G = [0,\infty[\times[0,\infty[$ решается смешанная задача:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t),\ a > 0,\ \{x,t\} \in G, \quad (1)$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x),\ 0 \le x < \infty, \quad (2)$$

$$\left(\left(\alpha_2(t)\frac{\partial}{\partial t} + \beta_2(t)\frac{\partial}{\partial x} + \gamma_2(t)\right)\left(\alpha_1\frac{\partial u}{\partial t} + \beta_1\frac{\partial u}{\partial x} + \gamma_1 u\right)\right)\bigg|_{x=0} = \mu(t),$$

$$0 \le t < \infty, \quad (3)$$

где правая часть f, начальные данные φ, ψ, граничное данное μ, коэффициенты $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ – заданные функции своих независимых переменных x, t и $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – вещественные постоянные. Эту смешанную задачу мы решаем методом характеристик и методом Дюамеля.

Результаты и их обсуждение. Множество G делится характеристикой $x = at$ на два множества:

$$G_1 = \{(x,t) \in G : x > at\},\ G_2 = \{(x,t) \in G : x \le at\}.$$

Пусть $C^k(G)$ – множество всех $k \ge 1$ раз непрерывно дифференцируемых функций на множестве G, $C(G)$ – множество всех непрерывных функций на $G \subset \mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}$ – вещественная прямая.

Теорема. *Пусть функции* $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in C[0,\infty[$ *и* $a\alpha_i \ne \beta_i$, $t \in [0,\infty[$, $i = 1, 2$. *Смешанная задача (1)–(3) имеет единственные классические решения* $u(x,t) \in C^2(G)$ *вида*

$$u_1(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau)\,ds\,d\tau, \quad (4)$$
$$\{x,t\} \in G_1,$$

$$u_2(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(0)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\psi(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau)\,ds\,d\tau +$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^{x-at}\frac{e^{\frac{\gamma_1(\tau-x+at)}{\beta_1-a\alpha_1}}}{\beta_1-a\alpha_1}\Bigg\{(\beta_1-a\alpha_1)(a\varphi'(0)-\psi(0))e^{\int_0^{\tau}\frac{\gamma_2(t-s+a)}{\beta_2(t-s+a)-a\alpha_2(t-s+a)^2}ds} +$$

$$+\int_0^{\tau}\left(\beta_2\left(\frac{-\nu}{a}\right)-a\alpha_2\left(\frac{-\nu}{a}\right)\right)^{-1} e^{\int_{\tau}^{\nu}\frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a)-a\alpha_2(-s/a)}ds}\left(2a\mu\left(-\frac{\nu}{a}\right)-\right.$$

$$-\alpha_2\left(-\frac{\nu}{a}\right)\Big((\beta_1+a\alpha_1)\left(a^2\varphi''(-\nu)+a\psi'(-\nu)\right)+2a\alpha_1 f\left(0,-\frac{\nu}{a}\right)+$$

$$+a^2\alpha_1\int_0^{-\nu/a}[f^{(1,0)}(-\nu-a\varsigma,\varsigma)-f^{(1,0)}(\nu+a\varsigma,\varsigma)]d\varsigma+$$

$$+a\beta_1\int_0^{-\nu/a}[f^{(1,0)}(-\nu-a\varsigma,\varsigma)+f^{(1,0)}(\nu+a\varsigma,\varsigma)]d\varsigma+$$

$$+a\gamma_1\left(a\varphi'(-\nu)+\psi(-\nu)+\int_0^{-\nu/a}[f(-\nu-a\varsigma,\varsigma)+f(\nu+a\varsigma,\varsigma)]d\varsigma\right)\Big)-$$

$$-\beta_2\left(\frac{-\nu}{a}\right)\Big((\beta_1+a\alpha_1)\left(a\varphi''(-\nu)+\psi'(-\nu)\right)+$$

$$+a\alpha_1\int_0^{-\nu/a}[f^{(1,0)}(-\nu-a\varsigma,\varsigma)+f^{(1,0)}(\nu+a\varsigma,\varsigma)]d\varsigma+$$

$$+\beta_1\int_0^{-\nu/a}[f^{(1,0)}(-\nu-a\varsigma,\varsigma)-f^{(1,0)}(\nu+a\varsigma,\varsigma)]d\varsigma+$$

$$+\gamma_1\left(a\varphi'(-\nu)+\psi(-\nu)+\int_0^{-\nu/a}[f(-\nu-a\varsigma,\varsigma)-f(\nu+a\varsigma,\varsigma)]d\varsigma\right)\Big)-$$

$$-\gamma_2\left(\frac{-\nu}{a}\right)\Big((\beta_1+a\alpha_1)\left(a\varphi'(-\nu)+\psi(-\nu)\right)+$$

