ЧЕТЫРЕХМЕРНАЯ АЛГЕБРА ЛИ IV ТИПА БИАНКИ И ЕЕ ГРУППА ЛИ

Горовая Я.В.,
студентка 3 курса ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь
Научный руководитель – Подоксёнов М.Н., канд. физ.-мат. наук, доцент

В работе [1] было доказано, что четырёхмерная алгебра Ли IV типа Бианки $\mathcal{G}_{\mathrm{IV}}$ не допускает автоподобий при каком любом способе задания на ней лоренцева скалярного произведения, и существует единственный способ задания лоренцевого скалярного произведения в этой алгебре Ли, при котором она допускает однопараметрическую группу автоизометрий. Такое скалярное произведение порождает левоинвариантную метрику на соответствующей связной односвязной группе Ли G_{IV}, при которой группа изометрий получившегося многообразия имеет максимальную размерность.

Цель данной работы – изучить структуру группы Ли G_{IV} и алгебры Ли $\mathcal{G}_{\mathrm{IV}}$, а главное – найти формулы, по которым действует экспоненциальное отображение и обратное к нему отображение. Это позволит построить однородное лоренцево многообразие (G_{IV}, g) с максимальной (пятимерной) группой изометрий.

Материал и методы. Материалом исследования являются четырёхмерная алгебра Ли IV типа Бианки и соответствующая ей связная односвязная группа Ли. Используются методы линейной алгебры и теории групп и алгебр Ли.

Результаты и их обсуждение. В подходящем базисе (E_1, E_2, E_3, E_4) коммутационные соотношения алгебры Ли $\mathcal{G}_{\mathrm{IV}}$ задаются двумя равенствами: $[E_1, E_2]=E_2$, $[E_3, E_4]=E_4$, а остальные скобки равны нулевому вектору. Будем называть такой базис каноническим. Линейная оболочка векторов E_2 и E_4 является производной алгеброй Ли $[\mathcal{G}_{\mathrm{IV}}, \mathcal{G}_{\mathrm{IV}}]$. Она представляет собой двумерный коммутативный идеал, который обозначим H. Линейные оболочки векторов E_1, E_2 и E_3, E_4 обозначим соответственно L_1 и L_2. Эти подпространства являются двумерными некоммутативными идеалами.

Соответствующая связная односвязная группа Ли G_{IV} может быть представлена, как произведение $A(1)\times A(1)$, где – группа аффинных преобразований прямой, сохраняющих ориентацию прямой.

Алгебру Ли $\mathcal{G}_{\mathrm{IV}}$ и группу Ли G_{IV} можно представить соответственно, как состоящие из матриц вида

$$U=\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & u_3 & u_4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & x_3 & x_4\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ x_1>0,\, x_3>0.$$

В последнем случае групповая операция – это умножение матриц.

Введём на $\mathcal{G}_{\mathrm{IV}}$ и G_{IV} координаты, сопоставив приведённым выше матрицам координаты (u_1, u_2, u_3, u_4) и (x_1, x_2, x_3, x_4) соответственно. Единичному элементу группы соответствуют координаты (1, 0, 1, 0). Тогда групповая операция задаётся формулами

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)\cdot(y_1, y_2, y_3, y_4)=(x_1y_1,\ x_1y_2+x_2,\ x_3y_3,\ x_3y_4+x_4),$$

а обратный элемент находится так: $(x_1, x_2, x_3, x_4)^{-1}=(x_1^{-1}, -x_2x_1^{-1}, x_3^{-1}, -x_4x_3^{-1})$.

Канонический базис образуют матрицы

$$E_1=\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ E_2=\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ E_3=\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ E_4=\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(он не единственный).

