

Министерство образования Республики Беларусь  
Учреждение образования «Витебский государственный  
университет имени П.М. Машерова»  
Кафедра алгебры и методики преподавания математики

# **О С Н О В Ы ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ**

## ***Методические рекомендации***

В 2 частях

**ЧАСТЬ 1**

*Витебск  
ВГУ имени П.М. Машерова  
2013*

УДК 51(075.8)

ББК 22.1я73

П62

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 1 от 24.10.2013 г.

Составители: доценты кафедры алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидаты педагогических наук **А.В. Виноградова; В.В. Устименко**

Р е ц е н з е н т :

доцент кафедры геометрии и математического анализа  
ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук  
*С.А. Шлапаков*

**П62 Основы высшей математики** : методические рекомендации : в 2 ч. / сост.: А.В. Виноградова, В.В. Устименко. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2013. – Ч. 1. – 40 с.

Данное издание написано в соответствии с действующей программой по основам высшей математике и предназначено для студентов дневного и заочного отделений педагогического факультета. В настоящем пособии авторы излагают необходимый теоретический материал и приводят подробно разобранные примеры данного курса.

УДК 51(075.8)

ББК 22.1я73

© ВГУ имени П.М. Машерова, 2013

## ВВЕДЕНИЕ

Курс основ высшей математики призван дать студентам педагогического факультета подготовку, необходимую для успешного обучения математике учащихся начальных классов.

Как известно, стержнем начального курса математики являются множества и целые неотрицательные числа. Существующие в настоящее время трактовки понятий числа требуют от студентов овладения рядом понятий математики, таких, как «множество», «отношение», «высказывание» и др. Поэтому неслучайно изучение курса математики начинается с рассмотрения этих общих понятий.

Овладеть курсом математики, приобрести необходимые умения и навыки можно лишь в процессе решения задач. Предлагаемое пособие призвано оказать помощь студентам педагогического факультета в достижении этой цели.

В данной работе большое внимание уделяется вопросам совершенствования логической грамотности учителя, формированию у него в процессе решения задач таких умений, как умение разграничивать математический и методический материал, умение анализировать задания из учебников математики начальных классов с точки зрения используемых при их выполнении теоретических положений и др.

В методические рекомендации включены такие темы, как «Множества и операции над ними», «Соответствия», «Отношения на множестве», «Отображения». Пособие содержит теоретический материал, задачи с решениями и обоснованиями по данным темам, для студентов педагогического факультета. Данные задания предполагают развитие культуры мышления студентов и умения пользоваться языком математики.

# 1. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

В математике часто рассматриваются те или иные группы объектов как единое целое: натуральные числа, треугольники, квадраты и т.д. Все эти различные совокупности называют **множествами**.

Понятие множества является основным понятием математики, оно не определяется через другие, уже известные. Его смысл раскрывается лишь путем описания. Например: множество учеников данного класса, множество книг в библиотеке, числа от 1 до 10, треугольники, множество корней данного уравнения и т.д.

Множества состоят из отдельных объектов, называемых **элементами**. Обозначают множества прописными буквами латинского алфавита  $A, B, C, \dots$ , а элементы строчными буквами  $a, b, c, \dots$ .

В математике нередко приходится выяснять, принадлежит какой-либо объект рассматриваемому множеству или не принадлежит. Например, мы говорим, что 5 – натуральное число, а 0,7 не является натуральным числом. Другими словами, мы утверждаем, что 5 принадлежит множеству натуральных чисел, а 0,7 – не принадлежит. Чтобы записать эти утверждения на математическом языке, вводят символы  $\in$  и  $\notin$ . Тогда предложение вида «объект  $a$  принадлежит множеству  $A$ » записывают, используя символы:  $a \in A$ . Например, 5 – натуральное число, значит 5 принадлежит множеству натуральных чисел:  $5 \in N$ . Если элемент не содержится в данном множестве, то записывают:  $a \notin A$ . Например, число 0,7 не является натуральным числом, значит 0,7 не принадлежит множеству натуральных чисел:  $0,7 \notin N$ . Элементами множества могут быть множества. Например, можно говорить о множестве классов некоторой школы. Элементы этого множества – классы, являющиеся в свою очередь множествами учащихся. Но учащиеся уже не являются элементами множества классов школы.

В зависимости от числа элементов множества делят на конечные и бесконечные. Множество не содержащее ни одного объекта называют **пустым** и обозначают  $\emptyset$ . Все числовые множества являются бесконечными. Для них приняты специальные обозначения:  $N$  – множество натуральных чисел,  $Z$  – целых,  $Q$  – рациональных,  $R$  – действительных чисел.

Считают, что множество задано своими элементами, т.е. **множество задано**, если о любом объекте можно сказать: принадлежит он этому множеству или не принадлежит. **Задавать множество можно следующими способами:**

1) Если множество конечно, то его можно задать перечислением всех его элементов. Так, если множество  $A$  состоит из элементов 2, 5, 7, 12, то пишут  $A = \{2, 5, 7, 12\}$ . Количество элементов множества  $A$  равно 4, пишут  $n(A) = 4$ .