$$+a\alpha_1\int_0^{-\nu/a}[f(-\nu-a\varsigma,\varsigma)+$$

$$+f(\nu+a\varsigma,\varsigma)]d\varsigma+\beta_1\int_0^{-\nu/a}[f(-\nu-a\varsigma,\varsigma)-f(\nu+a\varsigma,\varsigma)]d\varsigma+$$

$$+\gamma_1\Big(a\left(\varphi(-\nu)+\varphi(0)\right)+\int_0^{-\nu}\psi(\varsigma)\,d\varsigma+$$

$$\left.\left.+\int_0^{-\nu/a}\int_{\nu+a\varsigma}^{-\nu-a\varsigma}f(s,\varsigma)ds\,d\varsigma\Big)\Big)d\nu\right\}d\tau,\{x,t\}\in G_2 \qquad (5)$$

тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$f\in C(G),\varphi\in C^2[0,\infty[,\psi\in C^1[0,\infty[,\mu\in C[0,\infty[, \qquad (6)$$

$$\int_0^t f^{(1,0)}\left(x\pm a(t-\tau),\tau\right)d\tau\in C(G), \qquad (7)$$

$$\begin{aligned}\Upsilon\equiv{}&\beta_1[\alpha_2(0)\psi'(0)+\beta_2(0)\varphi''(0)+\gamma_2(0)\varphi'(0)]+\\&]+\gamma_1[\alpha_2(0)\psi(0)+\beta_2(0)\varphi'(0)+\gamma_2(0)\varphi(0)]+\\&+\alpha_1[\alpha_2(0)(a^2\varphi''(0)+f(0,0))+\\&+\beta_2(0)\psi'(0)+\gamma_2(0)\psi(0)]=\mu(0),\end{aligned} \qquad (8)$$

где одним и двумя штрихами над функциями обозначены соответственно первая и вторая производные этих функций, а $f^{(1,0)}(y,s)$ *– первая частная производная по* y.

Доказательство. Достаточность. Сначала мы ищем решение смешанной задачи (1)–(3) в нижнем углу G_1 в виде решения задачи Коши (1), (2) в G_1. Нетрудно показать, что для любых функций f, φ и ψ, удовлетворяющих условиям (6), (7), единственные классические решения задачи Коши (1), (2) в G_1 выражаются известной полной формулой Даламбера (4) [3, с. 64].

Теперь мы ищем решение смешанной задачи (1)–(3) в верхнем углу G_2 в виде решения задачи Дарбу для уравнения (1) в G_2 при граничном условии (3) на одной стороне $x=0$ и граничном условии первого рода на другой стороне угла G_2.

Согласно методу характеристик и методу Дюамеля общее решение неоднородного уравнения (1) на множестве G_2 имеет вид

$$u(x,t)=g(x+at)+h(x-at)+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(s,\tau)\,ds\,d\tau, \qquad (9)$$

где g и h – любые дважды непрерывно дифференцируемые функции в G_2, а f удовлетворяет условиям (6), (7). Значения решений (9) на характеристике $x=at$ должны совпадать со значениями непрерывных продолжений классических решений (4) из множества G_1 на характеристику $x=at$, и еще сами решения (9) должны удовлетворять граничному условию (3) при $x=0$. В результате получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}g(2at)+h(0)=\dfrac{\varphi(2at)+\varphi(0)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^{2at}\psi(\tau)d\tau,\\ \Big\{\Big(\alpha_2(t)\dfrac{\partial}{\partial t}+\beta_2(t)\dfrac{\partial}{\partial x}+\gamma_2(t)\Big)\Big(\alpha_1\big(\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t[f(x+a(t-\tau),\tau)+f(x-a(\tau-t),\tau)]d\tau+\\ +ag'(x+at)-ah'(x-at)\big)+\beta_1\big(\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^t[f(x+a(t-\tau),\tau)-f(x-a(\tau-t),\tau)]d\tau+\\ +g'(x+at)+h'(x-at)\big)+\gamma_1\Big(g(x+at)+h(x-at)+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(s,\tau)ds\,d\tau\Big)\Big)\Big\}\Big|_{x=0}=\mu(t)\end{cases} \qquad (10)$$

относительно неизвестных функций g и h.

