О ПОСТРОЕНИИ И ИСПОЛЬЗОВАНИИ ФОРМУЛ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫРАЖЕНИЯ ВСЕХ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕРЕЗ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Грицкевич Н.С., Китаров Д.А.,
студенты 2 курса ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь
Научный руководитель – Чернявский М.М., преподаватель

Из алгебры известно, что корни произвольного алгебраического уравнения пятой степени или выше не выражаются через конечную комбинацию элементарных функций от коэффициентов уравнения (теорема Абеля). В общем случае для выражения корней через коэффициенты используются специальные функции математической физики, что имеет больше теоретическое, чем прикладное значение [1]. Традиционно для вычисления значений корней алгебраических уравнений используются численные итерационные методы. Среди них определенный интерес представляет итерационный процесс Вейерштрасса одновременного нахождения всех корней алгебраического уравнения, который не получил широкого освещения в математической литературе [2].

Приближенных методов для нахождения всех корней произвольных алгебраических уравнений в русскоязычной литературе приведено немного. Они не получили широкого распространения до появления современных компьютеров. С точки зрения дальнейшего развития и построения модификаций представляют интерес формулы Эйткена, которые обобщают метод Бернулли [3].

Таким образом, в настоящей работе была поставлена цель – исследовать особенности модификации формул Эйткена и проверить ее эффективность на конкретных числовых примерах.

Материал и методы. Материалом исследования являются алгоритмы приближенного нахождения корней алгебраических уравнения произвольной степени с комплексными коэффициентами. Методы исследования – методы алгебры и математического анализа с использованием системы компьютерной математики *Maple* 2019.

Результаты и их обсуждение. Пусть алгебраическое уравнение с комплексными коэффициентами

$$P(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n=0 \tag{1}$$

имеет простые корни, причем $0<|z_1|<|z_2|<\ldots<|z_n|$.

Рассмотрим ряд Тейлора для функции $1/P(z)$ вида

$$1/P(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k. \tag{2}$$

Справедлива следующая теорема [4].

Теорема. *Коэффициенты ряда (2) связаны с корнем z_1 следующим образом:*

$$\lim_{j\to\infty}\frac{c_j}{c_{j+1}}=z_1. \tag{3}$$

В статье [5] показано, что существует прямая связь между определителями, составленными из соседних коэффициентов ряда (2), и значением корней полинома (1). Эта связь выражается в виде формул, являющихся аналогами формул Эйткена.

$$\lim_{m\to\infty}\left(\begin{vmatrix}c_{m+2} & c_{m+1}\\ c_{m+1} & c_m\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}c_{m+3} & c_{m+2}\\ c_{m+2} & c_{m+1}\end{vmatrix}\right)=z_1z_2;$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(\begin{vmatrix} c_{m+4} & c_{m+3} & c_{m+2} \\ c_{m+3} & c_{m+2} & c_{m+1} \\ c_{m+2} & c_{m+1} & c_m \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_{m+5} & c_{m+4} & c_{m+3} \\ c_{m+4} & c_{m+3} & c_{m+2} \\ c_{m+3} & c_{m+2} & c_{m+1} \end{vmatrix}\right) = z_1 z_2 z_3;$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(\begin{vmatrix} c_{m+6} & c_{m+5} & c_{m+4} & c_{m+3} \\ c_{m+5} & c_{m+4} & c_{m+3} & c_{m+2} \\ c_{m+4} & c_{m+3} & c_{m+2} & c_{m+1} \\ c_{m+3} & c_{m+2} & c_{m+1} & c_m \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_{m+7} & c_{m+6} & c_{m+5} & c_{m+4} \\ c_{m+6} & c_{m+5} & c_{m+4} & c_{m+3} \\ c_{m+5} & c_{m+4} & c_{m+3} & c_{m+2} \\ c_{m+4} & c_{m+3} & c_{m+2} & c_{m+1} \end{vmatrix}\right) = z_1 z_2 z_3 z_4$$

и т.д.

Коэффициенты ряда Тейлора (2) для функции $1/P(z)$ легко находятся в системах компьютерной алгебры. Известно, что многие численные методы наименее эффективны при вычислении значений кратного корня. Исследуем эффективность перечисленных выше формул на конкретных примерах алгебраических уравнений, имеющих кратные корни. Пусть

$$P(z) = z^4 + 3z^3 - 20z^2 - 84z - 80 = (z+2)^2 (z+4)(z-5) = 0.$$

Разложим функцию $1/P(z)$ в ряд Тейлора, например, до ста слагаемых. Тогда

$$z_1 \approx c_{98} / c_{99} = -1{,}979856;$$

$$z_1 z_2 \approx \begin{vmatrix} c_{98} & c_{97} \\ c_{97} & c_{96} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_{99} & c_{98} \\ c_{98} & c_{97} \end{vmatrix} = 4{,}000000;$$

$$z_1 z_2 z_3 \approx \begin{vmatrix} c_{98} & c_{97} & c_{96} \\ c_{97} & c_{96} & c_{95} \\ c_{96} & c_{95} & c_{94} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_{99} & c_{98} & c_{97} \\ c_{98} & c_{97} & c_{96} \\ c_{97} & c_{96} & c_{95} \end{vmatrix} = -16{,}000000.$$

Согласно теореме Виета произведение корней равно –80, поэтому определители следующего порядка можно не считать.

Заключение. Таким образом, в ходе выполнения исследования разработана методика применения модификации формул Эйткена в системе компьютерной математике *Maple*, а также на ряде числовых примерах подтверждена ее эффективность.

1. Михалкин, Е.Н. О решении общих алгебраических уравнений с помощью интегралов от элементарных функций / Е.Н. Михалкин // Сибирский математический журнал. – 2006. – Т. 47, № 2. – С. 365–371.
2. Трубников, Ю.В. Оптимальные итерационные процессы: монография / Ю.В. Трубников, ОВ. Пышненко, И.А. Орехова. – Витебск: УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2011. – 95 с.
3. Aitken, A.C. On Bernulli's numerical solution of algebraic equations / A.C. Aitken // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 1927. – Vol. 46. – P. 289–305.
4. Трубников, Ю.В. Расходящиеся степенные ряды и формулы приближенного аналитического нахождения решений алгебраических уравнений / Ю.В. Трубников, М. М. Чернявский // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2018. – № 4(101). – С. 5–17.
5. Чернявский, М.М. Модификация формул Эйткена и алгоритмы аналитического нахождения кратных корней полиномов / М.М. Чернявский, Ю.В. Трубников // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2021. – № 1(110). – С. 13–25.