Но если множество бесконечно, то его элементы нельзя перечислить. Трудно задать множество перечислением и конечное множество с большим числом элементов. В таких случаях применяют другой способ задания множества.

2) Множество можно задать указанием характеристического свойства его элементов. **Характеристическое свойство** – это такое свойство, которым обладает каждый элемент, принадлежащий множеству, и не обладает ни один элемент, не принадлежащий ему. Рассмотрим, например, множество  $X$  двузначных чисел: свойство, которым обладает каждый элемент данного множества – «быть двузначным числом». Это характеристическое свойство дает возможность решать о том, принадлежит какой-либо объект множеству  $X$  или не принадлежит. Например, число 45 содержится в данном множестве, т.к. оно двузначное, а число 4 множеству  $X$  не принадлежит, т.к. оно однозначное и не является двузначным. Случается, что одно и то же множество можно задать, указав различные характеристические свойства его элементов. Например, множество квадратов можно задать как множество прямоугольников с равными сторонами и как множество ромбов с прямым углом.

В тех случаях, когда характеристическое свойство элементов множества можно представить в символической форме, возможна соответствующая запись. Если множество  $B$  состоит из всех натуральных чисел, меньших 10, то пишут  $B = \{x \in N \mid x < 10\}$ .

Второй способ – более общий и позволяет задавать как конечные, так и бесконечные множества.

В математике изучают не только те или иные множества, но и отношения, взаимосвязи между ними.

Если множества  $A$  и  $B$  имеют общие элементы, т.е. элементы, принадлежащие множествам  $A$  и  $B$  одновременно, то говорят, что эти множества пересекаются. Пусть множество  $A = \{a, b, c, d, e\}$  и  $B = \{b, c, d, k, l\}$ . Элементы  $b, d$  принадлежат и множеству  $A$ , и множеству  $B$ . Значит, множества  $A$  и  $B$  имеют общие элементы, а сами множества пересекаются:  $A \cap B$ . Если множества не имеют общих элементов, например,  $A = \{1, 2, 3\}$  и  $B = \{4, 5\}$ , то они не пересекаются:  $A \not\cap B$ .

Иногда приходится рассматривать не все множество, а только его часть. Например, не все множество натуральных чисел, а только множество простых чисел. Тогда речь идет о подмножестве. Если любой элемент множества  $A$  принадлежит так же и множеству  $B$ , то  $A$  называют подмножеством  $B$ . Записывают  $A \subset B$ . Знак  $\subset$  называют *знаком включения*.

Пусть даны множества:  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$ . Элементы 1, 2, 3 принадлежат множеству  $A$ :  $1 \in A$ ,  $2 \in A$ ,  $3 \in A$ . Но из этих же

элементов состоит и все множество  $B$ . Значит множество  $B$  есть подмножество множества  $A$ :  $B \subset A$ .

Любое множество является подмножеством самого себя, т.е.  $A \subset A$ . Пустое множество является подмножеством любого множества:  $\emptyset \subset A$ . Все множества являются подмножествами одного и того же множества, называемого универсальным  $U$ .

Найдем все подмножества множества  $X = \{a, b, c\}$ . Выпишем одноэлементные подмножества:  $\{a\}$ ,  $\{b\}$ ,  $\{c\}$ , затем двухэлементные:  $\{a, b\}$ ,  $\{a, c\}$ ,  $\{b, c\}$ , трехэлементные:  $\{a, b, c\}$  и множество, не содержащее ни одного элемента  $-\emptyset$ . Количество подмножеств множества, состоящего из  $n$  элементов равно  $2^n$ . В нашем примере множество состоит из трех элементов, значит количество подмножеств равно  $2^3 = 8$ .

Если множества состоят из одинаковых элементов и их количество равно, и каждый элемент множества  $A$  является элементом множества  $B$  и наоборот, то  $A \subset B$  и  $B \subset A$  и говорят, что множества  $A$  и  $B$  равны:  $A = B$ . Например,  $A = \{a, d, c, d\}$ ,  $B = \{c, b, d, a\}$ , значит  $A = B$ . Для равных множеств порядок элементов не является существенным.

Таким образом, между множествами возникают следующие отношения: множества могут пересекаться, не пересекаться, быть равными и включаться одно в другое.

Для наглядности употребляют изображения множеств на плоскости, которые называют **диаграммами Эйлера-Венна**, (множества наглядно представляют в виде кругов, овалов), где штриховкой обозначают нужные области. Тогда выше перечисленные отношения можно изобразить следующим образом.