Из первого уравнения этой системы заменой переменной $2at=z$ находим функцию

$$g(z)=\frac{\varphi(z)+\varphi(0)}{2}+\frac{1}{2a}\int_0^z\psi(\tau)\,d\tau-h(0),\ z\ge 0. \quad (11)$$

Подставляем ее значение при $z=x+at$ во второе уравнение системы (10) и после переноса всех слагаемых, не содержащих неизвестную функцию h, вправо приходим к дифференциальному уравнению первого порядка

$$\left\{\left(\alpha_2(t)\frac{\partial}{\partial t}+\beta_2(t)\frac{\partial}{\partial x}+\gamma_2(t)\right)\left((\beta_1-a\alpha_1)h'(x-at)+\gamma_1 h(x-at)\right)\right\}\Big|_{x=0}=$$
$$=P(t) \quad (12)$$

относительно функции h с правой частью

$$P(t)=\mu(t)-$$
$$-\frac{1}{2a}\Bigg\{\alpha_2(t)\Bigg(a^2\alpha_1\int_0^t[f^{(1,0)}(a(t-\tau),\tau)-f^{(1,0)}(a(\tau-t),\tau)]d\tau+2a\alpha_1 f(0,t)+$$
$$+(\beta_1+a\alpha_1)(a^2\varphi''(at)+a\psi'(at))+$$
$$+a\beta_1\int_0^t[f^{(1,0)}(a(t-\tau),\tau)+f^{(1,0)}(a(\tau-t),\tau)]d\tau+$$
$$+a\gamma_1\left(a\varphi'(at)+\psi(at)+\int_0^t[f(a(t-\tau),\tau)+f(a(\tau-t),\tau)]d\tau\right)\Bigg)-$$
$$-\beta_2(t)\Bigg(a\alpha_1\int_0^t[f^{(1,0)}(a(t-\tau),\tau)+f^{(1,0)}(a(\tau-t),\tau)]d\tau+$$
$$+(\beta_1+a\alpha_1)(a\varphi''(at)+\psi'(at))+$$
$$+\beta_1\int_0^t[f^{(1,0)}(a(t-\tau),\tau)-f^{(1,0)}(a(\tau-t),\tau)]d\tau+$$
$$+\gamma_1\left(a\varphi'(at)+\psi(at)+\int_0^t[f(a(t-\tau),\tau)-f(a(\tau-t),\tau)]d\tau\right)\Bigg)-$$
$$-\gamma_2(t)\Bigg(a\alpha_1\int_0^t[f(a(t-\tau),\tau)+f(a(\tau-t),\tau)]d\tau+$$
$$+(\beta_1+a\alpha_1)(a\varphi'(at)+\psi(at))+$$
$$+\beta_1\int_0^t[f(a(t-\tau),\tau)-f(a(\tau-t),\tau)]d\tau+$$
$$+\gamma_1\left(a(\varphi(at)+\varphi(0))+\int_0^{at}\psi(\tau)d\tau+\int_0^t\int_{a(\tau-t)}^{a(t-\tau)}f(s,\tau)\,ds\,d\tau-h(0)\right)\Bigg)\Bigg\}.$$

В силу постоянных коэффициентов $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ уравнение (12) заменой неизвестной функции

$$H(x-at)=(\beta_1-a\alpha_1)h'(x-at)+\gamma_1 h(x-at) \quad (13)$$

сводится к следующему виду:

$$\left\{\left(\alpha_2(t)\frac{\partial}{\partial t}+\beta_2(t)\frac{\partial}{\partial x}+\gamma_2(t)\right)H(x-at)\right\}\Big|_{x=0}=$$
$$=(\beta_2(t)-a\alpha_2(t))H'(-at)+\gamma_2(t)H(-at)=P(t).$$

Отсюда заменой независимой переменной $z=-at\le 0$ имеем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно новой неизвестной функции $H(z)$

$$(\beta_2(-z/a)-a\alpha_2(-z/a))H'(z)+$$
$$+\gamma_2(-z/a)H(z)=P(-z/a). \quad (14)$$

Делим левую и правую части последнего уравнения на $\beta_2(-z/a)-a\alpha_2(-z/a)$, умножаем его на интегрирующий множитель

$$\sigma_1(z)=\exp\left\{\int_0^z\frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a)-a\alpha_2(-s/a)}\,ds\right\}$$

и получаем простейшее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\left(H(z)e^{\int_0^z\frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a)-a\alpha_2(-s/a)}ds}\right)'=$$
$$=\frac{P(-z/a)e^{\int_0^z\frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a)-a\alpha_2(-s/a)}ds}}{\beta_2(-z/a)-a\alpha_2(-z/a)}.$$

Интегрируя это уравнение по z, имеем общее решение уравнения (14)

$$H(z)=\int_0^z\frac{P(-\nu/a)e^{\int_z^\nu\frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a)-a\alpha_2(-s/a)}ds}}{\beta_2(-\nu/a)-a\alpha_2(-\nu/a)}d\nu+$$
$$+C_1e^{\int_z^0\frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a)-a\alpha_2(-s/a)}ds},$$

