

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра алгебры и методики преподавания математики

**О С Н О В Ы
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ**
Методические рекомендации

В 2 частях

ЧАСТЬ 2

*Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2013*

УДК 51(075.8)

ББК 22.1я73

П62

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 1 от 24.10.2013 г.

Составители: доценты кафедры алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидаты педагогических наук **А.В. Виноградова; В.В. Устименко**

Рецензент:

доцент кафедры геометрии и математического анализа
ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук
С.А. Шлапаков

П62 Основы высшей математики : методические рекомендации : в 2 ч. / сост.: А.В. Виноградова, В.В. Устименко. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2013. – Ч. 2. – 48 с.

Данное издание написано в соответствии с действующей программой по основам высшей математике и предназначено для студентов дневного и заочного отделений педагогического факультета. В настоящем пособии авторы излагают необходимый теоретический материал и приводят подробно разобранные примеры данного курса.

УДК 51(075.8)

ББК 22.1я73

© ВГУ имени П.М. Машерова, 2013

ВВЕДЕНИЕ

Курс основ высшей математики призван дать студентам педагогического факультета подготовку, необходимую для успешного обучения математике учащихся начальных классов.

Современное общество диктует и свои требования к учителю. Например, грамотный учитель должен знать основные статистические характеристики, уметь их находить, строить соответственные диаграммы, владеть основными формулами теории вероятности.

Овладеть курсом основ высшей математики, приобрести необходимые умения и навыки можно лишь в процессе решения задач. Предлагаемое пособие призвано оказать помощь студентам педагогического факультета в достижении этой цели.

В данной работе большое внимание уделяется вопросам совершенствования логической грамотности учителя, формированию у него в процессе решения задач таких умений, как умение разграничивать математический и методический материал, умение анализировать задания из учебников математики начальных классов с точки зрения используемых при их выполнении теоретических положений и др.

В учебно-методическое пособие включены такие темы, как «Статистические характеристики и статистические исследования», «Элементы комбинаторики», «Теория вероятностей».

Пособие содержит теоретический материал, задачи с решениями и обоснованиями по данным темам, для студентов факультета начального образования. Данные задания предполагают развитие культуры мышления студентов и умения пользоваться языком математики.

1. СТАТИСТИКА

Статистические характеристики

При изучении учебной нагрузки учащихся выделили группу из 12 семиклассников. Их попросили отметить в определенный день время (в минутах), затраченное на выполнение домашнего задания по алгебре. Получили такие данные: 23, 18, 25, 20, 25, 25, 32, 37, 34, 26, 34, 25.

Имея этот ряд данных, можно определить, сколько минут в среднем затратили учащиеся на выполнение домашнего задания по алгебре.

Для этого указанные числа надо сложить и сумму разделить на 12:

$$\frac{23+18+25+20+25+25+32+37+34+26+34+25}{12} = \frac{324}{12} = 27$$

Число 27, полученное в результате данных вычислений, называют **средним арифметическим** рассматриваемого ряда чисел.

Средним арифметическим ряда чисел называется частное от деления суммы этих чисел на число слагаемых.

Мы нашли, что на выполнение домашнего задания по алгебре учащиеся затратили в среднем по 27 мин. Проводя аналогичные наблюдения за этой группой учащихся, можно проследить, какова была средняя затрата времени на выполнение домашнего задания по алгебре в течение недели, сравнить среднюю затрату времени на выполнение в какой-либо день домашних заданий по алгебре и русскому языку и т. п.

Обычно среднее арифметическое находят тогда, когда хотят определить среднее значение для некоторого ряда данных: среднюю урожайность пшеницы с 1 га в районе, средний суточный удой молока от одной коровы на ферме, среднюю выработку одного рабочего бригады за смену и т. п. Заметим, что среднее арифметическое находят только для однородных величин. Не имеет, например, смысла использовать в качестве обобщающего показателя среднюю урожайность зерновых и бахчевых культур в фермерском хозяйстве. Причем и для однородных величин вычисление среднего арифметического бывает иногда лишено смысла, например нахождение средней температуры больных в госпитале, среднего размера обуви, которую носят учащиеся школы.

В рассмотренном примере мы нашли, что в среднем учащиеся затратили на выполнение домашнего задания по алгебре по 27 мин. Однако анализ приведенного ряда данных показывает, что время, затраченное некоторыми учащимися, существенно отличается от 27 мин, т.е. от среднего арифметического. Наибольший расход равен 37 мин, а наименьший – 18 мин. Разность между наибольшим и наименьшим расходом времени составляет 19 мин. В этом случае говорят, что *размах* ряда равен 19. **Размахом ряда** чисел называется разность между наибольшим и наименьшим из этих чисел.

Размах ряда находят тогда, когда хотят определить, как велик разброс данных в ряду. Пусть, например, в течение суток отмечали каждый час температуру воздуха в городе. Для полученного ряда данных полезно не только вычислить среднее арифметическое, показывающее, какова среднесуточная

температура, но и найти размах ряда, характеризующий колебание температуры воздуха в течение этих суток.

При анализе сведений о времени, затраченном семиклассниками на выполнение домашнего задания по алгебре, нас могут интересовать не только среднее арифметическое и размах полученного ряда данных, но и другие показатели. Интересно, например, знать, какой расход времени является типичным для выделенной группы учащихся, т. е. какое число встречается в ряду данных чаще всего. Нетрудно заметить, что таким числом является число 25. Говорят, что число 25—*мода* данного ряда.

Модой ряда чисел называется число, наиболее часто встречающееся в данном ряду.

Ряд чисел может иметь более одной моды или не иметь моды совсем. Например, в ряду чисел 47, 46, 50, 52, 47, 52, 49, 45, 43, 53 две моды — это числа 47 и 52, так как каждое из этих чисел встречается два раза, а остальные числа встречаются в ряду менее двух раз. В ряду чисел 69, 68, 66, 70, 67, 71, 74, 63, 73, 72 моды нет.

Моду ряда данных обычно находят тогда, когда хотят выявить некоторый типичный показатель. Например, если изучаются данные о размерах мужских сорочек, проданных в определенный день в универмаге, то удобно воспользоваться таким показателем, как мода, который характеризует размер, пользующийся наибольшим спросом. Находить в этом случае среднее арифметическое не имеет смысла. Мода является наиболее приемлемым показателем при выявлении расфасовки некоторого товара, который отдают предпочтение покупатели, цены на товар данного вида, распространенной на рынке, и т. п.

Рассмотрим еще пример. Пусть, проводя учет деталей, изготовленных за смену рабочими одной бригады, получили такой ряд данных: 36, 35, 35, 36, 37, 37, 36, 37, 38, 36, 36, 36, 39, 39, 37, 39, 38, 38, 36, 39, 36. Найдем для него среднее арифметическое, размах и моду. Для этого удобно предварительно составить из полученных данных *упорядоченный ряд чисел*, т. е. такой ряд, в котором каждое последующее число не меньше (или не больше) предыдущего. Получим 35, 35, 36, 36, 36, 36, 36, 36, 36, 36, 37, 37, 37, 37, 38, 38, 38, 39, 39, 39, 39.

Вычислим среднее арифметическое:
$$\frac{35 \cdot 2 + 36 \cdot 8 + 37 \cdot 4 + 39 \cdot 4}{21} \approx 37$$

Размах ряда равен $39 - 35 = 4$. Мода данного ряда равна 36, так как число 36 чаще всего встречается в этом ряду, средняя выработка рабочих за смену составляет примерно 37 деталей; различие в выработке рабочих не превосходит 4 деталей; типичной является выработка, равная 36 деталям.

Заметим, что среднее арифметическое ряда чисел может не совпадать ни с одним из этих чисел, а мода, если она существует, обязательно совпадает с двумя или более числами ряда. Кроме того, в отличие от среднего арифметического, понятие «мода» относится не только к числовым данным. Например, проводя опрос учащихся, можно получить ряд данных, показывающий, каким видом спорта они предпочитают заниматься, какую из развлекательных телевизионных программ они считают наиболее интерес-

ной. Модой будут служить те ответы, которые встретятся чаще всего. Этим и объясняется само название «мода».

Такие характеристики, как среднее арифметическое, размах и мода, находят применение в *статистике* – науке, которая занимается получением, обработкой и анализом количественных данных о разнообразных массовых явлениях, происходящих в природе и обществе. Слово «статистика» происходит от латинского слова *status*, которое означает «состояние, положение вещей». Статистика изучает численность отдельных групп населения страны и ее регионов, производство и потребление разнообразных видов продукции, перевозку грузов и пассажиров различными видами транспорта, природные ресурсы и т. п.

Результаты статистических исследований широко используются для практических и научных выводов.

Рассмотрим еще одну статистическую характеристику. Начнем с примера. В таблице показан расход электроэнергии в январе жильцами девяти квартир:

Номер квартиры	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Расход электроэнергии, кВт-ч	85	64	78	93	72	91	72	75	82

Составим из данных, приведенных в таблице, упорядоченный ряд: 64, 72, 72, 75, 78, 82, 85, 91, 93.

В полученном упорядоченном ряду девять чисел. Нетрудно заметить, что в середине ряда расположено число 78: слева от него записано четыре числа и справа тоже четыре числа. Говорят, что число 78 является *среди́нным* числом, или, иначе, *медианой*, рассматриваемого упорядоченного ряда чисел (от латинского слова *mediana*, которое означает «среднее»). Это число считают медианой исходного ряда данных.

Приведем теперь другой пример. Пусть при сборе данных о расходе электроэнергии к указанным девяти квартирам добавили еще десятую. Получили такую таблицу:

Номер квартиры	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Расход электроэнергии, кВт-ч	85	64	78	93	72	91	72	75	82	88

Так же как в первом случае, представим полученные данные в виде упорядоченного ряда чисел: 64, 72, 72, 75, 78, 82, 85, 88, 91, 93.

В этом числовом ряду четное число членов и имеются два числа, расположенные в середине ряда: 78 и 82. Найдем среднее арифметическое этих чисел: $\frac{78+82}{2} = 80$. Число 80, не являясь членом ряда, разбивает этот ряд на две одинаковые по численности группы: слева от него находится пять членов ряда и справа тоже пять членов ряда:

80
64, 72, 72, 75, 78, 80, 82, 85, 88, 91, 93.

Говорят, что в этом случае медианой рассматриваемого упорядоченного ряда, а также исходного ряда данных, записанного в таблице, является число 80.

Медианой упорядоченного ряда чисел с нечетным числом членов называется число, записанное посередине, а медианой упорядоченного ряда чисел с четным числом членов называется среднее арифметическое двух чисел, записанных посередине. **Медианой произвольного ряда** чисел называется медиана соответствующего упорядоченного ряда.

Если в упорядоченном числовом ряду содержится $2n-1$ членов, то медианой ряда является n -й член, так как $n-1$ членов стоит до n -го члена и $n-1$ членов – после n -го члена. Если в упорядоченном числовом ряду содержится $2n$ членов, то медианой является среднее арифметическое членов, стоящих на n -м и $n+1$ -м местах.

В каждом из рассмотренных выше примеров, определив медиану, мы можем указать номера квартир, для которых расход электроэнергии жильцами превосходит срединное значение, т. е. медиану.

Рассмотрим пример. Известно, что 34 сотрудника отдела приобрели акции некоторого акционерного общества. Данные о числе акций, приобретенных сотрудниками, представлены в виде следующего упорядоченного ряда: 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, ..., 3, 4, 4, ..., 4, 100.

12 раз 16 раз

Найдем медиану этого ряда. Так как всего в ряду 34 числа, то медиана равна среднему арифметическому 17-го и 18-го членов: $(3 + 4) : 2 = 3,5$.

Вычисляя среднее арифметическое этого ряда, найдем, что оно приближенно равно 6,2, т. е. в среднем сотрудники отдела приобрели примерно по 6 акций. Мы видим, что в данном случае медиана лучше отражает реальную ситуацию, так как все сотрудники, кроме одного, приобрели не более 4 акций.

Такие показатели, как среднее арифметическое, мода и медиана, по-разному характеризуют данные, полученные в результате наблюдений. Поэтому на практике при анализе данных в зависимости от конкретной ситуации используют либо все три показателя, либо некоторые из них.

Если, например, анализируются сведения о годовых доходах нескольких туристических фирм города, то удобно использовать все три показателя. Среднее арифметическое покажет средний годовой доход фирм, мода будет характеризовать типичный показатель годового дохода, медиана позволит определить туристические фирмы, годовой доход которых ниже срединного показателя.

Если изучаются данные о размерах мужской обуви, проданной в определенный день в универмаге, то удобно воспользоваться таким показателем, как мода, который характеризует размер, пользующийся наибольшим спросом. Находить в этом случае среднее арифметическое или медиану не имеет смысла.

При анализе результатов, показанных участницами заплыва на дистанцию 100 м, наиболее приемлемой характеристикой является медиана. Знание медианы позволит выделить для участия в соревнованиях группу спортсменов, показавших результат выше срединного.

Статистические исследования

Для изучения различных общественных и социально-экономических явлений, а также некоторых процессов, происходящих в природе, проводятся специальные статистические исследования. Всякое статистическое исследование начинается с целенаправленного сбора информации об изучаемом явлении или процессе. Этот этап называется этапом статистического наблюдения.

Для обобщения и систематизации данных, полученных в результате статистического наблюдения, их по какому-либо признаку разбивают на группы и результаты группировки сводят в таблицы.

Рассмотрим такой пример. Администрация школы решила проверить математическую подготовку восьмиклассников. С этой целью был составлен тест, содержащий 9 заданий. Работу выполняли 40 учащихся школы. При проверке каждой работы учитель отмечал число верно выполненных заданий. В результате был составлен такой ряд чисел:

6, 5, 4, 0, 4, 5, 7, 9, 1, 6, 8, 7, 9, 5, 8, 6, 7, 2, 5, 7, 6, 3, 4, 5, 6, 8, 6, 7, 7, 4, 3, 5, 9, 6, 7, 8, 6, 9, 8.

Для того чтобы удобно было анализировать полученные данные, упорядочим этот ряд: 0, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9. Представим полученные данные в виде таблицы, в которой для каждого числа верно выполненных заданий, записанного в верхней строке, укажем в нижней строке количество появлений этого числа в ряду, т. е. *частоту*:

Число верно выполненных заданий	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Частота	1	1	1	2	5	6	8	7	5	4

Такую таблицу называют *таблицей частот*.

В рассмотренном примере сумма частот равна общему числу проверяемых работ, т. е. 40.

Вообще, если результат исследования представлен в виде таблицы частот, то сумма частот равна общему числу данных в ряду.

При проведении статистического исследования после сбора и группировки данных переходят к их анализу, используя для этого различные обобщающие показатели. Простейшими из них являются такие известные вам статистические характеристики, как среднее арифметическое, мода, медиана, размах.

Проанализируем результаты проведенной проверки работ учащихся.

Чтобы найти среднее арифметическое, надо общее число верно выполненных заданий разделить на число учащихся, т. е. на 40. Получаем:

$$\frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 8 + 7 \cdot 7 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 4}{40} = 5,8$$

Значит, в среднем учащиеся выполнили по 5,8 заданий, т. е. примерно $\frac{2}{3}$ общего объема работы.