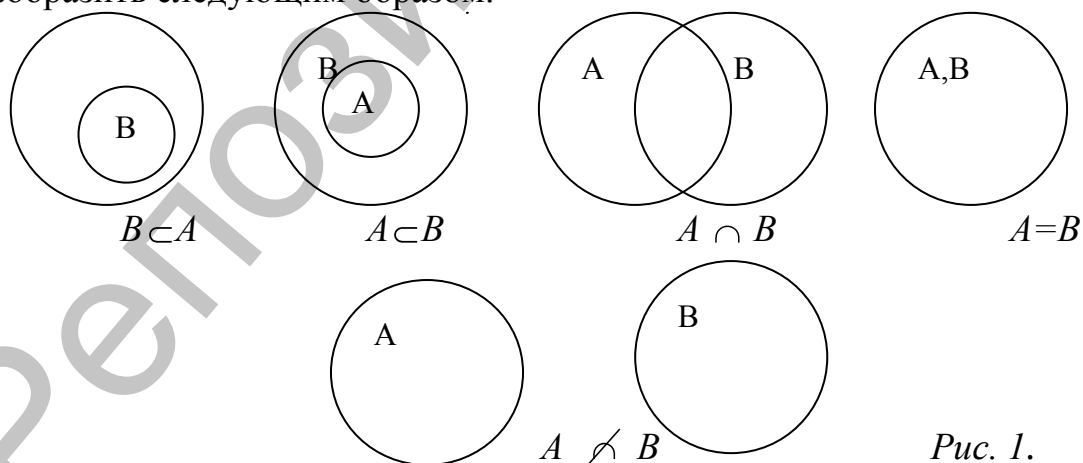


Рис. 1.

Нередко бывает так, что рассматривают только подмножества одного и того же множества  $I$ . Такое множество  $I$  называют **универсальным множеством**. Так, если  $A$  – множество студентов первого курса,  $B$  – множество студенток в этом же институте,  $C$  – множество спортсменов этого же института, то в качестве универсального мно-

жества  $I$  можно взять множество студентов данного института, потому, что тогда  $A \subset I$ ,  $B \subset I$ ,  $C \subset I$ . На диаграммах Эйлера-Венна универсальное множество часто изображается в виде прямоугольника, а его подмножества – кругами.

Различные **числовые множества можно изображать на числовой прямой.**

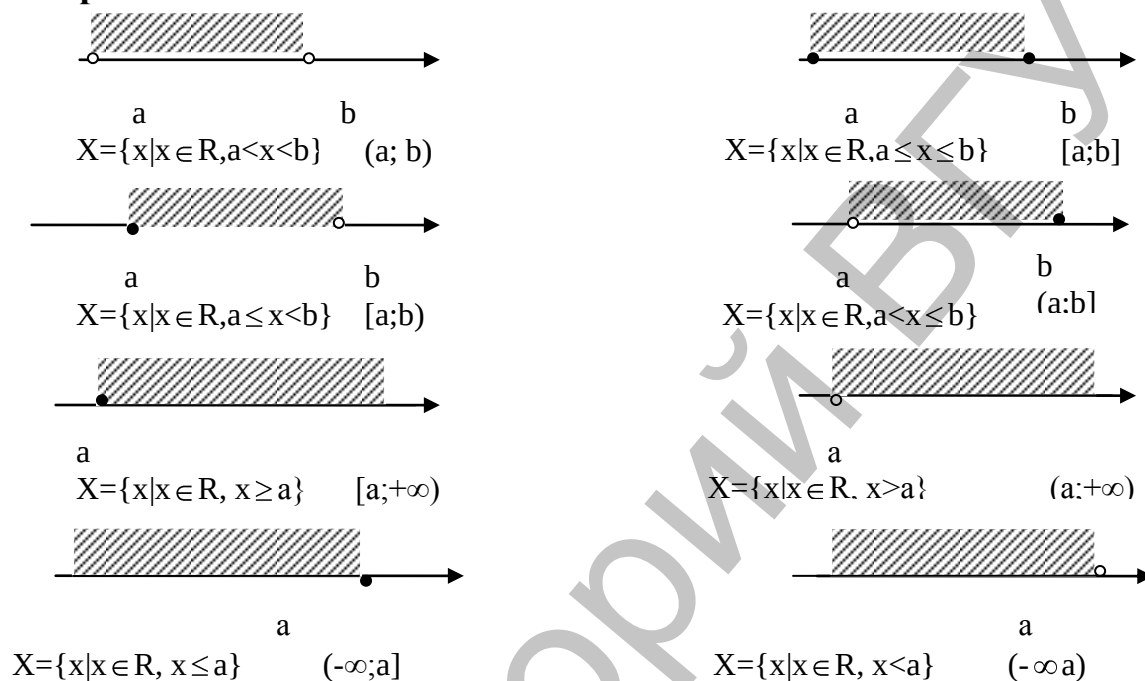


Рис. 2.

Например, изобразим решение неравенства  $3 < x < 7$ .

В данном случае, это будут все действительные числа, расположенные между 3 и 7. Это можно записать так:  $(3; 7)$ .



$$X = \{x | x \in \mathbb{R}; 3 < x < 7\}$$

Рис. 3.

Найдем пересечение и объединение множеств: а)  $(-\infty; 7]$  и  $[1; +\infty)$

Изобразим множества на числовой прямой. Там, где будет наложение двух штриховок – пересечение множеств, где есть хотя бы одна штриховка – объединение данных множеств.



$$A \cap B = [1; 7]$$

$$A \cup B = (-\infty; +\infty)$$

Рассмотрим такую задачу: выясним как связаны между собой множество  $A$  – четных чисел и множество  $B$  – чисел, кратных 4.

1. Не все четные числа делятся на 4, например, 14. Значит равенство  $A=B$  невозможно.

