О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ НАСЛЕДСТВЕННЫХ σ-ЛОКАЛЬНЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

Новикова А.С.,
магистрант ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь
Научный руководитель – Воробьёв Н.Т., доктор физ.-мат. наук, профессор

Все исследования в работе проводятся в универсуме $\mathfrak{E}$ всех конечных групп. В терминологии и обозначениях мы следуем [1, 2]. В теории классов конечных групп известен результат Брайса-Косси [3] о том, что класс Фиттинга разрешимых групп является наследственным в точности тогда, когда все значения его канонической H-функции наследственные классы Фиттинга. В связи с этим актуальным является поиск решения следующего вопроса: *верно ли, что локальный класс Фиттинга произвольных групп является наследственным тогда и только тогда, когда все значения его канонического задания наследственные?* Положительное решение указанного вопроса для обобщенно локальных классов Фиттинга (в частности, локальных классов Фиттинга) – основная цель настоящей работы.

Материал и методы. В работе используются методы теории групп и их классов. В частности, методы классов Фиттинга групп.

Результаты и их обсуждение. *Классом групп* называют совокупность групп, которая наряду с каждой группой содержит ей изоморфную. Класс групп $\mathfrak{F}$ называют *классом Фиттинга*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *наследственным,* если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия подгрупп, т.е. из условия $G \in \mathfrak{F}$ и $H \leq G$ следует, что $H \in \mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то в любой группе G существует наибольшая нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа. Ее обозначают $G_{\mathfrak{F}}$ и называют $\mathfrak{F}$-радикалом G. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга. Тогда класс групп $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G: G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$ называется *произведением классов Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$. Хорошо известно, что произведение классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна (см. [1, теорема X.1.12]).

Для нахождения характеризации обобщенно локальных классов Фиттинга мы будем использовать σ-метод Скибы исследований групп и формаций, предложенный в работе [4], который был дуализирован в [2] и состоит в следующем. Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P}\backslash\pi$. Если n – натуральное число, то символами $\pi(n)$ обозначают множество всех простых делителей n и $\pi(G) = \pi(|G|)$ множество всех простых делителей порядка группы G. Пусть σ – некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$, т.е. если $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$, то $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ и для всех $i \neq j$ пересечение $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$. Тогда символами $\sigma(n)$ обозначают множество $\{\sigma_i : \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$ и $\sigma(G) = \sigma(|G|)$.

Пусть $\Pi \subseteq \sigma$. Символом $\mathfrak{E}_\Pi$ мы будем обозначать класс всех Π-групп. В частности, символами $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и $\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ обозначим классы всех σ_i-групп соответственно.

Пусть $\emptyset \neq \sigma \subseteq \mathbb{P}$. Следуя [2], отображение $f: \sigma \to \{$классы Фиттинга$\}$ назовем σ-функцией Хартли или просто H_σ-функцией f. Множество $Supp(f) = \{\sigma_i : f(\sigma_i) \neq \emptyset\}$ – носитель H_σ-функции f.

Пусть $\Pi = Supp(f)$ и класс $LR_\sigma(f) = \mathfrak{E}_\Pi \cap (\cap_{\sigma_i \in \Pi} f(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'})$.

Определение. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем *σ-локальным*, если $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ для некоторой H_σ-функции f.

Если $\sigma^1 = \{\{p\}, \{q\}, ...\}$ – минимальное разбиение множества $\mathbb{P}$ и $\mathfrak{F} = LR_{\sigma^1}(f)$, то класс $\mathfrak{F}$ назовем *локальным классом Фиттинга* и H_{σ^1}-функцию f будем называть H-функцией $\mathfrak{F}$.

Как установлено в [2], каждый σ-локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ определяется H_σ-функцией f такой, что $F(\sigma_i) = F(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'} \subseteq \mathfrak{F}$ и $F(\sigma_i)$ – классы Локетта для всех $i \in I$. Заметим, что $F(\sigma_i)$ – класс Локетта, т.е. $(G \times H)_{F(\sigma_i)} = G_{F(\sigma_i)} \times H_{F(\sigma_i)}$ для всех групп G и H. Функцию F называют *канонической* H_σ-функцией класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Основной результат работы представляет

Теорема. *σ-Локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ наследственен тогда и только тогда, когда все значения его канонической H_σ-функции F являются наследственными.*

В случае, когда $\sigma = \sigma^1$ – минимальное разбиение множества $\mathbb{P}$, следствием теоремы является следующая характеризация локальных классов Фиттинга, полученная Го Вэньбинем и С.Н. Воробьевым в работе [5].

Следствие. *Локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является наследственным тогда и только тогда, когда все значения его канонической функции Хартли наследственны.*

1. Doerk, K. Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
2. Vorob'ev, N.T., Guo, W., Li Zh. On σ-local Fitting classes / N.T. Vorob'ev, W. Guo, Zh. Li // J. Algebra. – 2020. – Vol. 542. – P. 116–129.
3. Bryce, R.A., Cossey J. Finite formations of finite solvable groups / R.A. Bryce, J. Cossey // Math. Z. – 1972. – Bd. 127. – S. 217–223.
4. Skiba, A.N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
5. Guo, W., Vorob'ev, S.N. Formations defined by Doerk-Hawkes operation / W. Guo, S.N. Vorob'ev // J. Algebra and its Applications. – 2018. – Vol. 17, №12. – P. 1–9.

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ НАХОЖДЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО ПОЛИНОМА ДЕСЯТОЙ СТЕПЕНИ, ЗАДАННОГО НА КВАДРАТЕ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Окуневич К.В.,

студент 4 курса ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь

Научный руководитель – Трубников Ю.В., доктор физ.-мат. наук, профессор

Полиномы Чебышёва первого рода как полиномы, наименее уклоняющиеся от нуля на отрезке [–1, 1], были открыты П.Л. Чебышёвым в середине XIX века. Они нашли широкое применение во множестве математических и технических задач, тем самым став классическим объектом математического анализа.

Комплексным аналогом полиномов Чебышёва первого рода являются экстремальные полиномы, определенные на квадрате комплексной плоскости с вершинами в точках $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$. Такие полиномы важны при конструирования оптимальных итерационных процессов. Тем не менее, до начала XXI века существенных результатов в этом направлении в мире получено не было, поскольку в комплексном случае не работают основные классические теоремы теории приближений, например теорема П.Л. Чебышёва об альтернансе [1]. Построение экстремальных полиномов комплексного аргумента и доказательство экстремальности требуют объемных вычислений, которые без современного компьютера провести невозможно. На данный момент получен точный аналитический вид рассматриваемых экстремальных полиномов со второй по седьмую степень включительно [2, 3].

Цель работы – численно-аналитически получить приближенный вид экстремального полинома комплексного аргумента десятой степени, заданного на квадрате комплексной плоскости.