Наибольшее число верно выполненных учащимися заданий равно 9, а наименьшее равно 0. Значит, размах ряда равен $9 - 0 = 9$, т. е. различие в числе верно выполненных заданий достаточно велико. Из таблицы ясно, что чаще всего встречаются работы, в которых верно выполнено 6 заданий, т. е. мода ряда равна 6.

Найдем медиану ряда. Так как в ряду всего 40 чисел, то медиана равна среднему арифметическому 20-го и 21-го членов соответствующего упорядоченного ряда. Для того чтобы определить, в какие группы попадают эти члены, будем последовательно суммировать частоты и сравнивать суммы с числами 20 и 21.

Найдем, что $1 + 1 + 1 + 2 + 5 + 6 = 16$, $1 + 1 + 1 + 2 + 5 + 6 + 8 = 24$, т. е. 20-й и 21-й члены ряда попадают в ту группу, которую составляют учащиеся, верно выполнившие 6 заданий. Значит, медиана ряда равна $(6 + 6) : 2 = 6$.

В рассмотренном примере для анализа результатов выполнения теста учащимися была составлена таблица частот. Иногда составляют таблицу, в которой для каждого данного указывается не частота, а отношение частоты к общему числу данных в ряду. Это отношение, выраженное в процентах, называют *относительной частотой*, а саму таблицу – *таблицей относительных частот*.

В нашем примере общая численность совокупности – это число учащихся, писавших работу, т. е. 40. Таблица относительных частот выглядит следующим образом:

Число верно выполненных заданий	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Относительная частота, %	2,5	2,5	2,5	5	12,5	15	20	17,5	12,5	10

Нетрудно убедиться, что сумма относительных частот составляет 100%.

Вообще, если по результатам исследования составлена таблица относительных частот, то сумма относительных частот равна 100%.

Если в ряду имеется большое число данных и одинаковые значения встречаются редко, то таблицы частот или относительных частот становятся излишне громоздкими. В таких случаях для анализа данных строят *интервальный ряд*. Для этого разность между наибольшим и наименьшим значениями делят на несколько равных частей (примерно 5–10) и, округляя полученный результат, определяют длину интервала. За начало первого интервала часто выбирают наименьшее данное или ближайшее к нему целое число, расположенное левее. Для каждого интервала указывают число данных, попадающих в этот интервал, или выраженное в процентах отношение этого числа к общей численности совокупности. При этом граничное число обычно считают относящимся к последующему интервалу.

Пусть, например, на партии из 50 электроламп изучали продолжительность их горения (в часах). По результатам составили такую таблицу:

Продолжительность горения, ч	До 200	200-400	400-600	600-800	800-1000	1000-1200	1200-1400	1400-1600
частота	1	3	5	9	16	9	5	2

Пользуясь составленной таблицей, найдем среднюю продолжительность горения. Для этого составим новую таблицу частот, заменив каждый интервал числом, которое является его серединой. Получим:

Продолжительность горения, ч	100	300	500	700	900	1100	1300	1500
частота	1	3	5	9	16	9	5	2

Для получения ряда данных найдем среднее арифметическое:
 $(100 \cdot 1 + 300 \cdot 3 + 500 \cdot 5 + 700 \cdot 9 + 900 \cdot 16 + 1100 \cdot 9 + 1300 \cdot 5 + 1500 \cdot 2) : 5 \approx 870$.

Значит, средняя продолжительность горения электроламп приближенно равна 870 ч.

В рассмотренном в начале пункта примере были проанализированы результаты выполнения теста восьмиклассниками одной школы. Тот же тест можно было бы использовать для более широкой проверки математической подготовки учащихся, например, предложить его восьмиклассникам всех школ города или региона. Заметим, что организация такой проверки связана с серьезными трудностями по пересылке текстов заданий в школы, сбору и проверке работ учащихся, обработке полученных результатов. Вообще, проведение любого массового исследования требует больших организационных усилий и финансовых затрат. Например, перепись населения страны связана с подготовкой разнообразной документации, выделением и инструктажем переписчиков, сбором информации, обработкой собранных сведений.

В тех случаях, когда бывает сложно или даже невозможно провести сплошное исследование, его заменяют *выборочным*. При выборочном исследовании из всей изучаемой совокупности данных, называемой *генеральной совокупностью*, выбирается определенная ее часть, т. е. составляется *выборочная совокупность (выборка)*, которая подвергается исследованию. При этом выборка должна быть *представительной*, или, как говорят, *репрезентативной*, т. е. отражающей характерные особенности исследуемой генеральной совокупности.

Пусть, например, в ходе кампании по выборам мэра в городе со стотысячным населением хотят узнать, кто из кандидатов имеет наибольшие шансы на успех. Для этого проводят опрос, например, полутора тысяч избирателей, в ходе которого выясняется, за кого они собираются голосовать. При этом нельзя опрашивать только молодых избирателей или только пенсионеров, так как это может привести к неправильным выводам. Необходимо, чтобы среди опрашиваемых было примерно одинаковое число мужчин и женщин. Кроме того, должны быть представлены люди с разным социальным положением и образованием.

Выборочное исследование проводят также и тогда, когда проведение сплошного исследования связано с порчей или уничтожением продукции. Например, при исследовании продолжительности горения партии электроламп, выпущенных заводом, невозможно проверить всю партию, так как это просто привело бы к ее уничтожению.

Наглядное представление статистической информации

Для наглядного представления данных, полученных в результате статистического исследования, используются различные способы их изображения.

Одним из хорошо известных вам способов наглядного представления ряда данных является построение столбчатой диаграммы.

Столбчатые диаграммы используют тогда, когда хотят проиллюстрировать динамику изменения данных во времени или распределение данных, полученных в результате статистического исследования.

В таблице показан расход электроэнергии (с точностью до 5 кВт · ч) некоторой семьей в течение года:

Месяц	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Расход электроэнергии, кВт-ч	110	100	110	85	70	65	10	70	90	100	100	105

Соответствующая столбчатая диаграмма построена на рис. 1. Она состоит из 12 прямоугольников с выбранными произвольно равными основаниями, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга. Высота каждого прямоугольника равна расходу электроэнергии в указанный месяц.

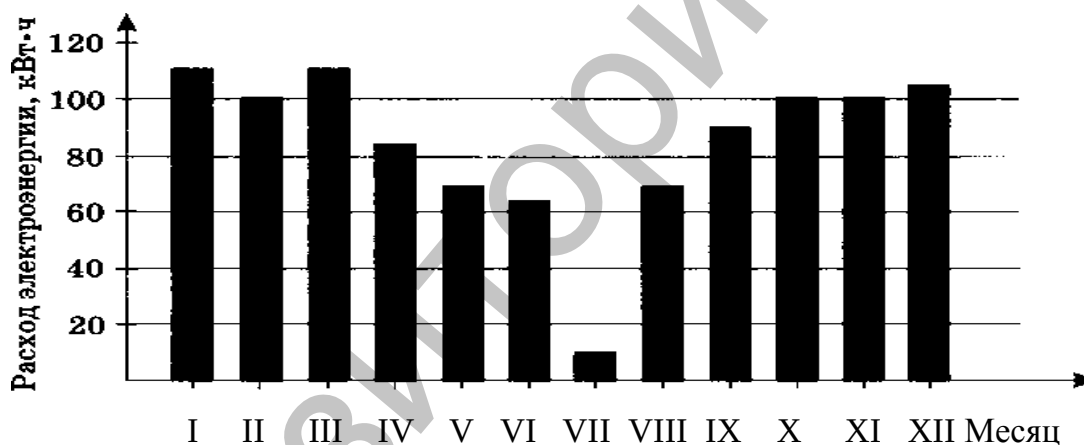


Рис. 1.

Если в ходе статистического исследования проведена группировка одинаковых данных и для каждой группы указана соответствующая частота (или относительная частота), то каждая группа изображается на столбчатой диаграмме прямоугольником, высота которого при выбранном масштабе равна соответствующей частоте (или относительной частоте).

Пусть, например, на основе изучения вопроса о количестве детей в семьях, проживающих в поселке, была составлена таблица частот:

Для наглядного изображения соотношения между частями исследуемой совокупности удобно использовать *круговые диаграммы*.

Количество Детей	Частота
0	12
1	23
2	32
3	10
4	5
5	2

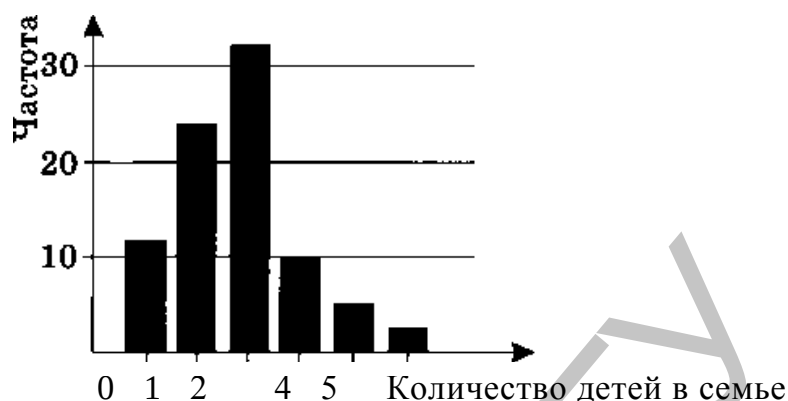


Рис. 2.

Соответствующая столбчатая диаграмма построена на рис. 2. Высота столбцов равна частоте.

Если результат статистического исследования представлен в виде таблицы относительных частот, то для построения круговой диаграммы круг разбивается на секторы, центральные углы которых пропорциональны относительным частотам, определенным для каждой группы данных. Построим, например, круговую диаграмму, иллюстрирующую распределение рабочих цеха по времени, которое они затратили на изготовление одной детали. Так как $360^\circ : 100 = 3,6^\circ$, то одному проценту соответствует центральный угол, равный $3,6^\circ$. Учитывая это, определим для каждой группы соответствующий центральный угол:

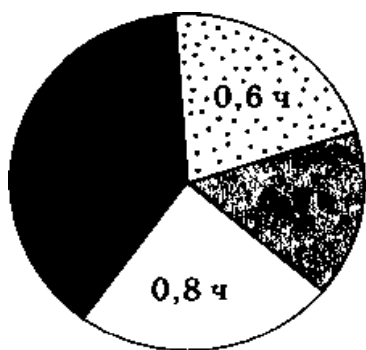


Рис. 3.

$$3,6^\circ \cdot 16 = 57,6^\circ,$$

$$3,6^\circ \cdot 21 = 75,6^\circ,$$

$$3,6^\circ \cdot 39 = 140,4^\circ,$$

$$3,6^\circ \cdot 24 = 86,4^\circ.$$

Разбив круг на секторы, получим круговую диаграмму (рис 3).

Динамику изменения статистических данных во времени часто иллюстрируют с помощью полигона. Для построения полигона отмечают в координатной плоскости точки, абсциссами которых служат моменты времени, а ординатами – соответствующие им статистические данные. Соединив последовательно эти точки отрезками, получают ломаную, которую называют **полигоном**. Имеются, например, следующие данные о производстве заводом приборов в первом полугодии 2002 г. (по месяцам):

Месяц	I	II	III	IV	V	VI
Число приборов (тыс. шт.)	2,3	2,2	2,5	2,6	2,8	1,9

Полигон, иллюстрирующий производство заводом приборов в первом полугодии 2002 г., построен на рисунке 4.

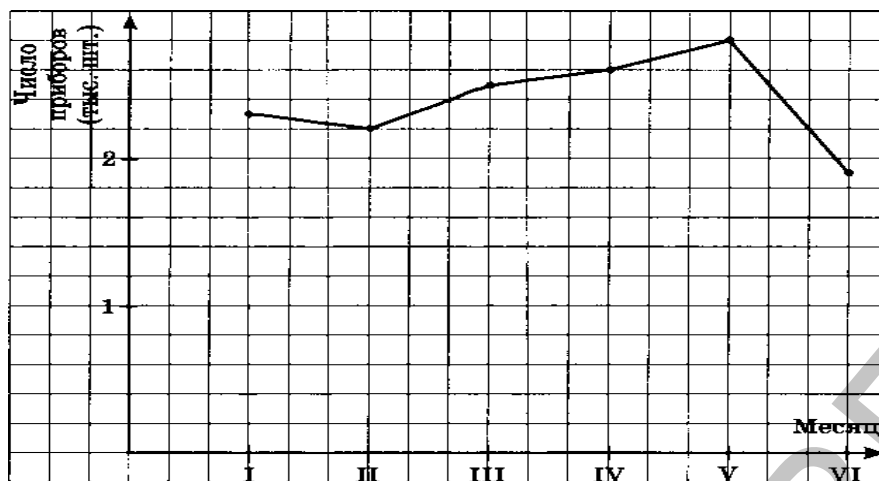


Рис. 4.

Полигоны используют также для наглядного изображения распределения данных, полученных в результате статистического исследования. Если данные представлены в виде таблицы частот или относительных частот, то для построения полигона отмечают в координатной плоскости точки, абсциссами которых служат статистические данные, а ординатами – их частоты или относительные частоты. Соединив последовательно эти точки отрезками, получают полигон распределения данных.

Пусть, например, проверочную работу по алгебре выполняли 180 учащихся. В результате группировки работ по полученным оценкам составили таблицу.

Оценка	1	2	3	4	5
частота	0	16	77	65	22

Отметим в координатной плоскости точки с координатами (1;0), (2; 16), (3; 77), (4; 65), (5; 22). Соединив последовательно эти точки отрезками, получим полигон распределения оценок за проверочную работу (рис. 5).



Рис. 5.

Интервальные ряды данных изображают с помощью *гистограмм*. Гистограмма представляет собой ступенчатую фигуру, составленную из сомкнутых

прямоугольников. Основание каждого прямоугольника равно длине интервала, а высота – частоте или относительной частоте. Таким образом, в гистограмме, в отличие от обычной столбчатой диаграммы, основания прямоугольников выбираются не произвольно, а строго определены длиной интервала.

Построим, гистограмму для интервального ряда, характеризующего продолжительность горения 50 электроламп, воспользовавшись таблицей, приведенной на с. 17. Пусть единица на горизонтальной оси соответствует продолжительности горения в 200 ч, а единица на вертикальной оси – частоте, равной 1. Гистограмма представляет собой фигуру, составленную из восьми сомкнутых прямоугольников (рис. 6). Сумма высот прямоугольников равна общей численности исследуемой совокупности, т. е. 50.