2. Множества  $A$  и  $B$  пересекаются, так как содержат общие элементы – четные числа, кратные 4, например 1

3. Всякое число, кратное 4, является четным. Поэтому, множество  $B$  является подмножеством множества  $A$ :  $B \subset A$ .

Данное решение можно изобразить при помощи диаграмм Эйлера-Венна.

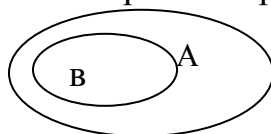


Рис. 4.

Понятие множества является обобщением понятия части и целого, которые осваивают младшие школьники, выполняя разные задания. Например, «назови среди данных чисел четные», «среди данных четырехугольников найди квадраты».

Рассмотрим, какие операции над множествами можно производить. Операции над множествами – некоторые способы получения новых множеств из уже имеющихся.

**Пересечением множеств  $A$  и  $B$**  называется множество, которое обозначают  $A \cap B$  и состоящее из всех тех элементов, что принадлежат одновременно множеству  $A$  и  $B$ :  $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$ .

На диаграммах Эйлера-Венна это выглядит так.

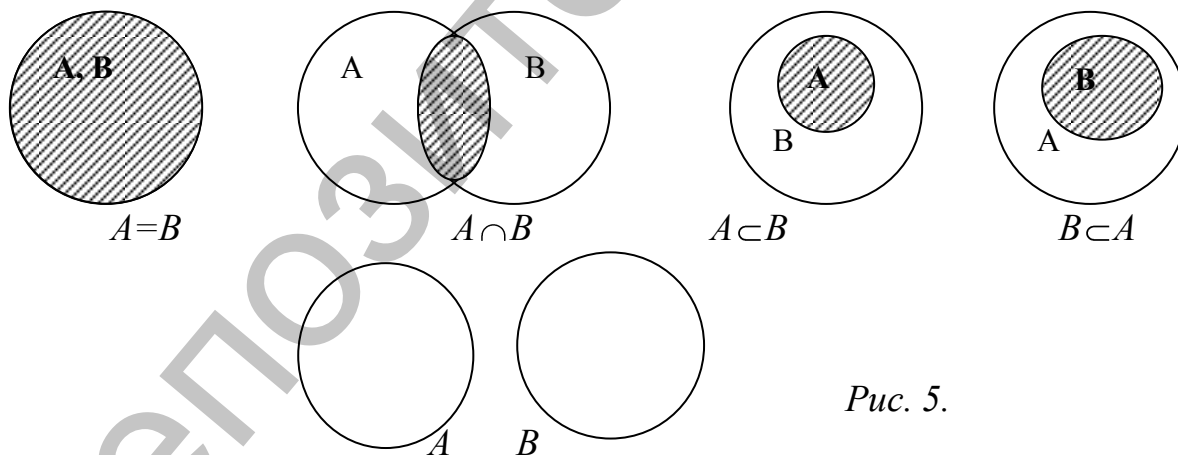


Рис. 5.

**Непересекающимися** называются множества  $A$  и  $B$ , не имеющие общих элементов:  $A \cap B = \emptyset$ .

Из определения пересечения следует, что характеристическое свойство множества  $A \cap B$  составляется из характеристических свойств пересекаемых множеств с помощью союза «и».

Найдем, например, пересечение множества  $A$  – четных натуральных чисел и множества  $B$  – двузначных чисел. Характеристическое свойство элементов множества  $A$  – «быть четным», а  $B$  – «быть дву-

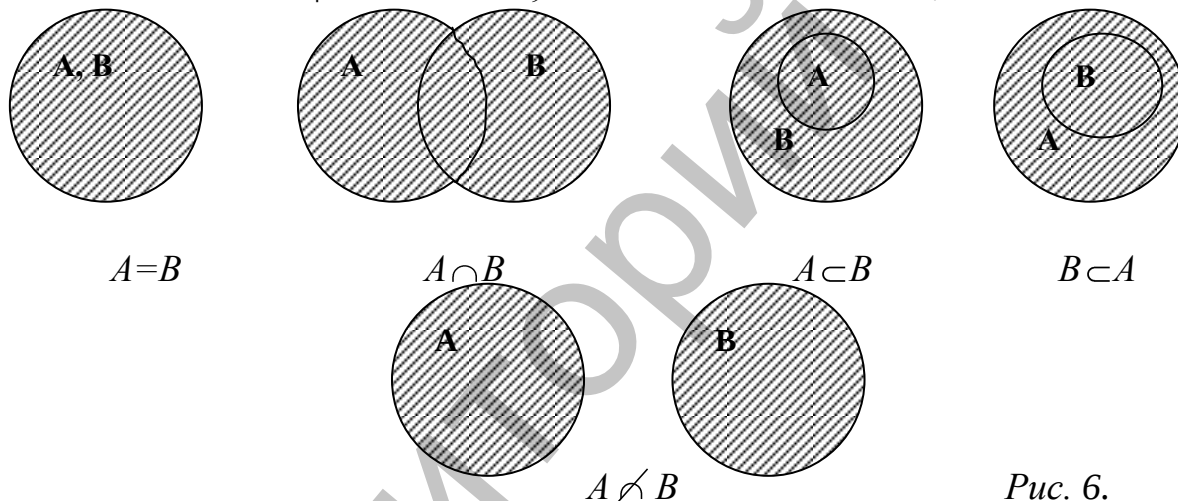


значным числом». Тогда, согласно определению, элементы пересечения данных множеств должны обладать свойством «быть четным и быть двузначным числом». Полученное множество не пусто. Например,  $26 \in A \cap B$ .