из которого при $z=0$ находим значения произвольной постоянной

$$C_1 = H(0) = (\beta_1 - a\alpha_1)h'(0) + \gamma_1 h(0).$$

Возвращаясь здесь от функции H к функции h, ввиду замены (13) имеем еще одно обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка уже относительно h:

$$(\beta_1 - a\alpha_1)h'(z) + \gamma_1 h(z) = \int_0^z \frac{P(-\nu/a)e^{\int_z^\nu \frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a)-a\alpha_2(-s/a)}ds}}{\beta_2(-\nu/a)-a\alpha_2(-\nu/a)}d\nu +$$

$$+\left((\beta_1 - a\alpha_1)h'(0) + \gamma_1 h(0)\right)e^{\int_z^0 \frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a)-a\alpha_2(-s/a)}ds}. \quad (15)$$

Делим обе части этого уравнения на $\beta_1 - a\alpha_1$, умножаем его на интегрирующий множитель $\sigma_2(z) = \exp\{\gamma_1 z/(\beta_1 - a\alpha_1)\}$ и получаем простейшее дифференциальное уравнение

$$\left(h(z)e^{\frac{\gamma_1 z}{\beta_1 - a\alpha_1}}\right)' = \frac{e^{\frac{\gamma_1 z}{\beta_1 - a\alpha_1}}}{\beta_1 - a\alpha_1}\left(\int_0^z \frac{P(-\eta/a)e^{\int_z^\eta \frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a)-a\alpha_2(-s/a)}ds}}{\beta_2(-\eta/a)-a\alpha_2(-\eta/a)}d\eta +\right.$$

$$\left.+\left((\beta_1 - a\alpha_1)h'(0) + \gamma_1 h(0)\right)e^{\int_z^0 \frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a)-a\alpha_2(-s/a)}ds}\right).$$

Интегрируя его по z, выводим общее решение уравнения (15)

$$h(z) = \int_0^z \frac{e^{\frac{\gamma_1(\tau - z)}{\beta_1 - a\alpha_1}}}{\beta_1 - a\alpha_1}\left(\int_0^\tau \frac{P(-\nu/a)e^{\int_\tau^\nu \frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a)-a\alpha_2(-s/a)}ds}}{\beta_2(-\nu/a)-a\alpha_2(-\nu/a)}d\nu +\right.$$

$$\left.+\left((\beta_1 - a\alpha_1)h'(0) + \gamma_1 h(0)\right)e^{\int_\tau^0 \frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a)-a\alpha_2(-s/a)}ds}\right)d\tau +$$

$$+ C_2 e^{\frac{-\gamma_1 z}{\beta_1 - a\alpha_1}}, \quad (16)$$

из которого при $z=0$ находим значения произвольной постоянной $C_2 = h(0)$.

Подставляем найденные функции g и h в общее решение (9) и согласно формулам (11), (16) при $C_1 = (\beta_1 - a\alpha_1)h'(0) + \gamma_1 h(0)$ и $C_2 = h(0)$ во множестве G_2 получаем решения

$$u_2(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(0)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\psi(\tau)d\tau -$$

$$-h(0) + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau)ds\,d\tau + h(0)e^{\frac{\gamma_1(at-x)}{\beta_1 - a\alpha_1}} +$$

$$+\int_0^{x-at}\frac{e^{\frac{\gamma_1(\tau+at-x)}{\beta_1-a\alpha_1}}}{\beta_1 - a\alpha_1}\times$$

$$\times\left\{2a\left((\beta_1 - a\alpha_1)h'(0) + \gamma_1 h(0)\right)e^{\int_\tau^0 \gamma_2(-s/a)(\beta_2(-s/a)-a\alpha_2(-s/a))^{-1}ds} +\right.$$

$$+\int_0^\tau\left(\beta_2\left(\frac{-\nu}{a}\right) - a\alpha_2\left(\frac{-\nu}{a}\right)\right)^{-1}\times$$

$$\times e^{\int_\tau^\nu \gamma_2(-s/a)(\beta_2(-s/a)-a\alpha_2(-s/a))^{-1}ds}\left(2a\mu\left(\frac{-\nu}{a}\right) -\right.$$

$$-\alpha_2\left(\frac{-\nu}{a}\right)\left((\beta_1 + a\alpha_1)(a^2\varphi''(-\nu) +\right.$$

$$+a\psi'(-\nu)) + 2a\alpha_1 f\left(0, \frac{-\nu}{a}\right) +$$

$$+a^2\alpha_1\int_0^{-\nu/a}[f^{(1,0)}(-\nu - a\varsigma,\varsigma) - f^{(1,0)}(\nu + a\varsigma,\varsigma)]d\varsigma +$$

$$+a\beta_1\int_0^{-\nu/a}[f^{(1,0)}(-\nu - a\varsigma,\varsigma) + f^{(1,0)}(\nu + a\varsigma,\varsigma)]d\varsigma +$$

$$+a\gamma_1(a\varphi'(-\nu) + \psi(-\nu) + \int_0^{-\nu/a}[f(-\nu - a\varsigma,\varsigma) +$$