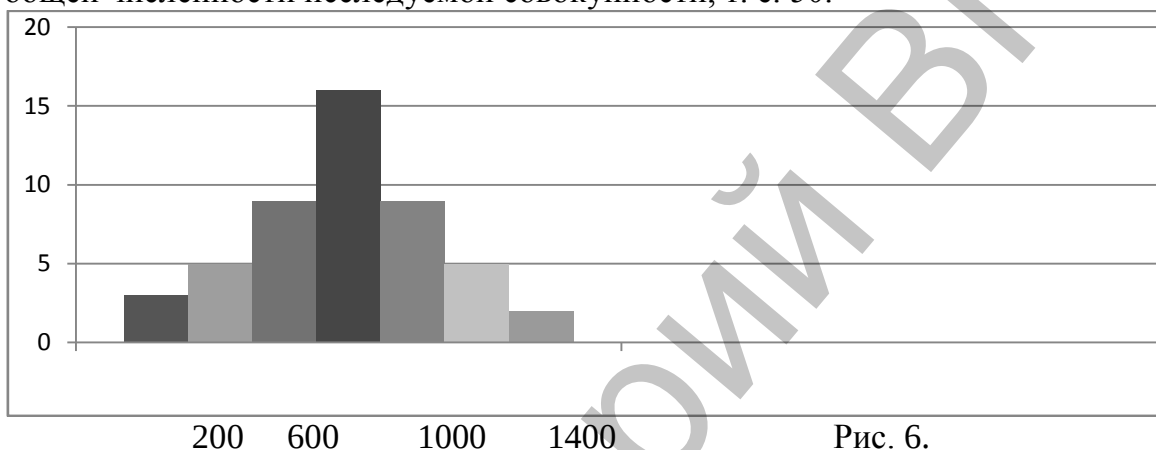


Рис. 6.

2. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Комбинаторика – ветвь математики, изучающая комбинации и перестановки предметов, – возникла в XVII в. Сейчас комбинаторные методы применяются в теории случайных процессов, статистике, математическом программировании, вычислительной математике, биологии, планировании экспериментов, расшифровке кодов ДНК и т.д.

В математике комбинаторика используется при изучении конечных геометрий, комбинаторной геометрии, теории представлений групп, неассоциативных алгебр и пр.

С задачами, в которых приходится выбирать те или иные предметы, располагать их в определенном порядке и отыскивать среди разных расположений наилучшие, люди сталкивались еще в доисторическую эпоху, выбирая наилучшие расположения охотников во время охоты, воинов во время битвы, инструментов во время работы. Определенным образом располагались украшения на одежде, узоры на керамике, перья в оперении стрел. По мере усложнения производственных и общественных отношений все шире приходилось пользоваться общими понятиями о порядке, группировании. В том же направлении действовало развитие ремесел и торговли. Позже появились нарды, шашки, шахматы и пр., возникли комбинаторные задачи. В Древнем Китае увлеклись составлением магических квадратов, в которых заданные числа располагали так, что сумма по всем горизонталям,

вертикалям и диагоналям была одной и той же. В древней Греции подсчитывали число различных комбинаций длинных и коротких слогов в стихотворных размерах, занимались теорией фигурных чисел, изучали фигуры, которые можно составить из частей особым образом разрезанного квадрата и т.д.

Первым рассматривал комбинаторику как самостоятельную ветвь науки немецкий математик Г. Лейбниц, опубликовавший в 1666 г. работу «Об искусстве комбинаторики». Замечательные достижения в области комбинаторики принадлежат Л. Эйлеру.

По мере развития комбинаторики выяснилось, что, несмотря на внешнее различие изучаемых ею вопросов, многие из них имеют одно и то же математическое содержание и сводятся к задачам о конечных множествах и подмножествах.

Обозначим число элементов конечного множества A символом $n(A)$. Если множества A и B не пересекаются, то $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$. Если множества A и B пересекаются, то $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Например. На тарелке лежат 11 груш и 5 лимонов. Сколькими способами можно выбрать один плод?

Речь идет о выборе «яблоко или груша» из множества плодов. Поэтому используем правило суммы: $11 + 5 = 16$. Значит, один плод можно выбрать 16 способами.

Правило подсчета числа элементов объединения непересекающихся конечных множеств носит название в комбинаторике **правила суммы**: если элемент x можно выбрать k способами, а элемент y – m способами, причем ни один из способов выбора элемента x не совпадает со способом выбора элемента y , то выбор « x или y » можно осуществить $k + m$ способами.

Правило суммы распространяется не только на два множества. Так, например, пусть даны непересекающиеся множества A, B, C . Тогда

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Число элементов декартова произведения множеств A и B подсчитывается по формуле $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$.

Найдем сколько элементов содержит декартово произведение $A \times A$, если $A = \{a, b, c, d, e\}$?

Так как множество A содержит 5 элементов ($n(A) = 5$), то декартово произведение $A \times A$ содержит 5×5 элементов: $n(A \times A) = 5 \times 5 = 25$ пар. Значит, декартово произведение $A \times A$ содержит 25 элементов.

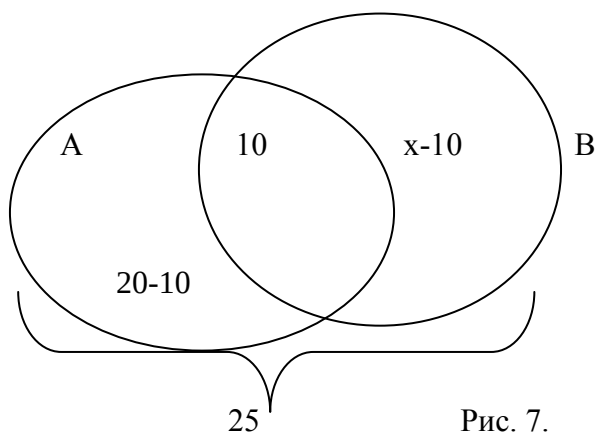
Правило подсчета числа элементов декартова произведения конечных множеств носит название в комбинаторике **правила произведения**: если элемент x можно выбрать k способами, а элемент y – m способами, то пару (x, y) можно выбрать $k \cdot m$ способами.

Правила суммы и произведения могут быть обобщены на случай n множеств.

Приведем решения некоторых комбинаторных задач:

Задача 1. В классе 25 человек, посещающих факультативные занятия по литературе и математике. Углубленно изучают оба предмета 10 человек, а математику – 20. Сколько человек посещает факультативные занятия только по литературе?

Решение: Пусть A – множество учащихся класса, B – множество учеников, посещающих факультатив по математике, C – множество человек, изучающих литературу: $n(A)=25$, $n(B)=20$. Множества B и C пересекаются: $n(B \cap C)=10$. Данную задачу можно решить с помощью кругов Эйлера.



Тогда решение данной задачи будет следующим.

Так как математику изучают 20, то среди них будут те учащиеся, которые изучают еще и литературу. Их 10 человек. Тогда только математику изучают $20-10=10$ человек. Аналогично найдем количество человек, изучающих только литературу: $(x-10)$ человек. Все эти учащиеся составляют 25 че-

ловек: $10 + (20 - 10) + (x - 10) = 25$. Решая данное уравнение, найдем $x = 15$. Значит, литературу изучают 15 человек.

Используем правило суммы для пересекающихся множеств.

Тогда количество учащихся класса $n(A)=n(B)+n(C)-n(B \cap C)$, т.е. $25=20+n(C)-10$. Откуда $n(C)=25-20+10=15$. Таким образом, количество человек, посещающих занятия по литературе равно 15.

Задача 2. В группе 30 студентов. 20 знают немецкий язык, 15 – английский. Каким может быть число студентов знающих оба языка; знающих хотя бы один язык?

Решение: обозначим множество студентов, знающих немецкий язык через N , а множество студентов, знающих английский – через A , множество всех студентов – через C . Тогда $n(N)=20$, $n(A)=15$, $n(C)=30$.

Между множествами возможны следующие отношения:

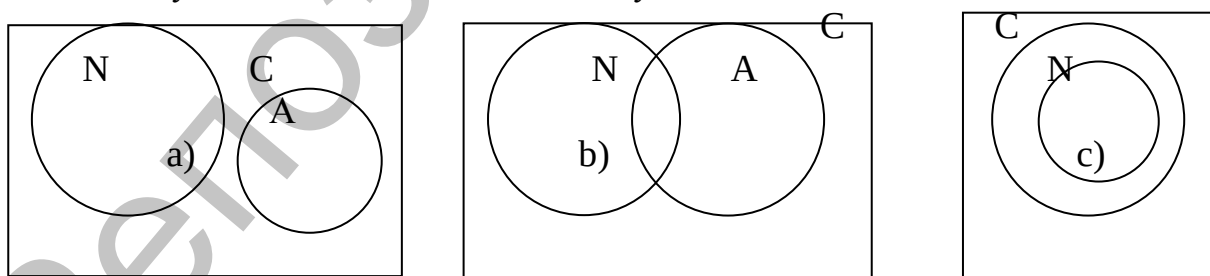


Рис. 8.

Вопрос о числе студентов, знающих оба языка сводится к определению числа элементов в пересечении множеств N и A , вопрос о числе студентов, знающих хотя бы один язык – к определению числа элементов в объединении этих множеств.

a) $n(N \cap A)=0$, $n(N \cup A)=n(N)+n(A)=20+15=35$;

b) $n(N \cap A)=?$, $n(N \cup A)=?$;

c) $n(N \cap A)=n(A)=15$, $n(N \cup A)=n(N)=20$.

Таким образом, число студентов, знающих оба языка (обозначим через x): $0 \leq x \leq 15$, а число студентов, знающих хотя бы один из языков (обозначим через y): $20 \leq y \leq 35$.

Задача 3. В классе 30 человек. Из них 26 человек занимается баскетболом, 25 – плаванием, 27 – лыжами, 15 занимаются баскетболом и плаванием, 18 – плаванием и лыжами, 16 посещают секции по баскетболу и лыжам. Один ученик освобожден от физкультурных занятий. Сколько человек занимается всеми указанными видами спорта? Сколько человек занимается только одним видом спорта?

Решение: В задаче рассматриваются три множества: множество A – учащихся, играющих в баскетбол, множество B – занимающихся плаванием и множество C – посещающих лыжную секцию. По условию эти множества попарно пересекаются и в объединении дают $40-1=39$.

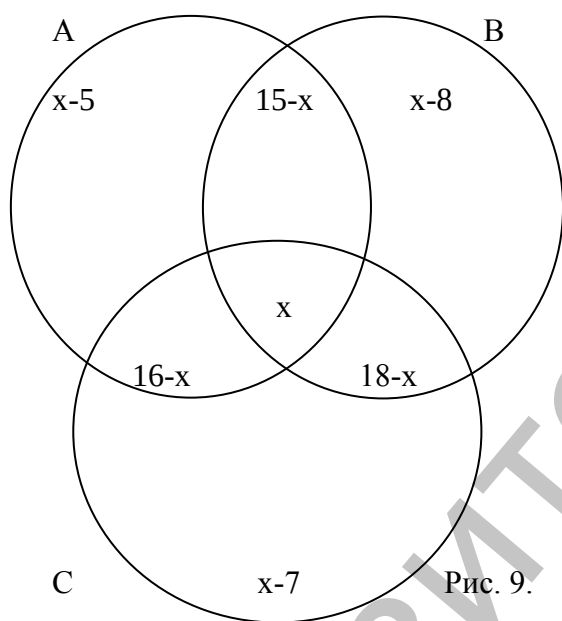


Рис. 9.

Обозначим $n(A \cap B \cap C) = x$.

Определим число учащихся в каждой непересекающейся области (рис. 44). Так как $n(A)=26$, $n(B)=25$, $n(C)=27$, $n(A \cap B)=15$, $n(B \cap C)=18$, $n(A \cap C)=16$, то число детей, посещающих только баскетбол и плавание равно $(15-x)$, только плавание и лыжи – $(18-x)$, баскетбол и плавание – $(16-x)$, только C $x-7$ баскетболом занимаются $26-(15-x)-(16-x)-x=x-5$ детей, только плавание посещает $25-(15-x)-(18-x)-x = x-8$ человек и, наконец, только лыжами – $27-(16-x)-(18-x)-x=x-7$ учащихся.

Составим уравнение:

$(x-5) + (x-8) + (x-7) + (15-x) + (18-x) + (16-x) + x = 39$ – количество человек, которые занимаются спортом. Откуда $x=10$.

Тогда только баскетболом занимается $x-5=10-5=5$ человек, только плаванием $x-8=10-8=2$ ученика и только лыжами $x-7=10-7=3$ человека.

Задача 4. Пусть число дождливых дней равно 12, ветреных – 8, холодных – 4, дождливых и ветреных – 5, дождливых и холодных – 3, ветреных и холодных – 2. Наконец, дождливых, ветреных и холодных – 1.

Тогда общее число плохих дней можно вычислить так:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 12 + 8 + 4 - 5 - 3 - 2 + 1 = 15.$$

Задача 5. Сколько трехзначных чисел можно составить, из цифр 1, 3, 5?

Решение: Цифры в записи числа могут повторяться и не повторяться. Рассмотрим первый случай. Тогда первую цифру в записи числа можно выбрать тремя способами (это может быть любая их данных цифр), вторую – так же тремя и третью – тремя способами. Используя правило произведе-

ния, получаем: $3 \times 3 \times 3 = 27$ чисел. Во втором случае – первую цифру можно выбрать тремя способами, вторую двумя (так как цифры не должны повторяться) и третью – одним способом. В этом случае таких чисел будет равно $3 \times 2 \times 1 = 6$.

Задача 6. Из деревни A в деревню B ведут три дороги, а из B в C ведут две дороги. Сколькими способами можно пройти из A в C через B ?

Чтобы решить данную задачу, обозначим дороги из A в B числами 1, 2, 3, а из B в C – буквами a, b . Тогда каждый вариант пути из A в C задается парой, состоящей из числа и буквы. Например, $(2; a)$. Но число пар такого вида по правилу произведения равно $3 \cdot 2 = 6$. Вот эти варианты: $(1; a)$, $(2; a)$, $(3; a)$, $(1; b)$, $(2; b)$, $(3; b)$.

Если задано множество X , то из его элементов можно составлять не только упорядоченные пары, но и упорядоченные тройки, четверки ... элементов. Например, буквы слова «телефон» образуют упорядоченную семерку.

Пусть даны множества $X_1, X_2, X_3 \dots X_n$. Возьмем какой-нибудь элемент a_1 из множества X_1 , потом a_2 из множества X_2 , ... a_n из множества X_n . Выбранные элементы расположим по порядку: $(a_1; a_2; \dots; a_n)$. Мы получим упорядоченную n -ку (энку) элементов, выбранных из множеств $X_1, X_2, \dots, X_n$. Вместо слова «упорядоченная энка» говорят короче – «кортеж». Число n называют длиной кортежа, элементы $a_1; a_2; \dots; a_n$ – его компонентами.

В математике примером кортежа может служить набор цифр, входящих в десятичную запись какого-нибудь числа. Этот кортеж составлен из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, причем цифры могут повторяться, а при перестановке цифр может получиться иное число. Так, кортеж числа 112231 имеет вид $(1; 1; 2; 2; 3; 1)$.

Два кортежа $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ и $(b_1; b_2; \dots; b_n)$ называют равными, если они имеют одинаковую длину, т.е. $m = n$, и каждая компонента первого кортежа равна компоненте второго кортежа с тем же номером, т.е. $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ... $a_n = b_n$.

Понятие кортежа дает возможность рассматривать различные формулы в комбинаторике.