Рассмотрим пример: найдем пересечение множеств  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  и  $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ : образуем новое множество  $C$ , состоящее из общих элементов множеств  $A$  и  $B$ :  $C = A \cap B = \{2, 4, 6\}$ .

На основе данного примера построим множество  $K$ , которое содержит все элементы множества  $A$  и множества  $B$ . Это новое множество выглядит так:  $K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$ . Данное множество представляет собой объединение множеств  $A$  и  $B$ .

**Объединением множеств  $A$  и  $B$**  называется множество  $A \cup B$ , состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат множеству  $A$  или  $B$ :  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$ .



Как быть, если множества заданы с помощью характеристического свойства? Из определения следует, что характеристическое свойство элементов множества  $A \cup B$  составляется из характеристических свойств множеств  $A$  и  $B$  с помощью союза «или». Например, объединение множества  $A$  – четных натуральных чисел и множества  $B$  – двузначных чисел. Характеристическое свойство элементов множества  $A$  – «быть четным», а  $B$  – «быть двузначным числом» есть, согласно определению, элементы данных множеств, которые обладают свойством «быть четным или двузначным числом». Полученное множество не пусто. Например,  $4 \in A \cup B$ , так как оно четное, а  $39 \in A \cup B$ , так как оно двузначное.

**Разностью множеств  $A$  и  $B$**  называется множество, обозначаемое  $A \setminus B$  и состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат множеству  $A$  и не принадлежат множеству  $B$ :  $A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$ . Если представить множества  $A$  и  $B$  при помощи кругов Эйлера, то разность  $A \setminus B$  изобразится заштрихованной областью, как на рис. 7.

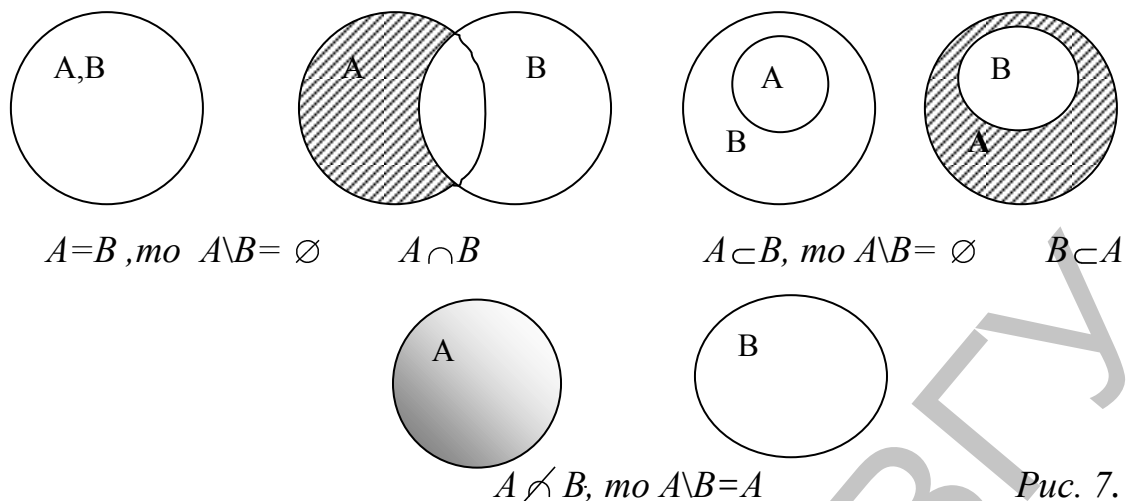


Рис. 7.

В школьном курсе математики чаще всего приходится выполнять вычитание множеств в случае, когда одно из них является подмножеством другого, при этом разность множеств  $A \setminus B$  называют дополнением множества  $B$  до множества  $A$ , и обозначают символом  $B_A'$ .

Пусть  $B \subset A$ . **Дополнением множества  $B$  до множества  $A$**  называется множество, содержащее все элементы множества  $A$ , которые не принадлежат множеству  $B$ :  $B_A' = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$ .

Дополнением множества тупоугольных треугольников на плоскости до множества всех треугольников является множество остроугольных и прямоугольных треугольников. Найдем дополнение множества  $B = \{1, 2, 3\}$  до множества  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ . Получим множество  $B_A' = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ .

Рассмотрим пример. Найдем разность множеств  $A$  и  $B$ . Пусть  $A = \{3, 6, 12, 24\}$ ,  $B = \{6, 24\}$ , тогда по определению разность будет состоять из элементов, которые принадлежат множеству  $A$  и не принадлежат множеству  $B$ :  $A \setminus B = \{3, 12\}$ .

Если  $U$  – универсальное множество, то дополнением множества  $A$  до  $U$  называют разность  $U \setminus A$  (рис.8).



Рис. 8.