$$+f(\nu + a\varsigma,\varsigma)]d\varsigma)) -$$

$$-\beta_2\left(\frac{-\nu}{a}\right)\left((\beta_1 + a\alpha_1)(a\varphi''(-\nu) + \psi'(-\nu)) +\right.$$

$$+a\alpha_1\int_0^{-\nu/a}[f^{(1,0)}(-\nu - a\varsigma,\varsigma) + f^{(1,0)}(\nu + a\varsigma,\varsigma)]d\varsigma +$$

$$+\beta_1\int_0^{-\nu/a}[f^{(1,0)}(-\nu - a\varsigma,\varsigma) - f^{(1,0)}(\nu + a\varsigma,\varsigma)]d\varsigma +$$

$$\left.\left.+\gamma_1\left(a\varphi'(-\nu) + \psi(-\nu) + \int_0^{-\nu/a}[f(-\nu - a\varsigma,\varsigma) - f(\nu + a\varsigma,\varsigma)]d\varsigma\right)\right) -$$

$$-\gamma_2\left(\frac{-\nu}{a}\right)\left((\beta_1 + a\alpha_1)(a\varphi'(-\nu) + \psi(-\nu)) +\right.$$

$$+a\alpha_1\int_0^{-\nu/a}[f(-\nu-a\varsigma,\varsigma)+f(\nu+a\varsigma,\varsigma)]d\varsigma+$$

$$+\beta_1\int_0^{-\nu/a}[f(-\nu-a\varsigma,\varsigma)-f(\nu+a\varsigma,\varsigma)]d\varsigma+$$

$$+\gamma_1\left(a(\varphi(-\nu)+\varphi(0))+\int_0^{-\nu}\psi(\varsigma)d\varsigma-\right.$$

$$\left.-h(0)+\int_0^{-\nu/a}\int_{\nu+a\varsigma}^{-\nu-a\varsigma}f(s,\varsigma)\,ds\,d\varsigma\right)\Bigg)d\nu\Bigg\}d\tau. \qquad (17)$$

Эти решения содержат, вообще говоря, произвольные постоянные $h(0)$ и $h'(0)$.

В первую очередь, убедимся в том, что сумма всех слагаемых, содержащих множитель $h(0)$, равна нулю, т.е. в формуле (17) для суммы этих коэффициентов при любом значении множителя $h(0)$ имеет место равенство

$$h(0)e^{\frac{\gamma_1(at-x)}{\beta_1-a\alpha_1}}-h(0)+$$

$$+h(0)\int_0^{x-at}\frac{e^{\frac{\gamma_1(\tau-x+at)}{\beta_1-a\alpha_1}}}{\beta_1-a\alpha_1}\left\{\gamma_1 e^{\int_\tau^0\frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a)-a\alpha_2(-s/a)}ds}+\right.$$

$$\left.+\int_0^\tau\frac{\gamma_2(-\nu/a)\gamma_1}{\beta_2(-\nu/a)-a\alpha_2(-\nu/a)}e^{\int_\tau^\nu\frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a)-a\alpha_2(-s/a)}ds}d\nu\right\}d\tau=0. \qquad (18)$$

В третьем слагаемом равенства (18) под интегралом выносим за фигурную скобку общий множитель $\gamma_1\exp\left\{\int_\tau^0\gamma_2(-s/a)(\beta_2(-s/a)-a\alpha_2(-s/a))^{-1}ds\right\}$, и левая часть этого равенства без общего множителя $h(0)$ приобретает вид

$$\left(e^{\frac{\gamma_1(at-x)}{\beta_1-a\alpha_1}}-1\right)+$$

$$+\int_0^{x-at}\frac{\gamma_1}{\beta_1-a\alpha_1}e^{\frac{\gamma_1(\tau-x+at)}{\beta_1-a\alpha_1}+\int_\tau^0\frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a)-a\alpha_2(-s/a)}ds}$$

$$\left\{1+\int_0^\tau\frac{\gamma_2(-\nu/a)\gamma_1}{\beta_2(-\nu/a)-a\alpha_2(-\nu/a)}e^{\int_0^\nu\frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a)-a\alpha_2(-s/a)}ds}d\nu\right\} \qquad (19)$$

Замечаем, что в третьем слагаемом под интегралом в фигурных скобках интеграл допускает представление

$$\int_0^\tau\frac{\gamma_2(-\nu/a)}{\beta_2(-\nu/a)-a\alpha_2(-\nu/a)}e^{\int_0^\nu\frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a)-a\alpha_2(-s/a)}ds}d\nu=$$

$$=\int_0^\tau\left(e^{\int_0^\nu\frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a)-a\alpha_2(-s/a)}ds}\right)'d\nu=e^{\int_0^\tau\frac{\gamma_2(-s/a)}{\beta_2(-s/a)-a\alpha_2(-s/a)}ds}-1.$$