Пусть даны множества $X_1, X_2, \dots, X_n$ из элементов которых составляются кортежи, которые могут иметь общие элементы. В частности, все они могут совпадать с одним и тем же множеством X , содержащим m элементов. Найдем количество кортежей длины n , которые можно составить из m элементов множества X . Чтобы решить эту задачу, надо найти число кортежей в декартовом произведении $X \times X \times \dots \times X$, содержащем n множителей. По правилу произведения это число элементов равно $n(X) \cdot n(X) \cdot n(X) \cdot \dots \cdot n(X)$. Так как по условию $n(X) = m$ (множество состоит из m элементов), то $n(X \times X \times \dots \times X) = m \cdot m \cdot m \cdot \dots \cdot m = m^n$.

Например, из 33 букв русского алфавита можно составить 33^2 слов длины 2 ($aa, ab, av, \dots, ay, ba, bb, \dots, ya$), 33^3 слов длины 3 и т.д. Точно так же из 10 цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 можно составить 10^2 двузначных номеров

$(00, 01, 02, \dots, 99)$, 10^3 трехзначных и т.д.

Количество кортежей длины n , составленных из элементов m множества X , называют **размещениями с повторениями** из m элементов по n , а их число обозначают $\overline{A}_m^n$ и вычисляют по формуле: $\overline{A}_m^n = m^n$

Пример: имеется 4 различных кресла и 5 рулонов декоративной ткани разных цветов. Сколькими способами можно осуществить обивку кресел?

Так как кресла различны, то каждый способ обивки есть по существу кортеж длины 4, составленный из элементов данного множества цветов ткани, содержащего 5 элементов. Значит, всего способов обивки кресел столько, сколько имеется таких кортежей. Т.е. мы имеем размещения с повторениями из 5 элементов по 4. $\overline{A}_5^4 = 5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ – способов обивки кресел.

Конечное множество X называется **упорядоченным**, если его элементы перенумерованы некоторым образом: $X = (x_1; x_2; \dots; x_m)$. Понятие упорядоченного множества – частный случай понятия кортежа. Оно выделяется из общего понятия кортежа условием, что в упорядоченном множестве все элементы различны. Например, кортеж $(1, 5, 2, 4, 3)$ не является упорядоченным множеством, а $(1, 2, 3, 4, 5)$ – упорядоченным множеством.

Одно и то же множество можно упорядочить различными способами. Например, множество школьников в классе можно упорядочить по возрасту, росту, весу и т.д.

Сколькими способами можно упорядочить множество X ? Каждое упорядочивание заключается в том, что какой-то элемент получает номер 1, какой-то – номер 2, ..., какой-то – номер m . Номер 1 может получить любой из элементов множества X . Значит, выбор первого элемента можно сделать m способами. Тогда второй можно выбрать $(m - 1)$ способами, третий – $(m - 2)$ способами и т.д. Последний элемент, который занимает m место, можно выбрать лишь одним способом.

По правилу произведения получаем, что общее число способов упорядочивания равно $m \times (m-1) \times (m-2) \times \dots \times 1$. Произведение первых m натуральных чисел в математике называют « **m -факториал**» и обозначают $m!$. Например, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Таким образом, число упорядочивания множества X равно $m!$. Они состоят из одних и тех же элементов, а отличаются друг от друга лишь порядком следования. При этом элементы в них не повторяются. Поэтому их число называют перестановками без повторений.

Два размещения без повторений из m элементов по m состоят из одних и тех же элементов, расположенных в различном порядке. Поэтому такие размещения называют **перестановками без повторений** из m элементов и обозначают P_m . Их количество подсчитывается по формуле:

$$P_m = A_m^m = m \times (m-1) \times (m-2) \times \dots \times 1 = m!$$

Найдем число способов расстановки восьми ладей на шахматной доске, при которых они не бьют друг друга.

Каждый способ задается перестановками 8 чисел – указываются номера горизонталей занятых полей на первой, второй, ..., восьмой вертикалях. Число таких перестановок $P_8 = 8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$.

Определим, сколькими способами можно рассадить 12 человек за

круглым столом? У первого человека есть право выбора из 12 мест, у второго – из 11, третьего – из 10, ... Последний занимает оставшееся одно место. Значит, в задаче речь идет о перестановках без повторений из 12 элементов: $P_{12} = 12! = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times \dots \times 1 = 479001600$ способами можно рассадить 12 человек за круглым столом.

Решим следующую задачу. Сколько шестизначных чисел, не кратных 5, можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что каждая цифра входит в шестизначное число только один раз?

Решение: Так как количество всех чисел из данного набора 6 цифр задается перестановками без повторений, то их будет ровно $P_6 = 6! = 720$.

Но среди этих чисел, есть числа, кратные 5, т.е. которые оканчиваются на цифру 5. Их количество выберется из цифр 1, 2, 3, 4, 6 и будет равно $P_5 = 5! = 120$. Значит чисел не кратных 5 можно найти как $P_6 - P_5 = 720 - 120 = 600$.

Рассмотрим более сложную задачу: сколько упорядоченных n -множеств можно составить из элементов m -множества X ?

Отличие этой задачи от предыдущей заключается в том, что составление упорядоченного n -множества заканчивается, когда мы выберем n элементов. Поэтому, чтобы найти число таких упорядоченных подмножеств, надо перемножить n чисел: $m, m-1, m-2$ и т.д. Последнее из них равно $m-n+1$. Эти упорядоченные n -множества называют размещения без повторений.

Кортежи длины n , составленные из неповторяющихся элементов множества X , содержащего m элементов, называют **размещениями без повторений** из m элементов по n . Число таких размещений обозначают A_m^n и подсчитывают по формуле: $A_m^n = m \times (m-1) \times (m-2) \times \dots \times (m-n+1)$.

Иначе: $A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$, где $m! = m \times (m-1) \times (m-2) \times \dots \times 1$

Определим, сколькими способами из 40 учащихся класса можно выделить актив в составе: староста, заместитель старосты, редактор стенгазеты?

В данной задаче речь идет о кортеже длины 3 (число школьников в активе класса), составленном из 40 неповторяющихся элементов, т.е. $A_{40}^3 = 40 \times 39 \times 38 = 59280$ – столько способов выделить актив класса.

Среди задач, связанных с применением формул по перестановкам или размещениям, рассматриваются задачи и вычислительные. Причем считают, что $1! = 1$ и $0! = 1$.

Рассмотри задачу: четыре цифры 1,2,3,4 можно переставлять друг с другом с другом $P_4 = 4! = 24$ способами.

В слове «мама» четыре буквы. Но перестановок из этих букв можно составить не 24, а только 6: «мама», «маам», «маам», «аамам», «аамам», «аамам». В этом легко убедиться, если в соответствие цифрам 1 и 2 поставить букву «м», а цифрам 3 и 4 – букву «а».

Рассмотрим теперь задачу в общем виде. Пусть дан кортеж длины n , составленный из элементов множества $X = \{x_1; x_2; \dots; x_m\}$, причем буква x_1 входит в этот кортеж n_1 раз, ... буква x_m – n_m раз. Тогда $n = n_1 + \dots + n_m$. Если

переставлять в этом кортеже буквы, будут получаться новые кортежи, имеющие тот же состав, т.е. такие, что буква x_1 входит n_1 раз, ..., буква x_m входит n_m раз. Мы будем называть эти кортежи перестановками с повторениями из букв $x_1; x_2; \dots; x_m$, имеющими состав $(n_1, \dots, n_m)$. Число таких перестановок обозначается $P(n_1, n_2, \dots, n_m)$. С помощью правила произведения находим, что число перемещений букв, не меняющих данную перестановку, равно $n_1! \dots n_m!$. Но n чисел можно переставлять друг с другом $n!$ способами. Поэтому число различных перестановок букв, имеющих состав $(n_1, n_2, \dots, n_m)$, т.е. $P(n_1, n_2, \dots, n_m)$, в $n_1! \dots n_m!$ раз меньше, чем $n!$, т.е.

$$P(n_1, n_2, \dots, n_m) = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_m!}$$

Пользуясь данной формулой, легко узнать, например, сколько различных кортежей получится, если переставить буквы в слове «математика». Это слово состоит из 10 букв две буквы «м», три – «а», две – «т», и по одной – «е», «и», «к».

Значит состав слова «математика» – (2, 3, 2, 1, 1, 1). Тогда количество перестановок можно найти следующим образом:

$$P(2, 3, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{2! \times 3! \times 2! \times 1! \times 1! \times 1!} = 151200.$$

Итак, количество кортежей при перестановке букв в слове «математика» равно 151200.

В комбинаторике часто рассматривают задачи на отыскание количества подмножеств, содержащих по k элементов каждое, можно составить из m элементов данного множества X ?

Такие подмножества носят название сочетаний без повторений из элементов по k : C_m^k . Выведем формулу, выражающую C_m^k через m и k . Возьмем какое-нибудь k -подмножество A в m -множестве X . Так как множество A содержит k элементов, то его можно упорядочить $k!$ способами. При этом каждое упорядоченное k -множество, состоящее из элементов множества X , может быть получено таким путем. Значит число упорядоченных k -множеств, составленных из элементов множества X , в $k!$ раз больше числа неупорядоченных k -подмножеств в X .

Например, из элементов множества $A = \{a, b, c, d\}$ можно составить четыре трехэлементных подмножества: $\{a, b, c\}$; $\{a, b, d\}$; $\{a, c, d\}$; $\{b, c, d\}$. Число же упорядоченных трехэлементных подмножеств в $3! = 6$ раз больше:

$\{a, b, c\}$; $\{a, b, d\}$; $\{a, c, d\}$; $\{b, c, d\}$
 $\{a, c, b\}$; $\{a, d, b\}$; $\{a, d, c\}$; $\{b, d, c\}$
 $\{b, a, c\}$; $\{b, a, d\}$; $\{c, a, d\}$; $\{c, b, d\}$
 $\{b, c, a\}$; $\{b, d, a\}$; $\{c, d, a\}$; $\{c, d, b\}$
 $\{c, a, b\}$; $\{d, a, b\}$; $\{d, a, c\}$; $\{d, b, c\}$
 $\{c, b, a\}$; $\{d, b, a\}$; $\{d, c, a\}$; $\{d, c, b\}$.

Но число упорядоченных k -множеств равно A_m^k , а число k -подмножеств мы обозначили через C_m^k . Поэтому $A_m^k = k! \cdot C_m^k$. Так как

$A_m^k = \frac{m!}{(m-k)!}$, то мы получаем формулу, выражающую число k -подмножеств

в m -множестве: $C_m^k = \frac{m!}{(m-k)! \times k!}$

Т.о., если множество A состоит из m элементов, то его подмножества, содержащие k элементов, называются **сочетаниями без повторений** из m элементов по k элементов.

Пример. Сколькими способами можно выбрать делегацию в 5 человек из группы, содержащей 12 человек?

Поскольку порядок членов делегации не играет роли, то нам надо узнать, сколько можно выбрать пятиэлементных подмножеств из множества, содержащего 12 элементов. Число таких подмножеств $C_{12}^5 = \frac{12!}{(12-5)! \times 5!} = 792$.

Задача. В шахматном турнире принимают участие 12 человек. Сколько будет сыграно партий, если любые два участника встретятся между собой один раз?

Решение: Имеем множество, состоящее из 12 элементов. Так как нам нужно определить количество партий, т.е. подмножеств, куда входят 2 элемента, то речь идет о сочетании без повторений из 12 элементов по 2 элементам. Это можно подсчитать следующим образом: $C_{12}^2 = \frac{12!}{(12-2)! \times 2!} = 66$.

Таким образом, будет сыграно 66 партий.

Задача. На шахматном турнире, проводившемся в один круг, любые два участника встречались между собой один раз. Была сыграна 91 партия. Сколько человек участвовало в турнире?

Решение: Нам дано множество из x элементов. Известно, что каждая партия – это подмножество, которое состоит из 2-х элементов. Всего таких подмножеств – 91. Значит можно составить уравнение: $C_x^2 = 91$.

Решим данное уравнение: $C_x^2 = \frac{x!}{(x-2)! \times 2!} = 91$; $\frac{x \times (x-1) \times (x-2)!}{(x-2)! \times 2!} = 91$.

Сократим на $(x-2)!$. Получим квадратное уравнение $x^2 - x = 182$, откуда $x = 14$. Значит, в турнире участвовало 14 человек.

Рассмотрим более сложную задачу. В кондитерской продаются пирожные 4 сортов: наполеоны, безе, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

Если записывать порядок, в котором продавец кладет пирожные в коробку, то получится кортеж длины 7 из 4 элементов – сортов пирожных. Однако два кортежа одного и того же состава, например (н, н, э, п, с, с, э) и (э, н, с, н, э, п, с), означают одну и ту же покупку: 2 наполеона, 2 эклера, 2 слоеных, 1 песочное. Поэтому два способа сделать покупку надо считать различными лишь в случае, когда соответствующие кортежи отличаются своим составом.

Итак, мы пришли к следующей задаче: сколько различных составов могут иметь кортежи длины k из m элементов? По другому эту задачу можно сформулировать так: на сколько классов эквивалентности разбивается

вся совокупность кортежей длины k из m элементов (назовем два кортежа эквивалентными, если они имеют одинаковый состав)? Такие классы эквивалентности называют сочетаниями с повторениями из m элементов по k , а их число обозначают $\overline{C}_m^k$.

Сочетаниями с повторениями из m элементов по k вычисляют по следующей формуле. $\overline{C}_m^k = \frac{(m+k-1)!}{(m-1)! \times k!}$

Вернемся к нашей задаче. В ней поставлен вопрос: сколько различных составов могут иметь кортежи длины 7, составленные из 4 элементов данного множества? По-другому эту задачу можно сформулировать и так: на сколько классов эквивалентности разбивается вся совокупность кортежей длины 7 из 4 элементов? В таком случае речь идет о сочетаниях с повторениями: $\overline{C}_m^k = \overline{C}_4^7 = \frac{(4+7-1)!}{(4-1)! \times 7!} = 120$ (способов).

Рассмотрим **свойства чисел C_m^k** , которые выражают различные соотношения между подмножествами множества X .

1. Если $0 \leq k \leq m$, то верно равенство $C_m^k = C_m^{m-k}$. Докажем данное равенство, используя формулу сочетаний без повторений:

$$C_m^{m-k} = \frac{m!}{(m-k)! \times (m-(m-k))!} = \frac{m!}{(m-k)! \times k!} = C_m^k.$$

2. Для любых k и m , таких, что $0 \leq k \leq m$, верно равенство

$$C_m^k = C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k.$$

Это равенство нетрудно получить так же с помощью формулы сочетаний без повторений:

$$C_{m-1}^{k-1} = \frac{(m-1)!}{(m-k)! \times (k-1)!} = \frac{(m-1)!k}{(m-k)! \times k!};$$

$$C_{m-1}^k = \frac{(m-1)!}{(m-k-1)! \times k!} = \frac{(m-1)!(m-k)}{(m-k)! \times k!};$$

$$C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k = \frac{(m-1)!k}{(m-k)! \times k!} + \frac{(m-1)!(m-k)}{(m-k)! \times k!} = \frac{(m-1)!(k+m-k)}{(m-k)! \times k!} = \frac{m!}{(m-k)! \times k!} = C_m^k.$$

Отметим, что при $k=0$ получаем равенство $C_m^0 = C_{m-1}^{-1} + C_{m-1}^0$. Так как $C_m^0 = C_{m-1}^0 = 1$, то следует положить $C_{m-1}^{-1} = 0$. аналогично C_m^k при $k > m$. Тогда доказанное выше равенство(2) оказывается верным и при $k = m$.