В том случае, когда указаны характеристические свойства элементов множеств  $A$  и  $B$ , и известно, что  $B \subset A$ , то множество  $B_A'$  задают также с помощью характеристического свойства, общий вид которого « $x \in A$  и  $x \notin B$ ». Так, если  $A$  – множество четных чисел,  $B$  – множество чисел, кратных 4, то  $B_A'$  – это множество, содержащее такие четные числа, которые не делятся на 4. Например,  $22 \in B_A'$ , так как  $22 \in A$  (оно четное) и  $22 \notin B$  (оно не делится на 4).

Вычитание – это третья операция над множествами, с которыми мы уже познакомились. Известно, что пересечение множеств более сильная операция, чем объединение и вычитание. Поэтому порядок выполнения действий в выражении  $A \setminus B \cap C$  такой: сначала находят пересечение множеств  $B$  и  $C$ , а затем полученное множество вычитают из множества  $A$ . Что касается объединения и вычитания, то их считают равноправными. Если в выражении присутствуют скобки, то сначала выполняются действия, стоящие в них.

Пусть даны множества:  $A = \{a, b, c, d, e\}$ ;  $B = \{c, d, f, k\}$ ;  $C = \{b, c, d, f, m\}$ . Перечислим элементы множеств:  $K = (A \cup B) \cap C$  и  $P = A \cup B \cap C$ . Определим, содержится ли элемент  $m$  в множестве  $K$ , а элемент  $f$  в множестве  $P$ ? Чтобы ответить на вопрос задачи, выполним некоторые действия:  $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, k\}$ , тогда  $K = (A \cup B) \cap C = \{b, c, d, f\}$ . Найдем  $B \cap C = \{c, d, f\}$  (операция пересечения более сильная). Затем перечислим элементы множества  $P = A \cup B \cap C$ :  $P = \{a, b, c, d, e, f\}$ . Видим, что элемент  $m$  в множестве  $K$  не содержится, а элемент  $f$  содержится в множестве  $P$ .

Рассмотрим пример: отметим штриховкой области, изображающие множества а)  $(P \cup Q) \cap S$ , б)  $P \cup Q \cap S$ , в)  $(P \cup Q)' \cup S$ , г)  $P \setminus Q \setminus S$ , если множества находятся в следующем отношении:

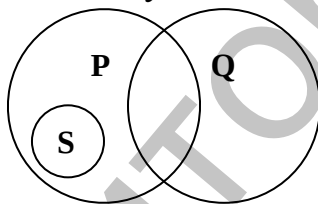
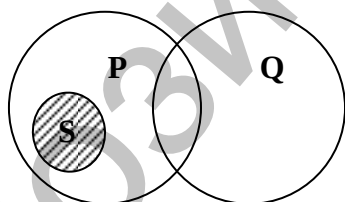


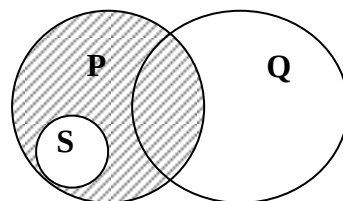
Рис. 9.

Решение:

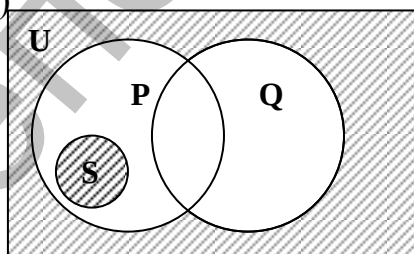
а)



б)



в)



г)

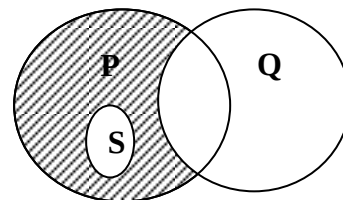


Рис. 10.

Операции над множествами обладают и рядом свойств, аналогичных свойствам сложения и умножения чисел.

1) переместительные законы пересечения и объединения (коммутативность):  $A \cap B = B \cap A$   $A \cup B = B \cup A$

2) сочетательные законы пересечения и объединения (ассоциативность):  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$$3) A \cap A = A \quad A \cup A = A$$

$$4) A \cap \emptyset = \emptyset \quad A \cup \emptyset = A$$

$$5) A \cap U = A \quad A \cup U = U$$

6) распределительные законы (дистрибутивность):

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

7) законы включения:

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (A \cap B) \cap (A \cap C) \subset A \cap (B \cap C)$$

Вычитание и дополнение так же обладает рядом свойств.

$$8) A' \cap A = \emptyset \quad A' \cup A = U$$

$$9) (A \cap B)' = A' \cup B' \quad (A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$10) \emptyset' = U \quad U' = \emptyset$$

$$11) (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C) \quad (A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$$

$$12) (A \setminus B) \cup B = A \cup B \quad (A \setminus B) \cap C = (A \cap B) \setminus (B \cap C)$$

$$13) A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \quad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Данные свойства можно проиллюстрировать на кругах Эйлера в соответствии с порядком действия, например, рассмотрим ассоциативность пересечения, так как оно не столь очевидно, как свойство коммутативности. Изобразим множества  $A, B, C$  в виде трех попарно пересекающихся кругов и изобразим множество  $(A \cap B) \cap C$  на рис. 11, а множество  $A \cap (B \cap C)$  на рис. 12.