Подставляем это представление интеграла в (19) и имеем выражение

$$\left(e^{\frac{\gamma_1(at-x)}{\beta_1-a\alpha_1}}-1\right)+e^{\frac{\gamma_1(at-x)}{\beta_1-a\alpha_1}}\int_0^{x-at}\frac{\gamma_1}{\beta_1-a\alpha_1}e^{\frac{\gamma_1\tau}{\beta_1-a\alpha_1}}d\tau.$$

Снова замечаем, что здесь в третьем слагаемом под интегралом возможно представление

$$\frac{\gamma_1}{\beta_1-a\alpha_1}e^{\frac{\gamma_1\tau}{\beta_1-a\alpha_1}}=\left(e^{\frac{\gamma_1\tau}{\beta_1-a\alpha_1}}\right)',$$

с помощью которого последнее выражение интегрированием приводится к выражению

$$\left(e^{\frac{\gamma_1(at-x)}{\beta_1-a\alpha_1}}-1\right)+\left(1-e^{\frac{\gamma_1(at-x)}{\beta_1-a\alpha_1}}\right)=0.$$

В силу доказанного нами равенства (18) решения u_2 приобретают вид

$$u_2(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(0)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\psi(\tau)d\tau+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(s,\tau)\,ds\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^{x-at}e^{x-at}\int_\tau^0\gamma_1(\beta_1-a\alpha_1)^{-1}ds(\beta_1-a\alpha_1)^{-1}\times$$

$$\times\left\{2a(\beta_1-a\alpha_1)h'(0)e^{\int_\tau^0\gamma_2(-s/a)(\beta_2(-s/a)-a\alpha_2(-s/a))^{-1}ds}+\right.$$

$$+\int_0^\tau(\beta_2(-\nu/a)-a\alpha_2(-\nu/a))^{-1}\cdot$$

$$e^{\int_\tau^\nu\gamma_2(-s/a)(\beta_2(-s/a)-a\alpha_2(-s/a))^{-1}ds}(2a\mu(-\nu/a)-$$

$$-\alpha_2(-\nu/a)((\beta_1+a\alpha_1)(a^2\varphi''(-\nu)+$$

$$+a\psi'(-\nu))+2a\alpha_1 f(0,-\nu/a)+$$

$$+a^2\alpha_1\int_0^{-\nu/a}[f^{(1,0)}(-\nu-a\varsigma,\varsigma)-$$

$$-f^{(1,0)}(\nu+a\varsigma,\varsigma)]d\varsigma+$$

$$+a\beta_1\int_0^{-\nu/a}[f^{(1,0)}(-\nu-a\varsigma,\varsigma)+f^{(1,0)}(\nu+a\varsigma,\varsigma)]d\varsigma+$$

$$+a\gamma_1(a\varphi'(-\nu)+\psi(-\nu)+$$

$$+\int_0^{-\nu/a}[f(-\nu-a\varsigma,\varsigma)+f(\nu+a\varsigma,\varsigma)]d\varsigma))-$$

$$-\beta_2(-\nu/a)((\beta_1+a\alpha_1)(a\varphi''(-\nu)+\psi'(-\nu))+$$

$$+a\alpha_1\int_0^{-\nu/a}[f^{(1,0)}(-\nu-a\varsigma,\varsigma)+f^{(1,0)}(\nu+a\varsigma,\varsigma)]d\varsigma+$$

$$+\beta_1\int_0^{-\nu/a}[f^{(1,0)}(-\nu-a\varsigma,\varsigma)-f^{(1,0)}(\nu+a\varsigma,\varsigma)]d\varsigma+$$

$$+\gamma_1(\varphi'(-\nu)+\psi(-\nu)+$$

$$+\int_0^{-\nu/a}[f(-\nu-a\varsigma,\varsigma)-f(\nu+a\varsigma,\varsigma)]d\varsigma))-$$

$$-\gamma_2(-\nu/a)((\beta_1+a\alpha_1)(a\varphi'(-\nu)+\psi(-\nu))+$$

$$+a\alpha_1\int_0^{-\nu/a}[f(-\nu-a\varsigma,\varsigma)+f(\nu+a\varsigma,\varsigma)]d\varsigma+,$$

$$+\beta_1\int_0^{-\nu/a}[f(-\nu-a\varsigma,\varsigma)-f(\nu+a\varsigma,\varsigma)]d\varsigma+$$

$$+\gamma_1(a(\varphi(-\nu)+\varphi(0))+$$

$$\left.+\int_0^{-\nu}\psi(\varsigma)d\varsigma+\int_0^{-\nu/a}\int_{\nu+a\varsigma}^{-\nu-a\varsigma}f(\theta,\varsigma)\,d\theta\,d\varsigma))\right)d\nu\Bigg\}d\tau. \qquad (20)$$

Пэка эти решения u_2 еще содержат произвольную постоянную $h'(0)$.