Данная формула позволяет вычислить значения C_m^k , зная C_{m-1}^k и C_{m-1}^{k-1} . Иными словами, с помощью этого тождества можно последовательно вычислить C_m^k сначала при $m=0$, затем при $m=1$, при $m=2$ и т.д.

Доказанное свойство можно записать так:

$$C_m^0 + C_m^2 + C_m^4 + \dots = C_m^1 + C_m^3 + C_m^5 + \dots = C_{m-1}^0 + C_{m-1}^1 + C_{m-1}^2 + \dots + C_{m-1}^{m-1}.$$

$$3. C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^m = 2^m.$$

$$4. C_{m+k}^m - C_{m+k}^{m-1} = \frac{k-m+1}{k+1} \times C_{m+k}^m.$$

$$5. C_m^m + C_{m+1}^m + C_{m+2}^m = C_{m+3}^{m+1}.$$

$$6. \quad C_m^m + C_{m+1}^m + C_{m+2}^m + C_{m+3}^m = C_{m+4}^{m+1}.$$

$$7. \quad C_m^0 + C_m^2 + C_m^4 + \dots = 2^{m-1}.$$

$$8. \quad C_m^1 + C_m^3 + C_m^5 + \dots = 2^{m-1}.$$

Рассмотрим задачу. Пусть дано множество $M = \{a, b, c, d\}$. Подсчитаем количество всевозможных подмножеств данного множества, состоящего из 4 элементов: одноэлементных подмножеств будет $C_4^1 = \frac{4!}{(4-1)! \times 1!} = 4$; двухэлементных будет $C_4^2 = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = 6$; трехэлементных – $C_4^3 = \frac{4!}{(4-3)! \times 3!} = 4$; четырехэлементных соответственно $C_4^4 = \frac{4!}{(4-4)! \times 4!} = 1$ и еще одно пустое множество $\emptyset$. Всего получилось $4+6+4+1+1=16$ подмножеств, что соответствует $2^4 = 16$.

3. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вероятность случайного события

В повседневной жизни, в практической и научной деятельности мы часто наблюдаем те или иные явления, проводим эксперименты.

Событие, которое может произойти, а может и не произойти в процессе наблюдения или эксперимента, называют *случайным событием*. Например, поражение мишени или промах при выстреле – случайные события. Выигрыш команды во встрече с соперником, проигрыш или ничейный результат – это тоже случайные события. Закономерности случайных событий изучает специальный раздел математики, который называется *теорией вероятностей*.

Зарождение теории вероятностей произошло в поисках ответа на вопрос: как часто наступает то или иное событие в большой серии испытаний со случайными исходами, которые происходят в одинаковых условиях?

Рассмотрим такой пример. Бросают игральный кубик, т. е. небольшой куб, на гранях которого выбиты очки 1, 2, 3, 4, 5, 6 (рис. 10). При бросании игрального кубика на его верхней грани может выпасть одно очко, два очка, три очка и т. д. Каждый из этих исходов является случайным.

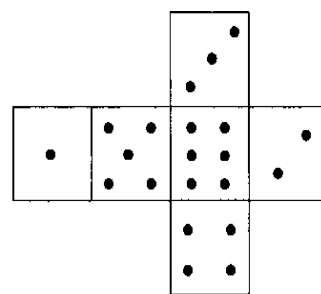
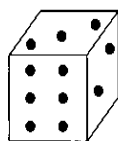


Рис. 10.

Провели такое испытание. Игральный кубик бросали 100 раз и наблюдали, сколько раз произойдет событие «на кубике выпало 6 очков». Оказалось, что в данной серии экспериментов «шестерка» выпала 9 раз. Число 9, которое показывает, сколько раз в этом испытании произошло рассматриваемое событие, называют *частотой* этого события, а отноше-

ние частоты к общему числу испытаний, равное $\frac{9}{100}$, называют *относительной частотой* этого события.

Пусть определенное испытание проводится многократно в одних и тех же условиях и при этом каждый раз фиксируется, произошло или нет интересующее нас событие A . Обозначим буквой n общее число испытаний, а буквой m число испытаний, при которых произошло событие A . Число m называют частотой события A , а отношение $\frac{m}{n}$ — относительной частотой.

Относительной частотой случайного события в серии испытаний называется отношение числа испытаний, в которых это событие наступило, к числу всех испытаний.

В ходе статистических исследований установлено, что при многократном повторении отдельных опытов или наблюдений в одних и тех же условиях относительная частота появления ожидаемого события остается примерно одинаковой, незначительно отличаясь от некоторого числа p . Например, при бросании монеты она может упасть кверху орлом или решкой. Если монета однородна и имеет правильную геометрическую форму, то шансы выпадения орла или решки одинаковы. При небольшом числе испытаний выпадение орла может, например, произойти чаще, чем решки. Однако если эти испытания проводятся достаточно большое число раз, то относительная частота выпадения орла близка к относительной частоте выпадения решки.

Многие исследователи проводили испытания с бросанием монеты и вычисляли относительную частоту выпадения орла. В таблице указано число бросков монеты в проводимых ими испытаниях и относительные частоты выпадения орла.

Число бросков	Относительная частота выпадения орла
4040	0,5070
4092	0,5005
10 000	0,4979
20 480	0,5068
24 000	0,5005
80 640	0,4923

Из таблицы видно, что относительная частота выпадения орла незначительно отличается от 0,5. Говорят, что вероятность выпадения орла близка к 0,5.

Вообще, если в длинной серии экспериментов со случайными исходами значения относительных частот близки к некоторому определенному числу, то это число принимают за вероятность данного случайного события. Такое определение называют *статистическим определением вероятности*.

Вероятность случайного события находят, когда в ходе статистического исследования анализируют относительную частоту наступления этого события при многократном повторении в одних и тех же условиях эксперимента или наблюдения. Так, например, поступают, когда хотят определить ожидаемую всхожесть семян растения, предсказать результат выступления спортсмена в соревнованиях по стрельбе и т. п.

Для того чтобы найти вероятность интересующего нас события, необходимо предварительно провести достаточно большое число экспериментов или наблюдений. В то же время если рассматриваются испытания со

случайными исходами и все исходы этих испытаний равновозможны, т. е. шансы их наступления одинаковы, то вероятность наступления случайного события удастся найти путем рассуждений, не прибегая к испытанию.

Вернемся к рассмотренному примеру с бросанием игрального кубика. Будем считать, что этот кубик имеет правильную форму и сделан из однородного материала и поэтому при его бросании шансы выпадения на его верхней грани любого числа очков от 1 до 6 одинаковы. Говорят, что существует шесть *равновозможных исходов* этого испытания: выпадение очков 1, 2, 3, 4, 5 и 6.

Рассмотрим событие B , которое означает выпадение числа очков, кратного 3. Это событие происходит лишь при двух исходах испытания: когда выпало 3 очка и когда выпало 6 очков. Эти исходы называют *благоприятными исходами* для события B . При бросании кубика из 6 равновозможных исходов испытания благоприятными для события B являются лишь два исхода. Отношение числа благоприятных исходов к числу всех равновозможных исходов равно $\frac{2}{6}$. Это отношение называют вероятностью события B и пишут: $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Вероятностью события называется отношение числа благоприятных для него исходов испытания к числу всех равновозможных исходов.

В отличие от статистического определения вероятности это определение называют *классическим определением*.

Что означает на практике, что вероятность рассмотренного события B равна $\frac{1}{3}$? Разумеется, это не означает, что при шести бросках число очков, кратное 3, выпадает ровно два раза. Возможно, что оно выпадает один раз, три раза или не выпадет совсем. Однако если провести большое число испытаний, то относительная частота появления события B будет мало отличаться от $\frac{1}{3}$. Вообще, при увеличении числа испытаний относительная частота появления случайного события приближается к его вероятности.

Сопоставляя классическое и статистическое определения вероятности, можно сделать вывод, что нахождение классической вероятности не требует, чтобы испытание было проведено в действительности, а нахождение статистической вероятности (относительной частоты) предполагает фактическое проведение испытания.

Для того чтобы найти вероятность некоторого события, надо правильно определить число равновозможных исходов испытания и число благоприятных для этого события исходов.

Рассмотрим задачу Даламбера (1717–1783): «Найти вероятность того, что при подбрасывании двух монет на обеих монетах выпадут решки».

При бросании монет равновозможными являются следующие исходы: $(o; o)$, $(o; p)$, $(p; p)$, $(p; o)$, где в каждой паре на первом месте записан результат бросания первой монеты, а на втором – результат бросания второй монеты, причем выпадение орла обозначено буквой o , а выпадение решки – буквой p . Благоприятным для события A , состоящего

в том, что оба раза выпадут решки, является один исход. Значит, $p(A) = \frac{1}{4}$.

Введем теперь понятия достоверного и невозможного события.

Пусть C – событие, состоящее в том, что при бросании игрального кубика выпадет менее 7 очков. Так как каждый из исходов 1, 2, 3, 4, 5, 6 является благоприятным для события C , то вероятность наступления события C равна $P(C) = \frac{6}{6} = 1$

Событие, которое происходит всегда, сколько бы раз ни повторялось испытание, называется *достоверным* событием. Вероятность достоверного события равна 1.

Обозначим буквой F событие, означающее, что при бросании игрального кубика выпадет 7 очков. Очевидно, что это событие произойти не может. Число благоприятных для него исходов равно нулю, т. е. $P(F) = \frac{0}{6} = 0$.

Такие события называют *невозможными* событиями.

Пусть некоторое испытание имеет n равновозможных исходов, из которых m исходов благоприятны для события A . Тогда $P(A) = \frac{m}{n}$. Так как $m < n$, то $\frac{m}{n} \leq 1$, т. е. $P(A) \leq 1$. С другой стороны, всегда $P(A) \geq 0$. Следовательно, $0 \leq P(A) \leq 1$.

Пример. Из 25 экзаменационных билетов по геометрии ученик успел подготовить 11 первых и 8 последних билетов. Какова вероятность того, что на экзамене ему достанется билет, который он не подготовил?

Общее число равновозможных исходов при выборе билетов на экзамене 25. Пусть M – событие, заключающееся в том, что ученику достанется на экзамене билет, к которому он не подготовился. Число благоприятных для события M исходов (но не для ученика) равно $25 - (11 + 8)$, т. е. 6. Значит, $P(M) = \frac{6}{25} = 0,24$.

Пример. Антон и Игорь бросают белый и черный игральные кубики и подсчитывают сумму выпавших очков. Они договорились, что если при очередной попытке в сумме выпадет 8 очков, то выигрывает Антон, а если в сумме выпадет 7 очков, то выигрывает Игорь. Является ли такая игра справедливой?

При бросании кубиков на белом кубике может выпасть 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. Каждому числу очков, выпавших на белом кубике, соответствует шесть вариантов числа очков, выпавших на черном кубике. Все равновозможные исходы этого испытания приведены в таблице.

В каждой паре на первом месте записано число очков, выпавших на белом кубике, а на втором месте – число очков, выпавших на черном кубике. Общее число равновозможных исходов равно 36.

(1; 1)	(2; 1)	(3; 1)	(4; 1)	(5; 1)	(6; 1)
(1; 2)	(2; 2)	(3; 2)	(4; 2)	(5; 2)	(6; 2)
(1; 3)	(2; 3)	(3; 3)	(4; 3)	(5; 3)	(6; 3)
(1; 4)	(2; 4)	(3; 4)	(4; 4)	(5; 4)	(6; 4)
(1; 5)	(2; 5)	(3; 5)	(4; 5)	(5; 5)	(6; 5)
(1; 6)	(2; 6)	(3; 6)	(4; 6)	(5; 6)	(6; 6)

Пусть событие A означает, что при бросании кубиков в сумме выпало 8 очков, а событие B означает, что в сумме выпало 6 очков.

Для события A благоприятными являются следующие 5 исходов: (2; 6), (3; 5), (4; 4), (5; 3), (6; 2),

Для события B благоприятными являются следующие 6 исходов: (1; 6), (2; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 2), (6; 1). Отсюда: $P(A) = \frac{5}{36}$, $P(B) = \frac{6}{36}$

Поэтому шансов выиграть у Игоря больше, чем у Антона. Значит, такая игра не является справедливой.

Пример. Из 16 собранных велосипедов 4 оказались с дефектами. Какова вероятность того, что 2 выбранных наугад велосипеда будут без дефектов?

Пусть A – событие, при котором 2 выбранных велосипеда окажутся без дефектов. Любой выбор 2 велосипедов из 16, является равновозможным исходом. Значит, общее число равновозможных исходов равно числу сочетаний из 16 по 2, т. е. C_{16}^2 . Исходом, благоприятным для события A , является выбор 2 исправных велосипедов из 12 исправных ($16-4=12$). Значит, число благоприятных для события A исходов равно C_{12}^2 . Отсюда получаем, что

$$P(A) = \frac{C_{12}^2}{C_{16}^2} = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} \cdot \frac{16 \cdot 15}{1 \cdot 2} = \frac{11}{20} = 0,55$$

Пример. Группа туристов, в которой 7 юношей и 4 девушки, выбирает по жребию четырех дежурных. Какова вероятность того, что будут выбраны 2 юноши и 2 девушки?

Число исходов при выборе четырех дежурных равно C_{11}^4 . Все эти исходы равновозможны. Пусть A – событие, при котором выбраны 2 юноши и 2 девушки. Выбрать двух юношей из 7 можно C_7^2 способами, а выбрать двух девушек из 4 можно C_4^2 способами. Каждому выбору двух юношей соответствует выбор двух девушек. Значит, число исходов, благоприятных для события A , равно $C_7^2 \cdot C_4^2$. Отсюда получаем, что

$$P(A) = \frac{C_7^2 \cdot C_4^2}{C_{11}^4} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{21}{55}.$$

Сложение и умножение вероятностей

Пусть в коробке находится 19 шаров: 10 белых, 4 красных и 5 зеленых. Из коробки наугад вынимают один шар. Рассмотрим такие события: событие A – шар оказался красным; событие B – шар оказался зеленым; событие C – шар оказался цветным (красным или зеленым).

События A и B являются несовместными, так как наступление одного из них исключает наступление другого. Событие C означает наступление одного из событий: A или B .

Выясним, как вероятность события C связана с вероятностями каждого из событий A и B . Найдем вероятности событий A , B и C . Для каждого из проведенных испытаний (извлечение из коробки одного шара) равновероятными являются 19 исходов. Из них для события A благоприятными являются 4 исхода, для события B – 5 исходов, для события C – 9 исходов.

$$\text{Отсюда } P(A) = \frac{4}{19}, \quad P(B) = \frac{5}{19}, \quad P(C) = \frac{9}{19}.$$

Мы видим, что $P(C) = P(A) + P(B)$.

Вообще, справедливо следующее утверждение: если событие C означает, что наступает одно из двух несовместных событий: A или B , то вероятность события C равна **сумме вероятностей** событий A и B .