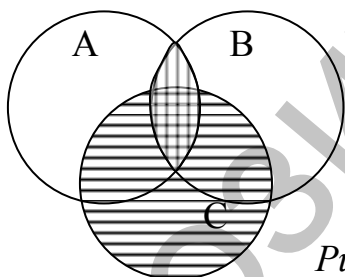


Рис. 11.

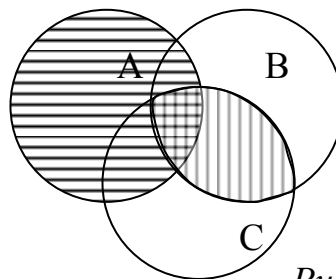


Рис. 12.

Однако рассмотрим более строгие доказательства некоторых законов.

Например, докажем ассоциативность операции объединения  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ .

Чтобы доказать равенство двух множеств, надо убедиться, что каждый элемент множества  $(A \cup B) \cup C$  содержится в множестве  $A \cup (B \cup C)$ , и наоборот.

1. Пусть  $x$  – любой элемент множества  $(A \cup B) \cup C$ . Тогда, по определению объединения,  $x \in A \cup B$  или  $x \in C$ .

Если  $x \in A \cup B$ , то по определению объединения  $x \in A$  или  $x \in B$ . В том случае, если  $x \in A$ , то так же по определению объединения  $x \in (A \cup B) \cup C$ . Если  $x \in B$ , то имеем, что  $x \in B \cup C$ , а значит,  $x \in (A \cup B) \cup C$ . Случай, когда  $x \in A$  и  $x \in B$ , сводится к рассмотренным.

Таким образом, из того, что  $x \in A \cup B$ , следует, что  $x \in (A \cup B) \cup C$ . Если  $x \in C$ , то по определению объединения,  $x \in B \cup C$ , и, следовательно,  $x \in (A \cup B) \cup C$ . Случай, когда  $x \in A \cup B$  и  $x \in C$ , сводится к рассмотренным выше.

Итак, мы показали, что каждый элемент множества  $(A \cup B) \cup C$  содержится в множестве  $A \cup (B \cup C)$ , т.е.  $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$ .

1. Пусть  $y$  – любой элемент из множества  $A \cup (B \cup C)$ . Тогда по определению объединения,  $y \in A$ ,  $y \in B \cup C$ . Если  $y \in A$ , то по определению объединения,  $y \in A \cup B$ , и, следовательно,  $y \in (A \cup B) \cup C$ . Если  $y \in B \cup C$ , то  $y \in B$  или  $y \in C$ . В том случае, когда  $y \in B$ , то  $y \in A \cup B$  и, значит,  $y \in (A \cup B) \cup C$ . Когда же  $y \in C$ , то  $y \in (A \cup B) \cup C$ . Случай, когда  $y \in B$  и  $y \in C$ , сводится к уже рассмотренным.

Итак, мы показали, что каждый элемент множества  $A \cup (B \cup C)$  содержится в множестве  $(A \cup B) \cup C$ , т.е.  $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$ .

Согласно определению равных множеств, заключаем, что  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ .

Аналогично доказывается ассоциативность пересечения множеств и другие свойства операций над множествами.

Понятие множества и операций над множествами позволяют уточнить представление о классификации.

**Классификация** – это действие распределения объектов по классам на основании сходств внутри класса и их отличия от других объектов. Классификация широко применяется в математике.

Например, натуральные числа делятся на четные и нечетные; углы бывают острые, тупые и прямые и т.д.

Любая классификация связана с разбиением некоторого множества объектов на подмножества. Считают, что **множество  $X$  разбито на классы  $X_1, X_2, \dots, X_n$** , если:

- 1) подмножества  $X_1, X_2, \dots, X_n$  попарно не пересекаются;
- 2) объединение этих подмножеств совпадает с множеством  $X$ .

Если не выполнено хотя бы одно из этих условий, классификацию считают неправильной.

Например: а) Множество треугольников  $X$  разбито на три класса: остроугольные, прямоугольные и тупоугольные. Действительно, выделенные подмножества попарно не пересекаются, а их объединение совпадает с множеством  $X$ ; б) Из множества треугольников  $X$  выделили подмножества равнобедренных, равносторонних и разносторонних треугольников. Так как множества равнобедренных и равносторонних треугольников пересекаются, значит, не выполнено первое условие классификации, и разбиения множества  $X$  на классы мы не получили.

Так как разбиение множества на классы связано с выделением его подмножеств, то классификацию можно выполнять при помощи свойств элементов множеств.

Рассмотрим, например, множество натуральных чисел. Его элементы обладают различными свойствами. Нас интересуют числа со свойством «быть кратным 3». Это свойство позволяет выделить из множества  $N$  подмножество, состоящее из чисел, кратных 3. Тогда про остальные натуральные числа можно сказать, что они не кратны 3, т.е. получаем еще одно подмножество множества  $N$ . Так как выделенные подмножества не пересекаются, а их объединение совпадает с множеством  $N$ , то имеем разбиение данного множества на два класса.