Найдем значение этой постоянной $h'(0)$ на основании необходимости совпадения частных производных первого порядка от u_2 и u_1 на характеристике $x = at$. Поскольку для классических решений $u(x,t)\in C^2(G)$ задачи (1)–(3) значения решений u_2 на характеристике $x = at$ из G_2 должны совпадать с предельными значениями единственных решений u_1 из G_1 на характеристике $x = at$ вместе со всеми своими частными производными до второго порядка включительно, то разности значений решений (20) и предельных значений решения (4) и их частных производных на характеристике $x = at$ соответственно равны:

$$u_2\big|_{x=at}-u_1\big|_{x=at}=0,$$

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial t}\right|_{x=at}-\left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{x=at}=\frac{a\varphi'(0)-\psi(0)}{2}-ah'(0), \qquad (21)$$

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=at}-\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=at}=h'(0)-\frac{a\varphi'(0)-\psi(0)}{2a},$$

$$\left.\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\right|_{x=at}-\left.\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right|_{x=at}=\frac{a^2(a\alpha_1-\beta_1)}{a\alpha_2(0)-\beta_2(0)}(\mu(0)-$$

$$-\alpha_1\left(\alpha_2(0)(a^2\varphi''(0)+f(0,0))+\beta_2(0)\psi'(0)+\frac{\gamma_2(0)}{2}(\psi(0)+a(\varphi'(0)-2h'(0)))\right)-$$

$$-\beta_1\left(\alpha_2(0)\psi'(0)+\beta_2(0)\varphi''(0)+\frac{1}{2a}\gamma_2(0)(a(\varphi'(0)+2h'(0))+\psi(0))\right)-$$

$$-\gamma_1\left(\frac{1}{2}\alpha_2(0)(a(\varphi'(0)-h'(0))+\psi(0))+\frac{1}{2a}\beta_2(0)(a(\varphi'(0)+h'(0))+\psi(0))+\gamma_2(0)\varphi(0)\right),$$

$$\left.\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right|_{x=at}-\left.\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right|_{x=at}=\frac{a\alpha_1-\beta_1}{a\alpha_2(0)-\beta_2(0)}(\mu(0)-$$

$$-\alpha_1\left(\alpha_2(0)(a^2\varphi''(0)+f(0,0))+\beta_2(0)\psi'(0)+\frac{\gamma_2(0)}{2}(\psi(0)+a(\varphi'(0)-2h'(0)))\right)-$$

$$-\beta_1\left(\alpha_2(0)\psi'(0)+\beta_2(0)\varphi''(0)+\frac{1}{2a}\gamma_2(0)(a(\varphi'(0)+2h'(0))+\psi(0))\right)-$$

$$-\gamma_1\left(\frac{1}{2}\alpha_2(0)(a(\varphi'(0)-h'(0))+\psi(0))+\frac{1}{2a}\beta_2(0)(a(\varphi'(0)+h'(0))+\psi(0))+\gamma_2(0)\varphi(0)\right).$$

$$\left.\frac{\partial^2 u_2}{\partial t\partial x}\right|_{x=at}-\left.\frac{\partial^2 u_1}{\partial t\partial x}\right|_{x=at}=\frac{a(\beta_1-a\alpha_1)}{a\alpha_2(0)-\beta_2(0)}(\mu(0)-$$

$$-\alpha_1\left(\alpha_2(0)(a^2\varphi''(0)+f(0,0))+\beta_2(0)\psi'(0)+\frac{\gamma_2(0)}{2}(\psi(0)+a(\varphi'(0)-2h'(0)))\right)-$$

$$-\beta_1\left(\alpha_2(0)\psi'(0)+\beta_2(0)\varphi''(0)+\frac{1}{2a}\gamma_2(0)(a(\varphi'(0)+2h'(0))+\psi(0))\right)-$$

$$-\gamma_1\left(\frac{1}{2}\alpha_2(0)(a(\varphi'(0)-h'(0))+\psi(0))+\frac{1}{2a}\beta_2(0)(a(\varphi'(0)+h'(0))+\psi(0))+\gamma_2(0)\varphi(0)\right).$$