Пример. На карточках написали натуральные числа от 1 до 10 включительно, после чего карточки перевернули и перемешали. Затем наугад открыли одну карточку. Какова вероятность того, что на ней будет написано простое число или число, большее 7?

Пусть событие A означает, что на карточке написано простое число, а событие B означает число, большее 7. Для события A благоприятными являются 4 исхода из 10 равновероятных (появление одного из чисел 2, 3, 5, 7), т. е. вероятность события A равна 0,4. Для события B благоприятными являются 3 исхода из 10 равновероятных (появление чисел 8, 9, 10), т. е. вероятность события B равна 0,3.

Нас интересует событие C , когда на карточке написано простое число или число, большее 7. Событие C наступает тогда, когда наступает одно из событий: A или B . Очевидно, что эти события являются несовместными. Значит, вероятность события C равна сумме вероятностей событий A и B , т. е. $P(C) = P(A) + P(B) = 0,4 + 0,3 = 0,7$.

При решении некоторых задач бывает удобно воспользоваться свойством вероятностей противоположных событий.

Разъясним смысл понятия «противоположные события» на примере бросания игрального кубика. Пусть событие A означает, что выпало 6 очков, а событие B – что не выпало 6 очков. Всякое наступление события A означает ненаступление события B , а ненаступление события A – наступление события B . В таких случаях говорят, что A и B – противоположные события.

Найдем вероятности событий A и B . Для события A благоприятным является один исход из шести равновероятных исходов, а для события B пять исходов из шести. Значит: $P(A) = \frac{1}{6}$; $P(B) = \frac{5}{6}$. Нетрудно заметить, что $P(A) + P(B) = 1$.

Вообще, **сумма вероятностей противоположных событий равна 1**.

Действительно, пусть проводится некоторое испытание и рассматриваются два события: событие A и противоположное ему событие, которое принято обозначать $\bar{A}$.

События A и $\bar{A}$ – несовместные события. Событие, означающее наступление хотя бы одного из них, т. е. A или $\bar{A}$, является достоверным событием. Отсюда следует, что сумма вероятностей двух противоположных

событий равна 1, т. е. $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Пример. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма очков, выпавших на двух кубиках, меньше 11?

Общее число равновозможных исходов этого испытания равно 36. Пусть событие A означает, что сумма очков, выпавших на двух кубиках, меньше 11. Так как благоприятными для события A является большое число исходов, то удобно сначала найти вероятность противоположного ему события $\bar{A}$, которое означает, что сумма выпавших очков больше или равна 11. Благоприятными для события $\bar{A}$ являются три исхода: (5; 6), (6; 5), (6; 6). Поэтому $P(\bar{A}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. Так как события A и $\bar{A}$ являются противоположными,

то $P(A) + P(\bar{A}) = 1$. Отсюда $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$.

Рассмотрим теперь, как можно вычислить вероятность события, состоящего в совместном появлении двух независимых событий.

Два события называются независимыми, если наступление одного из них не зависит от наступления или не наступления другого.

Приведем пример. Пусть в одном из двух ящиков находится 15 деталей, из которых 2 нестандартные, а в другом – 20 деталей, из которых 3 нестандартные. Из каждого ящика наугад вынимают по одной детали. Какова вероятность, что обе детали окажутся нестандартными?

Рассмотрим такие события: A – из первого ящика вынимают нестандартную деталь; B – из второго ящика вынимают нестандартную деталь.

Для события A благоприятными являются 2 исхода из 15, а для события B благоприятными являются 3 исхода из 20. Значит, $P(A) = \frac{2}{15}$,

$P(B) = \frac{3}{20}$. Очевидно, что события A и B являются независимыми. Рассмотрим

событие, состоящее в совместном появлении событий A и B . Обозначим его буквой C . Общее число равновозможных исходов испытания, в которых событие C наступает или не наступает, равно $15 \cdot 20$. Действительно, каждому из 15 извлечений из первого ящика соответствует 20 возможностей извлечения детали из второго ящика. Благоприятными для события C являются те исходы, при которых обе вынутые детали являются нестандартными. Каждому из двух возможных извлечений нестандартной детали из первого ящика соответствует три возможности извлечения нестандартной детали из второго ящика, т. е. число исходов, благоприятных для события C , равно $2 \cdot 3$. Следовательно,

$$P(C) = \frac{2 \cdot 3}{15 \cdot 20} = \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{20}, \text{ т.е. } P(C) = P(A) \cdot P(B).$$

Вообще, справедливо следующее утверждение: если событие C означает совместное наступление двух независимых событий A и B , то вероятность события C равна произведению вероятностей событий A и B .

Пример. В непрозрачном пакете лежат девять жетонов с номерами 1, 2, ..., 9. Из пакета наугад вынимают один жетон, записывают его номер и

жетон возвращают в пакет. Затем опять вынимают жетон и записывают его номер. Какова вероятность того, что оба раза будут вынуты жетоны, номера которых являются простыми числами?

Пусть событие A состоит в том, что в первый раз вынут жетон, номер которого является простым числом, а событие B – в том, что во второй раз вынут жетон, номер которого является простым числом. Тогда $P(A) = \frac{4}{9}$ и $P(B) = \frac{4}{9}$, так как из чисел 1, 2, ..., 9 четыре числа являются простыми.

Рассмотрим событие C , которое состоит в том, что оба раза вынуты жетоны, номера которых являются простыми числами.

Событие B не зависит от события A , так как на повторное извлечение жетона не влияет то, какой жетон был вынут в первый раз (извлеченный в первый раз жетон был возвращен в пакет).

$$\text{Значит, } P(C) = P(A) \cdot P(B), \text{ т. е. } P(C) = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{81} \approx 0,2.$$

Заметим, что если бы после первого извлечения жетон не возвращался обратно, то события A и B были бы зависимыми, так как вероятность события B зависела бы от того, вынут ли в первом случае жетон, номер которого является простым числом, или нет.

Пример. В результате многократных наблюдений установили, что вероятность попадания в мишень одного стрелка равна 0,9, а другого – 0,8. Каждый из стрелков сделал по одному выстрелу по мишени. Какова вероятность того, что мишень будет поражена?

Рассмотрим такие события: A – первый стрелок попал в мишень; B – второй стрелок попал в мишень; C – мишень поражена.

События A и B независимые. Однако воспользоваться в этом случае умножением вероятностей нельзя, так как событие C наступает не только тогда, когда оба стрелка попали в мишень, но и тогда, когда в мишень попал хотя бы один из них. Поступим иначе. Рассмотрим события $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$, противоположные соответственно событиям A, B и C . События $\bar{A}$ и $\bar{B}$ являются независимыми, так как промах при выстреле по мишени первого стрелка (событие $\bar{A}$) не зависит от не поражения мишени вторым стрелком (событие $\bar{B}$). Событие $\bar{C}$ означает совместное появление событий $\bar{A}$ и $\bar{B}$. Поэтому $P(\bar{C}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$.

Из свойства вероятностей противоположных событий вытекает, что $P(\bar{A}) = 1 - 0,9 = 0,1$, $P(\bar{B}) = 1 - 0,8 = 0,2$. Отсюда получаем, что

$$P(\bar{C}) = 0,1 \cdot 0,2 = 0,02.$$

Так как события C и $\bar{C}$ противоположные, то теперь несложно найти вероятность события C : $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - 0,02 = 0,98$.

Значит, вероятность того, что мишень будет поражена, равна 0,98.

4. ЗАДАЧИ

Статистика

1. Найдите среднее арифметическое и размах ряда чисел:
а) 24, 22, 27, 20, 16, 31; б) 30, 5, 23,5, 28, 30; в) 11, 9, 7, 6, 2, 0, 1;
г) 144, 146, 114, 138. д) 32, 26, 18, 26, 15, 21, 26; е) 21, 18,5, 25,3, 18,5, 17,9; ж) 67,1, 68,2, 67,1, 70,4, 68,2; з) 0,6, 0,8, 0,5, 0,9, 0,8, 1,1.
2. Найдите среднее арифметическое, размах и моду ряда чисел:
а) 16, 22, 16, 13, 20, 17; б) -21, -33, -35, -19, -20, -22;
в) 61, 64, 64, 83, 61, 71, 70; г) -4, -6, 0, 4, 0, 6, 8, -12.
3. Как могут измениться размах и мода ряда чисел, если:
а) дополнить его числом, превосходящим все остальные;
б) вычеркнуть из него число, меньшее всех остальных;
в) дополнить его числом, равным наибольшему из чисел?
4. Среднее арифметическое ряда, состоящего из десяти чисел, равно 15. К этому ряду приписали число 37. Чему равно среднее арифметическое нового ряда чисел?
5. Среднее арифметическое ряда, состоящего из девяти чисел, равно 13. Из этого ряда вычеркнули число 3. Чему равно среднее арифметическое нового ряда чисел?
6. В таблице показан расход электроэнергии некоторой семьей в течение года.

месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Расход кВт·ч	85	80	74	61	54	34	32	32	62	78	81	81

Найдите средний ежемесячный расход электроэнергии этой семьей.

7. В ряду чисел 2, 7, 10, $_$, 18, 19, 27 одно число оказалось стертым. Восстановите его, зная, что среднее арифметическое этих чисел равно 14.
8. В ряду чисел 3, 8, 15, 30, $_$, 24 пропущено одно число. Найдите его, если: а) среднее арифметическое ряда равно 18; б) размах ряда равен 40; в) мода ряда равна 24.
9. На соревнованиях по фигурному катанию судьи поставили спортсмену следующие оценки: 5,2, 5,4, 5,5, 5,4, 5,1, 5,1, 5,4, 5,5, 5,3. Для полученного ряда чисел найдите среднее арифметическое, размах и моду. Что характеризует каждый из этих показателей?
10. В аттестате о среднем образовании у четырех друзей – выпускников школы – оказались следующие оценки:
Ильин: 4, 4, 5, 5, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 4, 4, 5, 4, 4;
Семенов: 3, 4, 3, 3, 3, 3, 4, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 4;
Попов: 5, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 4;
Романов: 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 4, 4, 4, 5, 3, 4, 4.
С каким средним баллом окончил школу каждый из этих выпускников? Укажите наиболее типичную для каждого из них оценку в аттестате. Какие статистические характеристики вы использовали при ответе?
11. В фермерском хозяйстве отведены под пшеницу три участка, площади которых равны 12 га, 8 га и 6 га. Средняя урожайность на первом

участке составляет 18 ц с 1 га, на втором – 19 ц с 1 га, на третьем – 23 ц с 1 га. Чему равна средняя урожайность пшеницы в этом хозяйстве?

12. Проведя учет числа бракованных деталей в 10 ящиках с одинаковым числом деталей, получили следующий ряд данных: 1, 2, 2, 3, 0, 2, 3, 1, 1, 2. Найдите для этого ряда среднее арифметическое и моду.

13. Каждый из 24 участников соревнований по стрельбе произвел по десять выстрелов. Отмечая всякий раз число попаданий в цель, получили следующий ряд данных: 6, 5, 5, 6, 8, 3, 7, 6, 8, 5, 4, 9, 6, 7, 9, 8, 6, 6, 5, 6, 4, 3, 6, 5. Найдите для этого ряда размах и моду.

14. В таблице записаны результаты ежедневного измерения на метеостанции в полдень температуры воздуха (в градусах Цельсия) в течение первой декады марта:

Число месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Температура °С	-2	-1	-3	0	1	2	2	3	4	3

Найдите среднюю температуру в полдень в эту декаду. Составьте таблицу отклонений от средней температуры воздуха в полдень в каждый из дней декады.

15. Найдите среднее арифметическое и медиану ряда чисел:

- а) 30, 32, 37, 40, 41, 42, 45, 49, 52; б) 102, 104, 205, 207, 327, 408, 417;
 в) 16, 18, 20, 22, 24, 26; г) 1, 2, 1, 4, 2, 2, 2, 6, 3, 2, 3, 8, 4, 4, 5, 6.
 д) 27, 29, 23, 31, 21, 34; е) 3, 8, 7, 2, 6, 4, 6, 8, 7, 2;
 ж) 56, 58, 64, 66, 62, 74; з) 21, 6, 37, 3, 16, 4, 12, 6.

16. Известно, что ряд данных состоит из натуральных чисел. Может ли для этого ряда быть дробным числом: а) среднее арифметическое; б) размах; в) мода; г) медиана?

17. В таблице показано, сколько акций одинаковой стоимости некоторого акционерного общества приобрели сотрудники отдела:

№ п/п	Фамилия	Число акций	№ п/п	Фамилия	Число Акции
1	Астахова	5	9	Муравьев	1
2	Бодров	4	10	Николаева	4
3	Волков	10	11	Осипов	12
4	Ерин	3	12	Павлов	6
5	Ильин	2	13	Петрова	8
6	Куликова	10	14	Райков	10
7	Лаврова	25	15	Тимофеев	2
8	Михайлов	3	16	Федоров	4

Найдите медиану этого ряда данных. У кого из сотрудников отдела число приобретенных акций превосходит медиану?

18. Зная, что в упорядоченном ряду содержится m чисел, где m – нечетное число, укажите номер члена, являющегося медианой, если m равно: а) 5; б) 17; в) 47; г) 201.

19. Для упорядоченного ряда, содержащего m чисел, где m – четное число, укажите номера двух последовательных членов, между которыми заключена медиана, если m равно: а) 6; б) 18; в) 56; г) 240.

20. В ходе опроса 34 учащихся школы было выяснено, сколько времени (с точностью до 0,5 ч) в неделю они затрачивают на занятия в кружках и спортивных секциях. Получили следующие данные:

5, 1, 5, 0, 2, 5, 1, 0, 0, 2, 2, 5, 3, 5, 4, 3, 5, 2, 5, 0, 1, 5, 4, 5, 3, 3, 5, 3, 5, 4, 3, 2, 5, 2, 1, 2, 2, 4, 5, 4, 3, 5, 2, 5. Представьте этот ряд данных в виде таблицы частот. Сколько времени в среднем тратят учащиеся на занятия в кружках и спортивных секциях.

21. При проверке 70 работ по русскому языку отмечали число орфографических ошибок, допущенных учащимися. Полученный ряд данных представили в виде таблицы частот:

Число ошибок	0	1	2	3	4	5	6
Частота	4	6	15	26	12	4	3

Каково наибольшее различие в числе допущенных ошибок? Какое число ошибок является типичным для данной группы учащихся? Укажите, какие статистические характеристики были использованы при ответе на поставленные вопросы.

22. При изучении качества продукции, выпущенной цехом, определяли число бракованных деталей в каждом из 50 произвольным образом выбранных ящиков с одинаковым числом деталей. Получили такую таблицу:

Число бракованных деталей	0	1	2	3	4
Число ящиков	8	22	13	5	2

Найдите среднее арифметическое, размах и моду полученного ряда данных. Объясните практический смысл этих статистических характеристик.

23. Определяя степень засоренности цветочных семян, выясняли, сколько семян сорных растений содержится в каждом из 100 произвольным образом выбранных пакетов с одинаковым числом семян. Получили такую таблицу:

Число семян сорных растений	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Число пакетов	3	16	26	17	18	10	3	5	1	1

Для полученного ряда данных найдите среднее арифметическое и моду.