Имеем формулу для нахождения матричной экспоненты:

$$\exp U = E + U + \frac{1}{2}U^2 + \frac{1}{6}U^3 + \ldots + \frac{1}{n!}U^n + \ldots,$$

С помощью метода математической индукции можно доказать, что

$$U^n = \begin{pmatrix} u_1^n & u_1^{n-1}u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3^n & u_3^{n-1}u_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь из уравнения $X = \exp U$, находим формулы, по которым действует отображение $\exp\colon \mathrm{G}_{\mathrm{IV}} \to G_{\mathrm{IV}}$:

$$x_1 = e^{u_1},$$

$$x_2 = u_2 + \frac{1}{2}u_1u_2 + \frac{1}{6}u_1^2u_2 + \ldots + \frac{1}{n!}u_1^{n-1}u_2 + \ldots =$$

$$= \frac{u_2}{u_1}\left(-1 + 1 + u_1 + \frac{1}{2}u_1^2 + \frac{1}{6}u_1^3 + \ldots + \frac{1}{n!}u_1^n + \ldots\right) = \frac{u_2}{u_1}(e^{u_1} - 1),$$

$$x_3 = e^{u_3},\ x_4 = \frac{u_4}{u_3}(e^{u_3} - 1).$$

Для исключения неопределённости необходимо уточнить, что $\exp(0,\ u_2,\ 0,\ u_4) = (1,\ u_2,\ 1,\ u_4)$. Из полученных формул выводим формулы обратного отображения $\exp^{-1}\colon G_{\mathrm{IV}} \to \mathrm{G}_{\mathrm{IV}}$:

$$u_1 = \ln x_1,\ u_2 = \frac{x_2}{x_1 - 1}\ln x_1,\ u_3 = \ln x_3,\ u_4 = \frac{x_4}{x_3 - 1}\ln x_3.$$

Эти формулы говорят о том, что группа Ли G_{IV} является экспоненциальной: любая точка $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) \in G_{\mathrm{IV}}$ имеет прообраз $(u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4)$ в G_{IV}. Тем самым отображение $\exp\colon \mathrm{G}_{\mathrm{IV}} \to G_{\mathrm{IV}}$ является гомеоморфизмом.

Убедимся, что неопределенности в формулах для x_2 и x_4 при $u_1 = 0$ и $u_3 = 0$ соответственно, являются устранимыми, не только для самих функций, но и для их производных.

$$\frac{\partial x_2}{\partial u_1} = \frac{u_2(e^{u_1}\cdot u_1 - (e^{u_1} - 1))}{u_1^2} = \frac{u_2(e^{u_1}(u_1 - 1) + 1)}{u_1^2};\ \frac{\partial x_2}{\partial u_2} = \frac{e^{u_1} - 1}{u_1};$$

$$\lim_{u_1 \to 0}\frac{\partial x_2}{\partial u_1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{u_1 \to 0}\frac{u_2(e^{u_1}(u_1 - 1) + e^{u_1})}{2u_1} = \lim_{u_1 \to 0}\frac{u_1u_2e^{u_1}}{2u_1} = \lim_{u_1 \to 0}\frac{u_2e^{u_1}}{2} = \frac{u_2}{2};\ \lim_{u_1 \to 0}\frac{\partial x_2}{\partial u_2} = 1$$

(здесь мы применили Правило Лопиталя). Аналогично $\lim\limits_{u_1 \to 0}\frac{\partial x_4}{\partial u_3} = \frac{u_4}{2};\ \lim\limits_{u_1 \to 0}\frac{\partial x_4}{\partial u_4} = 1.$

Якобиан экспоненциального отображения равен $\dfrac{e^{u_1}e^{u_3}(e^{u_1} - 1)(e^{u_3} - 1)}{u_1u_3}$ и его предел при $u_1 \to 0,\ u_3 \to 0$ существует и равен 1. Следовательно, экспоненциальное отображение есть диффеоморфизм.

Заключение. В данной работе мы изучили структуру алгебры Ли IV типа Бианки и соответствующей ей связной односвязной группы Ли G_{IV}, а также нашли формулы, по которым действует экспоненциальное отображение $\exp\colon \mathrm{G}_{\mathrm{IV}} \to G_{\mathrm{IV}}$. Мы установили, что оно является диффеоморфизмом.

1. Подоксёнов, М.Н. Автоизометрии четырехмерной алгебры Ли IV типа Бианки / М.Н. Подоксёнов, И.А. Иванова // Математические структуры и моделирование. – 2021. – № 2(58). – С. 28–36.