Поскольку для классических решений разность (21) предельных значений первой частной производной по t от решений u_2 и первой частной производной по t от решения u_1 на характеристике $x = at$ должна равняться нулю, то из формулы (21) находим единственное значение постоянной

$$h'(0)=\frac{a\varphi'(0)-\psi(0)}{2a}. \qquad (22)$$

Подставив выражение (22) постоянной $h'(0)$ и выражение постоянной Y из (8) в указанные выше разности на характеристике $x = at$, получаем соотношения

$$u_2\big|_{x=at}-u_1\big|_{x=at}=\frac{\partial u_2}{\partial t}\bigg|_{x=at}-\frac{\partial u_1}{\partial t}\bigg|_{x=at}=\frac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x=at}-\frac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x=at}=0,$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\bigg|_{x=at}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\bigg|_{x=at}=$$

$$=a^2\frac{\mu(0)-Y}{(a\alpha_1-\beta_1)(a\alpha_2(0)-\beta_2(0))},\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\bigg|_{x=at}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\bigg|_{x=at}=$$

$$=\frac{\mu(0)-Y}{(a\alpha_1-\beta_1)(a\alpha_2(0)-\beta_2(0))},$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t\partial x}\bigg|_{x=at}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial t\partial x}\bigg|_{x=at}=a\frac{Y-\mu(0)}{(a\alpha_1-\beta_1)(a\alpha_2(0)-\beta_2(0))}.$$

Из этих соотношений следует, что если выполняется условие согласования (8), то значения единственных решений u_2 на характеристике $x = at$ множества G_2 совпадают с предельными значениями решений u_1 из G_1 на характеристике $x = at$ вместе со всеми своими частными производными до второго порядка включительно. Поэтому решения (20) смешанной задачи (1)–(3) на множестве G_2 при значении $h'(0)$ из (22) приобретают вид (5).

Наконец, непосредственно проверяется, что если правая часть f, начальные данные φ, ψ и граничное данное μ удовлетворяют условиям гладкости (6), (7), то решения u_2 вида (5) на множестве G_2 имеют гладкость классических решений $u\in C^2(G_2)$ смешанной задачи (1)–(3). Итак, достаточность условий (6)–(8) для существования единственных классических решений (4), (5) смешанной задачи (1)–(3) в G установлена.

Необходимость условий (6)–(8) для однозначной разрешимости смешанной задачи (1)–(3) непосредственно вытекает из уравнения (1), начальных условий (2), граничного условия (3), определения классических решений $u\in C^2(G)$ и обосновывается так же, как в [2]. Наша теорема доказана.

Заключение. В настоящей работе впервые найдены в явном виде классические решения смешанной задачи (1)–(3), которые выражаются формулами (4) и (5) на множествах G_1 и G_2 соответственно. Из этих формул видна их непрерывная зависимость от исходных данных задачи f, φ, ψ и μ в топологии равномерной сходимости, т.е. задача (1)–(3) является корректной по Адамару в соответствующей паре пространств решений и исходных данных. Установлены необходимые и достаточные условия (6)–(8) существования, единственности и устойчивости ее классических решений. Условия (6), (7) представляют собой необходимые и достаточные требования гладкости на правую часть уравнения, начальные данные и граничное данное. Они обеспечивают дважды непрерывную дифференцируемость решений этой задачи. Условие (8) является требованием согласования начальных условий (2) с граничным условием (3) и уравнением (1). Оно позволяет нам гладко «сшить» решения (4) и (5) вдоль характеристики $x = at$.

Замечание. Граничное условие (3) со второй косой производной при $\alpha_1=\beta_1=0, \gamma_1=1$ настоящей работы становится граничным условием (3) с первой косой производной статьи [2]. В этом исследовании одно из необходимых и достаточных условий (10) на правую часть f уравнения (1) для однозначной разрешимости во множестве классических решений смешанной задачи (1)–(3) с первой косой производной в нестационарном граничном условии (3) выполняется ввиду условия (9). Чтобы в этом убедиться, достаточно в (10) сделать замену $t'=x-(t/a)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барановская, С.Н. Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косой производной в краевом условии / С.Н. Барановская, Н.И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 8. – С. 1188–1191.
2. Ломовцев, Ф.Е. Метод Дюамеля решения неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны с косой производной в нестационарном граничном условии / Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков // Вестн. Белорус. гос. ун-та. – 2012. – Сер. 1, № 1. – С. 83–86.
3. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: МГУ, 2004. – 498 с.

REFERENCES

1. Baranovskaya S.N., Yurchuk N.I. Differ. uravneniya [Differential Equations], 2009, 45(8), pp. 1188–1191.
2. Lomovtsev F. E., Novikov E.N. Vestn. Belarus. Gos. Univ. [Journal of Belarusian State University], 2012, 1(1), pp. 83–86.
3. Tikhonov A.N., Samarsky A.A. Uravneniya matematicheskoi fiziki [Equations of Mathematical Physics], M.: MGU, 2004, 498 p.

Поступила в редакцию 21.02.2014. Принята в печать 21.04.2014

Адрес для корреспонденции: e-mail: lomovcev@bsu.by – Ломовцев Ф.Е.