24. При изучении учебной нагрузки учащихся попросили 32 восьмиклассников отметить время (с точностью до 0,1 ч), которое они затратили в определенный день на выполнение домашних заданий. Получили следующие данные: 2,7; 2,5; 3,1; 3,4; 1,6; 1,8; 4,2; 2,6; 3,4; 3,2; 2,9; 1,9; 1,5; 3,7; 3,6; 3,1; 2,9; 2,8; 1,5; 3,1; 3,4; 2,2; 2,8; 4,1; 2,4; 4,3; 1,9; 3,6; 1,8; 2,8; 3,9.

Представьте полученные данные в виде интервального ряда с интервалами длиной 0,5 ч.

25. Среднее арифметическое некоторого ряда данных, состоящего из 10 чисел, равно 7. К этому ряду приписали числа 17 и 18. Чему равно среднее арифметическое нового ряда чисел?

26. Имеются следующие данные о распределении участников похода по возрасту:

Возраст, лет	18–22	22–26	26–30	30–34
Число участников	25	18	5	2

Зменив каждый интервал его серединой, найдите средний возраст участников похода.

27. Сколько чисел в ряду, если его медианой служит: а) пятнадцатый член; б) среднее арифметическое семнадцатого и восемнадцатого членов?

28. В ряду данных, состоящем из 12 чисел, наибольшее число увеличили на 6. Изменятся ли и как: а) среднее арифметическое; б) размах; в) мода; г) медиана?

29. В ряду данных, состоящем из 15 чисел, наименьшее число уменьшили на 5. Изменятся ли при этом и как: а) среднее арифметическое; б) размах; в) мода; г) медиана?

30. По четвертным оценкам по геометрии учащиеся одного класса распределились следующим образом: «5» – 4 ученика, «4» – 10 учеников, «3» – 18 учеников, «2» – 2 ученика. Постройте столбчатую диаграмму, характеризующую распределение учащихся по четвертным оценкам.

31. Постройте столбчатую диаграмму, показывающую распределение рабочих цеха по тарифным разрядам, которое представлено в следующей таблице:

Тарифный разряд	1	2	3	4	5	6
Число рабочих	4	2	10	16	8	4

32. В таблице показано распределение сотрудников отдела по стажу работы:

Стаж работы, лет	3 и менее	4	5	6	7 и более
Относительная частота, %	8	12	16	24	40

Постройте круговую диаграмму, иллюстрирующую распределение сотрудников отдела по стажу работы.

33. В таблице приведены значения среднемесячных температур воздуха (в градусах Цельсия) в городе за год:

Месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Среднемесячная температура °С	-16	-10	-6	4	8	16	22	19	10	6	-3	-11

Постройте полигон, иллюстрирующий изменения среднемесячных температур за год.

34. В фермерском хозяйстве площади, отведенные под посевы зерновых, распределены следующим образом: пшеница – 63%, овес – 16%, просо – 12%, гречиха – 9%. Постройте круговую диаграмму, иллюстрирующую распределение площадей, отведенных под зерновые.

35. При изучении распределения семей, проживающих в доме, по количеству членов семьи была составлена таблица, в которой для каждой семьи с одинаковым числом членов указана относительная частота.

Пользуясь таблицей, постройте полигон относительных частот.

Количество членов семьи	Относительная частота, %
1	12
2	18
3	22
4	30
5	11
6	7

36. На рисунке 11 построен полигон,

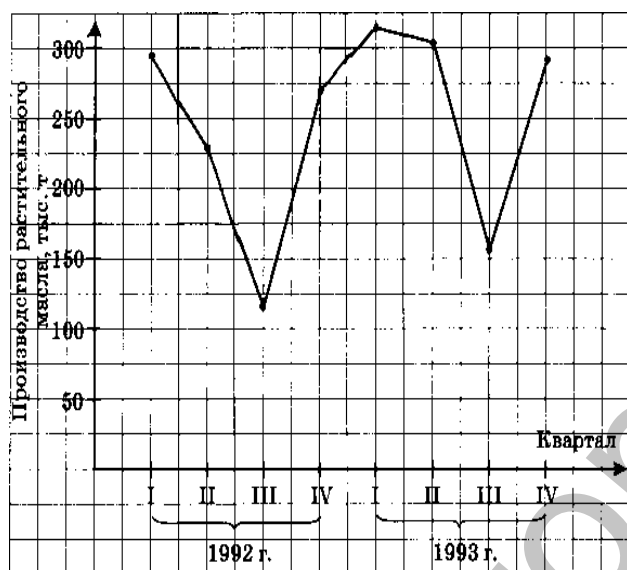


Рис. 11.

гон, иллюстрирующий производство растительного масла в России в 1992 и 1993 гг. (по кварталам). Пользуясь рисунком: а) охарактеризуйте динамику изменения производства растительного масла в 1992 и 1993 гг.; б) укажите два квартала, следующие друг за другом, когда произошло наибольшее падение производства растительного масла; в) укажите два квартала, следующие друг за другом, когда произошел наибольший прирост производства растительного масла.

37. На рисунке 12 построены полигоны, иллюстрирующие продажу магазином в течение недели компьютеров (сплошная линия) и телевизоров (пунктирная линия). Укажите два дня, следующие друг за другом, когда: а) число проданных телевизоров возросло больше, чем число проданных компьютеров; б) число проданных телевизоров возросло, а число проданных компьютеров уменьшилось; в) число проданных компьютеров возросло, а число проданных телевизоров осталось тем же.

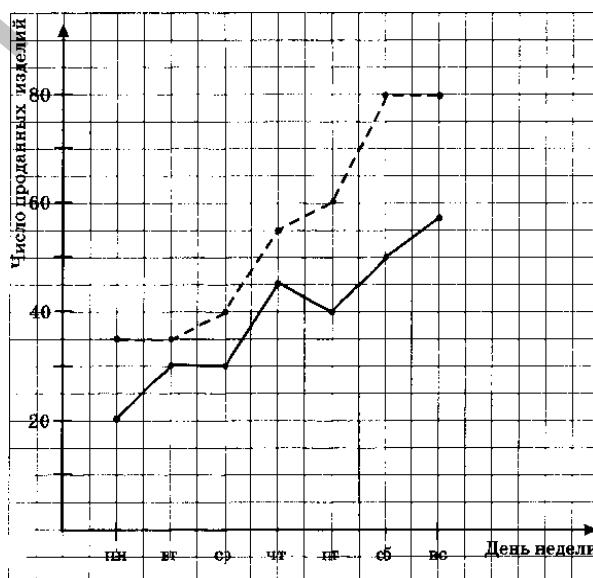


Рис. 12.

38. Учащихся одного класса попросили отметить, сколько минут в определенный день они затратили на дорогу от дома до школы. Получили следующие результаты: 5, 16, 25, 10, 24, 13, 18, 14, 20, 10, 23, 19, 15, 22, 16, 12, 12, 17, 14, 12, 25, 12, 21, 18, 20. Используя эти данные, составьте ин-

тервальный ряд с интервалом в 3 мин. Постройте соответствующую гистограмму и преобразуйте ее в полигон, заменив каждый интервал его серединой. Найдите, сколько времени в среднем затратили учащиеся на дорогу от дома до школы.

39. В таблице показано распределение призывников района по росту:

Рост, см	Частота
155–160	6
160–165	10
165–170	28
170–175	36
175–180	48
180–185	26
185–190	16
190–195	8

Постройте гистограмму, характеризующую распределение призывников по росту.



41. Наблюдая за работой бригады токарей, установили, сколько времени тратили они на обработку одной детали. Обобщая полученные данные, составили таблицу:

Время, мин	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20
Число токарей	2	6	11	7	5

Пользуясь таблицей, постройте гистограмму, характеризующую распределение токарей бригады по времени, затрачиваемому на обработку одной детали. Преобразуйте гистограмму в полигон, заменяя каждый интервал его серединой.

42. В таблице частот, характеризующей распределение членов артели по числу изготовленных изделий, одно число оказалось стертым:

Число изделий	12	13	14	15	16
частота	1	3	—	6	2

Восстановите его, зная, что в среднем члены артели изготовили по 14,2 изделия.

43. В ходе статистического исследования были опрошены 80 учащихся, которых попросили указать время (в минутах), затраченное на доро-

гу от дома до школы. По результатам исследования были составлены два интервальных ряда: один с интервалом длиной в 5 мин, а другой с интервалом длиной в 10 мин. Для каждого интервального ряда построили гистограмму. Чем различаются эти гистограммы и что у них общего?

44. Имеются следующие данные о годовых удоях молока на молочной ферме:

Годовой удой молока, л	Число коров
до 1000	2
1000-2000	8
2000-3000	23
3000-4000	13
4000-5000	2

Заменяя каждый интервал его серединой, найдите средний годовой удой молока от одной коровы на этой ферме.

Комбинаторика

45. Сколько элементов содержит декартово произведение $A \times A$, если $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

46. На тарелке лежат 10 яблок и 18 груш. Сколькими способами можно выбрать один плод?

47. Сколько трехзначных чисел можно составить, используя цифры 1, 3, 6?

48. В классе 25 человек, посещающих факультативные занятия по физике и математике. Углубленно изучают оба предмета 9 человек, а математику – 15. Сколько человек посещает факультативные занятия только по физике?

49. Пусть число дождливых дней равно 13, ветреных – 9, холодных – 6, дождливых и ветреных – 4, дождливых и холодных – 2, ветреных и холодных – 2. Дождливых, ветреных и холодных – 1. Найти общее число плохих дней.

50. В классе 30 человек. Из них 20 человек занимается баскетболом, 12 – плаванием, 17 – лыжами, 5 занимаются баскетболом и плаванием, 8 – плаванием и лыжами, 6 посещают секции по баскетболу и лыжам. Один ученик освобожден от физкультурных занятий. Сколько человек занимается всеми указанными видами спорта? Сколько человек занимается только одним видом спорта?

51. В группе 25 студентов. 10 знают немецкий язык, 12 – английский. Каким может быть число студентов знающих оба языка; знающих хотя бы один язык?

52. Сколькими способами можно выбрать председателя собрания и секретаря из 30 человек?

53. Используя правило произведения, найдите сколькими способами можно разместить 5 человек на 23 местах?

54. В соревнованиях по плаванию участвуют 7 школьников и 10 студентов. Сколькими способами могут распределяться места между школь-

никами, если никакие два участника не набрали одинакового количества очков?

55. Сколькими способами из 20 учащихся класса можно выделить актив в составе: староста, заместитель старосты, редактор стенгазеты, спортсектор?

56. Пятеро студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им отметки три, четыре, пять?

57. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если любую из них в каждом числе использовать не более одного раза?

58. В классе 12 предметов. В понедельник 5 уроков, причем все уроки разные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?

59. Используя понятие «размещения» решите задачу: сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 2, 4, 6, 8, если цифры в записи числа не повторяются?

60. Два почтальона должны разнести 12 писем по 12 адресам. Сколькими способами они могут это сделать?

61. Найти число способов расстановки восьми ладей на шахматной доске, при которых они не бьют друг друга.

62. Сколькими способами можно рассадить 10 человек за круглым столом?

63. Сколько шестизначных чисел, не кратных 5, можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что каждая цифра входит в шестизначное число только один раз?

64. Сколько четных пятизначных чисел можно образовать из цифр 0, 1, 2, 3, 4 при условии, что каждая цифра входит в пятизначное число только один раз?

65. Найти значение выражения $\frac{15!}{7!9!}$; $\frac{7!+6!+5!}{8!-7!}$.

66. Упростите: $\frac{(a+1)!}{(a-2)!}$.

67. Сколько различных кортежей получится, если переставить буквы в слове «математика».

68. У Маши 7 карандашей различных цветов. Сколькими способами она может выбрать 3 карандаша?

69. Дано множество $M=\{a, b, c, d\}$. Подсчитайте количество всевозможных подмножеств данного множества.

70. Сколькими способами из 7 человек можно выбрать комиссию, состоящую из 3 человек?

71. В шахматном турнире принимают участие 12 человек. Сколько будет сыграно партий, если любые два участника встретятся между собой один раз?

72. На шахматном турнире, проводившемся в один круг, любые два участника встречались между собой один раз. Была сыграна 91 партия. Сколько человек участвовало в турнире?

73. В кондитерской продаются пирожные 4 сортов: наполеоны, безе, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?
74. Сколькими способами читатель может выбрать 4 книги из 6?
75. Во взводе 5 сержантов и 50 солдат. Сколькими способами можно составить наряд из одного сержанта и трех солдат?
76. У Ирины пять подруг: Вера, Зоя, Марина, Полина и Светлана. Она решила двух из них пригласить в кино. Укажите все возможные варианты выбора подруг. Сколько таких вариантов?
77. Стадион имеет четыре входа: A , B , C и D . Укажите все возможные способы, какими посетитель может войти через один вход, а выйти через другой. Сколько таких способов?
78. Используя цифры 0, 2, 4, 6, составьте все возможные трехзначные числа, в которых цифры не повторяются.
79. В соревнованиях по футболу участвовало 12 команд. Каждая команда провела с каждой из остальных по одной игре на своем поле и по одной игре на поле соперника. Сколько всего игр было сыграно?
80. При встрече 8 человек обменялись рукопожатиями. Сколько всего было сделано рукопожатий?
81. Учащиеся 9 класса решили обменяться фотографиями. Сколько фотографий для этого потребуется, если в классе 24 учащихся?
82. Из села D . в село M . ведут три дороги, а из села M . в село P . – четыре дороги. Сколькими способами можно попасть из D . в P . через M .?
83. В кафе имеются три первых блюда, пять вторых блюд и два третьих. Сколькими способами посетитель кафе может выбрать обед, состоящий из первого, второго и третьего блюд?
84. Петр решил пойти на новогодний карнавал в костюме мушкетера. В ателье проката ему предложили на выбор различные по фасону и цвету предметы: пять видов брюк, шесть камзолов, три шляпы, две пары сапог. Сколько различных костюмов можно составить из этих предметов?
85. Курьер должен разнести пакеты в 7 различных учреждений. Сколько маршрутов может он выбрать?
86. Сколькими способами 9 человек могут встать в очередь в театральную кассу?
87. Сколько существует выражений, тождественно равных произведению $abcde$, которые получаются из него перестановкой множителей?
88. Ольга помнит, что телефон подруги оканчивается цифрами 5, 7, 8, но забыла, в каком порядке эти цифры следуют. Укажите наибольшее число вариантов, которые ей придется перебрать, чтобы дозвониться подруге.
89. Сколько шестизначных чисел (без повторения цифр) можно составить из цифр: а) 1, 2, 5, 6, 7, 8; б) 0, 2, 5, 6, 7, 8?
90. Сколько среди четырехзначных чисел (без повторения цифр), составленных из цифр 3, 5, 7, 9, таких, которые: а) начинаются с цифры 3; б) кратны 15?
91. Найдите сумму цифр всех четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 3, 5, 7 (без их повторения).

92. Сколько чисел (без повторения цифр) можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, таких, которые: а) больше 3000; б) больше 2000?

93. Сколько существует перестановок букв слова «конус», в которых буквы *к*, *о*, *н* стоят рядом?

94. Сколькими способами можно расставить на полке 12 книг, из которых 5 книг – это сборники стихов, так, чтобы сборники стихов стояли рядом в произвольном порядке?

95. Сколькими способами 5 мальчиков и 5 девочек могут занять в театре в одном ряду места с 1 по 10? Сколькими способами они могут это сделать, если мальчики будут сидеть на нечетных местах, а девочки – на четных?

96. Сколькими способами может разместиться семья из трех человек в четырехместном купе, если других пассажиров в купе нет?

97. Сколькими способами могут занять первое, второе и третье места 8 участниц финального забега на дистанции 100 м?

98. На станции 7 запасных путей. Сколькими способами можно расставить на них 4 поезда?

99. Сколькими способами можно изготовить трехцветный флаг с горизонтальными полосами, если имеется материал 7 различных цветов?

100. Сколькими способами организаторы конкурса могут определить, кто из 15 его участников будет выступать первым, вторым и третьим?

101. Сколькими способами 6 студентов, сдающих экзамен, могут занять места в аудитории, в которой стоит 20 одноместных столов?

102. В классе 7 человек успешно занимаются математикой. Сколькими способами можно выбрать из них двоих для участия в математической олимпиаде?

103. В магазине «Филателия» продается 8 различных наборов марок, посвященных спортивной тематике. Сколькими способами можно выбрать из них 3 набора?

104. Учащимся дали список из 10 книг, которые рекомендуется прочитать во время каникул. Сколькими способами ученик может выбрать из них 6 книг?

105. Из лаборатории, в которой работают заведующий и 10 сотрудников, надо отправить 5 человек в командировку. Сколькими способами это можно сделать, если: а) заведующий лабораторией должен ехать в командировку; б) заведующий лабораторией должен остаться?

106. Сколько существует четырехзначных чисел, кратных 10, если цифры в числах могут повторяться?

107. Из цифр 1, 2, 3, 5 составили все возможные четырехзначные числа (без повторения цифр). Сколько среди них таких чисел, которые больше 2000, но меньше 5000?

108. Сколько четных четырехзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно записать с помощью цифр: а) 1, 2, 3, 7; б) 1, 2, 3, 4?

109. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составили все возможные трехзначные числа (без повторения цифр). Сколько среди них таких, которые: а) кратны 2; б) кратны 3?

110. На плоскости отметили точку. Из нее провели 9 лучей. Сколько получилось при этом углов?

111. Сколькими способами из класса, где учатся 24 учащихся, можно выбрать: а) двух дежурных; б) старост/ и помощника старосты?

112. У Антона шесть друзей. Он может пригласить в гости одного или нескольких из них. Определите общее число возможных вариантов.

113. Сколько команд участвовало в финале первенства, если известно, что каждая команда сыграла с каждой из остальных по одной игре на своем поле и по одной игре на поле соперника, причем всего было сыграно 30 игр?

114. Сколькими способами четыре пассажира: Алексеев, Смирнов, Федоров и Харитонов – могут разместиться в девяти вагонах поезда, если: а) все они хотят ехать в разных вагонах; б) Алексеев и Смирнов хотят ехать в одном вагоне, а Федоров и Харитонов – в других вагонах, причем различных?

115. На плоскости отметили несколько точек, никакие три из них не лежат на одной прямой. Через каждые две точки провели прямую. Сколько точек было отмечено, если всего было проведено 28 прямых?

116. В 9 «А» классе учатся 25 учащихся, в 9 «Б» – 20 учащихся, а в 9 «В» – 18 учащихся. Для работы на пришкольном участке надо выделить трех учащихся из 9 «А», двух – из 9 «Б» и одного – из 9 «В». Сколько существует способов выбора учащихся для работы на пришкольном участке?

117. Сколькими способами группу из 12 человек можно разбить на две группы: а) по 4 и 8 человек; б) по 5 и 7 человек?

118. В отделе работают 5 ведущих и 8 старших научных сотрудников. В командировку надо послать двух ведущих и трех старших научных сотрудников. Сколькими способами может быть сделан выбор сотрудников, которых надо послать в командировку?

119. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составили все возможные трехзначные числа (с повторением цифр). Сколько среди них таких, сумма цифр которых равна: а) 3; б) 4; в) 6?

120. Из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 составили все возможные трехзначные числа (без повторения цифр). Сколько среди них таких, сумма цифр которых равна: а) 6; б) 9?

121. Сколько надо взять элементов, чтобы число размещений из них по четыре было в 12 раз больше, чем число размещений из них по два?

Теория вероятностей

122. В партии из 1000 деталей отдел технического контроля обнаружил 12 нестандартных деталей. Какова относительная частота появления нестандартных деталей?

123. Выберите какой-нибудь текст, содержащий 150 слов. Подсчитайте число слов, составленных из шести букв. Найдите относительную частоту появления слов, которые составлены из шести букв.

124. Выберите 7 строк произвольного текста. Проведя подсчет букв, найдите относительную частоту появления буквы: а) о; б) е; в) а; г) ю.

125. Прodelайте дома такой опыт: подбросьте 50 раз монету в 1р. и подсчитайте, сколько раз выпадет орел. Запишите результаты в тетради. В классе подсчитайте, сколько всеми учениками было проведено опытов и каково общее число выпадений орла. Вычислите относительную частоту выпадения орла при бросании монеты.

126. На учениях по стрельбе из винтовки относительная частота поражения цели у некоторого стрелка оказалась равной 0,8. Сколько попаданий в цель можно ожидать от этого стрелка на соревнованиях, если каждый участник произведет по 20 выстрелов?

127. Многократная проверка показала, что всхожесть семян огурцов определенного сорта равна 0,9. Посадили 85 семян этого сорта. Найдите ожидаемое число проросших семян.

128. Для новогодней лотереи отпечатали 1500 билетов, из которых 120 выигрышных. Какова вероятность, что купленный билет окажется выигрышным?

129. Какова вероятность того, что при бросании игрального кубика выпадет: а) 1 очко; б) более 3 очков?

130. Ученик записал в тетради произвольное двузначное число. Какова вероятность того, что сумма цифр этого числа окажется равной 6?

131. В кооперативном доме 93 квартиры, из которых 3 находятся на первом этаже, а 6 – на последнем. Квартиры распределяются по жребию. Какова вероятность того, что жильцу не достанется квартира, расположенная на первом или на последнем этаже?

132. Андрей и Олег договорились, что если при бросании двух игральных кубиков в сумме выпадет число очков, кратное 5, то выигрывает Андрей, а если в сумме выпадет число очков, кратное 6, то выигрывает Олег. Справедлива ли эта игра и если нет, то у кого из мальчиков больше шансов выиграть?

133. Набирая номер телефона, состоящий из 7 цифр, абонент забыл, в какой последовательности идут три последние цифры. Помня лишь, что это цифры 1, 5 и 9, он набрал первые четыре цифры, которые знал, и наугад комбинацию из цифр 1, 5 и 9. Какова вероятность того, что абонент набрал верный номер?

134. Чтобы открыть сейф, надо набрать в определенной последовательности пять цифр (без их повторения): 1, 2, 3, 4 и 5. Какова вероятность того, что если набирать цифры в произвольном порядке, то сейф откроется?

135. На четырех карточках написаны буквы *о*, *т*, *к*, *р*. Карточки перевернули и перемешали. Затем открыли наугад последовательно одну за другой эти карточки и положили их в ряд. Какова вероятность того, что получится слово «крот»?

136. В пачке находятся одинаковые по размеру 7 тетрадей в линейку и 5 в клетку. Из пачки наугад берут 3 тетради. Какова вероятность того, что все 3 тетради окажутся в клетку?

137. В ящике находится 10 деталей, одна из которых нестандартная. Наугад берут 2 детали. Какова вероятность того, что обе детали окажутся стандартными?

138. Четыре билета на елку распределили по жребью между мальчиками и 12 девочками. Какова вероятность того, что билеты достанутся 2 мальчикам и 2 девочкам?

139. В коробке лежит 8 красных карандашей и 4 синих. Из коробки наугад вынимают 5 карандашей. Какова вероятность того, что 3 из них окажутся красными, а 2 – синими?

140. На полке стоит 12 книг, из которых 4 – это учебники. С полки наугад снимают 6 книг. Какова вероятность того, что 3 из них окажутся учебниками?

141. Для украшения елки принесли коробку, в которой находится 10 красных, 7 зеленых, 5 синих и 8 золотых шаров. Из коробки наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что он окажется: а) красным; б) золотым; в) красным или золотым?

142. В денежно-вещевой лотерее на 100000 билетов разыгрывается 1200 вещевых и 800 денежных выигрышей. Какова вероятность: а) вещевого выигрыша; б) денежного выигрыша; в) какого-либо выигрыша?

143. Многократные испытания показали, что для некоторого стрелка вероятность выбить при стрельбе 10 очков равна 1, а вероятность выбить 9 очков равна 0,3. Чему равна для этого стрелка вероятность выбить не менее 9 очков?

144. Взяли четыре карточки. На первой написали букву *о*, на второй *т*, на третьей *с*, на четвертой *п*. Карточки перевернули и перемешали. Затем открыли наугад одну карточку за другой и положили рядом. Какова вероятность того, что в результате получилось слово «стоп» или слово «пост»?

145. На карточках написали цифры 1, 2, 3, после чего карточки перевернули и перемешали. Затем последовательно открыли карточки и положили в ряд. Какова вероятность того, что получится трехзначное число, большее 300?

146. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что на одном кубике выпадет одно очко, а на другом – более трех очков?

147. В одной партии электролампочек 3% бракованных, а в другой 4% бракованных. Наугад берут по одной лампочке из каждой партии. Какова вероятность того, что обе лампочки окажутся бракованными?

148. На одной полке стоит 12 книг, две из которых – сборники стихов, а на другой – 15 книг, три из которых – сборники стихов. Наугад берут с каждой полки по одной книге. Какова вероятность, что обе книги окажутся сборниками стихов?

149. В одном мешке находится 3 красных шара и 2 синих, в другом мешке – 2 красных и 3 синих. Из каждого мешка наугад вынимают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся красными?

150. В мешке находится 5 белых шаров и 3 черных. Из мешка наугад вынимают один шар. Его цвет записывают, шар возвращают в мешок и шары перемешивают. Затем снова из мешка вынимают один шар. Какова вероятность того, что оба раза будут вынуты: а) белые шары; б) черные шары?

151. Вероятность остановки за смену одного станка, работающего в цехе, равна 0,15, а другого – 0,16. Какова вероятность того, что оба станка

за смену не остановятся?

152. При стрельбе по мишени на полигоне одно из двух орудий имеет 800 попаданий из 1000, а другое – 750 попаданий из 1000. Оба орудия выстрелили по мишени по одному разу. Какова вероятность, что мишень будет поражена?

153. В некоторой настольной игре игрок бросает сразу два кубика и делает столько ходов, какова сумма выпавших очков. Какова вероятность того, что игрок сделает менее 10 ходов?

154. В вазе 11 гвоздик, из которых 4 красные. В темноте наугад вынимают три гвоздики. Какова вероятность того, что хотя бы одна из них будет красной?

155. Для натуральных чисел от 1 до 99 включительно найдите частоту появления простых чисел в первом, втором, третьем и т. д. десятке. Сравните относительные частоты для: а) первого и третьего десятков; б) второго и десятого десятков.

156. На карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4. Карточки перевернули и перемешали. Затем открыли наугад последовательно одну за другой три карточки, расположив их в ряд слева направо. Какова вероятность того, что в результате получилось: а) число 123; б) число 312 или 321; в) число, первая цифра которого 2?

157. Для экзамена подготовили билеты с номерами от 1 до 25. Какова вероятность того, что взятый наугад учеником билет имеет: а) однозначный номер; б) двузначный номер?

158. Из ящика, в котором находятся шары с номерами от 1 до 100, наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара не имеет цифры 6?

159. В мешке находятся жетоны с номерами от 1 до 15. Из мешка наугад вынимают один жетон. Какова вероятность того, что номер вынутого жетона не делится ни на 2, ни на 3?

160. В ящике лежит 6 красных шаров и 4 зеленых. Наугад вынимают 3 шара. Какова вероятность того, что 2 шара окажутся красными, а один – зеленым?

161. Из 40 деталей, лежащих в ящике, три бракованные. Из ящика наугад вынимают одну деталь. Какова вероятность, что эта деталь окажется без брака?

162. На каждой карточке написана одна из букв *о, п, р, с, т*. Несколько карточек наугад выкладывают одну за другой в ряд. Какова вероятность, что при выкладывании: а) 3 карточек получится слово *рот*; б) 4 карточек получится слово *сорт*; в) 5 карточек получится слово *спорт*?

163. В коробке находятся шары с номерами 1, 2, 3, 4, 5. Из коробки наугад вынимают два шара. Какова вероятность того, что сумма номеров на них равна: а) 3; б) 5?

164. В коробке находится 12 шаров, среди которых *n* белых, а остальные цветные. Вероятность того, что вынутый наугад шар окажется белым, равна $\frac{1}{3}$. Сколько белых шаров в коробке?

165. В мешке содержится 24 шара. Среди них красных шаров в два

раза больше, чем белых, а остальные шары синие. Вероятность того, что вынутый наугад шар окажется белым, равна u . Найдите вероятность того, что вынутый наугад шар окажется синим.

166. Монету бросают три раза подряд. Какова вероятность того, что каждый раз выпадет решка?

167. Чемодан можно открыть, если правильно набрать шифр 22 075 (при наборе шифра цифра каждого разряда может быть любой от 0 до 9). Какова вероятность того, что человек, набрав произвольно номер из пяти цифр, сможет открыть чемодан?

168. При изготовлении детали совершается две операции. Вероятность брака при первой операции равна 0,01, а при второй – 0,02. Какова вероятность того, что после двух операций деталь окажется стандартной?

169. Бросают три игральных кубика. Какова вероятность того, сумма выпавших на них очков будет равна: а) 3; б) 4; в) 5; г) 7?

170. Миша и Костя по очереди бросают три игральных кубика. Они договорились, что если при очередном броске выпадет 5 очков, то выигрывает Миша, а если выпадет 6 очков, то выигрывает Костя. Справедлива ли эта игра?

171. Игральный кубик бросают три раза подряд. Какова вероятность того, что каждый раз на нем выпадет число очков: а) кратное 2; б) кратное 3?

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

1. Статистика

2. Комбинаторика

3. Теория вероятности

4. Задачи

Репозиторий ВГУ

Учебное издание

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Методические рекомендации

В 2 частях

ЧАСТЬ 2

Составители:

ВИНОГРАДОВА Алла Викторовна

УСТИМЕНКО Владимир Викторович

Технический редактор

Г.В. Разбоева

Компьютерный дизайн

И.В. Волкова

Подписано в печать 19.11.2013. Формат 60х84 $\frac{1}{16}$. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 2,79. Уч.-изд. л. 2,64. Тираж 60 экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

ЛИ № 02330/110 от 30.01.2013.

Отпечатано на ризографе учреждения образования

«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.