Вообще, если на множестве  $X$  задано одно свойство, то это множество разбивается на два класса. Первый – это класс объектов, обладающих данным свойством, а второй – дополнение первого класса до множества  $X$ . Во втором классе содержатся такие объекты множества  $X$ , которые заданным свойством не обладают. Такую классификацию называют **дихотомической**.

Рассмотрим ситуацию, когда для элементов множества заданы два свойства. Например, свойства натуральных чисел: «быть кратным 3» и «быть кратным 5». При помощи этих свойств из множества  $N$  можно выделить два подмножества:  $A$  – множество чисел, кратных 3 и  $B$  – множество чисел, кратных 5. Эти множества пересекаются, но ни одно из них не является подмножеством другого (рис.13). Разбиения на подмножества  $A$  и  $B$  в данном случае не произошло. Но круг, изображающий множество  $N$ , можно рассматривать как состоящий из четырех непересекающихся областей. Каждая область изображает некоторое подмножество множества  $N$ . Множество  $I$  состоит из чисел, кратных 3 и 5, множество  $II$  – из чисел, кратных 3 и не кратных 5, множество  $III$  – из чисел, кратных 5 и не кратных 3, множество  $IV$  – из чисел, не кратных 3 и не кратных 5. Объединение этих четырех множеств есть множество  $N$ .

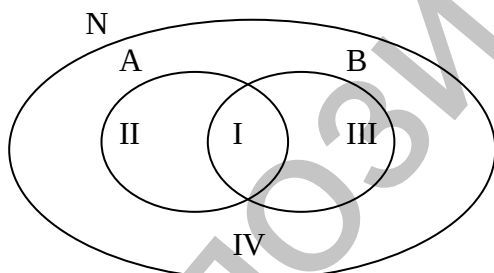


Рис. 13.

Таким образом, выделение двух свойств привело к разбиению множества  $N$  натуральных чисел на четыре класса.

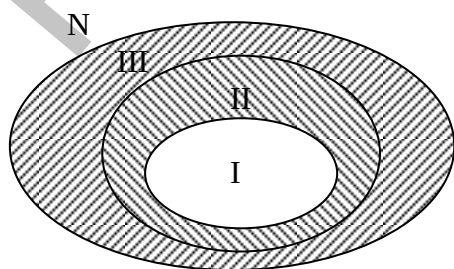


Рис. 14.

Не следует думать, что задание двух свойств элементов множества всегда приводит к разбиению этого множества на четыре класса. Например, при помощи таких двух свойств «быть кратным

3» и «быть кратным 6» множество натуральных чисел разбивается на три класса (рис.14): I – класс чисел, кратных 6; II – класс чисел, кратных 3, но не кратных 6; III – класс чисел, не кратных 3.

Кроме выше перечисленных операций над множествами, можно говорить и о декартовом умножении множеств.

**Декартовым произведением множеств  $A$  и  $B$**  называется множество пар, первая компонента которых принадлежит множеству  $A$ , вторая множеству  $B$ . Обозначают  $A \times B$ .

Таким образом  $A \times B = \{(x; y) \mid x \in A, y \in B\}$ .

Операцию нахождения декартового произведения множеств  $A$  и  $B$  называют **декартовым умножением** этих множеств.

Рассмотрим следующий пример. Известно, что  $A \times B = \{(2, 3), (2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 5), (3, 6)\}$ . Установим, из каких элементов состоят множества  $A$  и  $B$ . Так как первая компонента пары декартового произведения принадлежит множеству  $A$ , а вторая – множеству  $B$ , то данные множества имеют следующий вид:  $A = \{2, 3\}$ ,  $B = \{3, 5, 6\}$ .

Перечислим элементы, принадлежащие множеству  $A \times B$ , если  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = A$ .

Декартово произведение  $A \times B = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (c, c), (c, d), (d, a), (d, b), (d, c), (d, d)\}$ .

**Количество пар в декартовом произведении  $A \times B$**  будет равно произведению числа элементов множества  $A$  и числа элементов множества  $B$ :  $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$ .

В математике рассматривают не только упорядоченные пары, но и наборы из трех, четырех и т.д. элементов. Такие упорядоченные наборы называют **кортежами**. Так, набор  $(1, 5, 6)$  есть кортеж длины 3, так как в нем три элемента.

**Декартовым произведением множеств  $A_1, A_2, \dots, A_n$**  называют множество кортежей длины  $n$ , образованных так, что первая компонента принадлежит множеству  $A_1$ , вторая –  $A_2$ , ...,  $n$ -ая – множеству  $A_n$ :  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ .

Пусть даны множества  $A_1 = \{2, 3\}$ ;  $A_2 = \{3, 4, 5\}$ ;  $A_3 = \{7, 8\}$ . Декартово произведение  $A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(2, 3, 7), (2, 3, 8), (2, 4, 7), (2, 4, 8), (2, 5, 7), (2, 5, 8), (3, 3, 7), (3, 4, 7), (3, 3, 8), (3, 4, 8), (3, 5, 7), (3, 5, 8)\}$ .

Рассмотрим свойства декартова умножения.

**1. Декартово умножение не обладает переместительным свойством:**  $A \times B \neq B \times A$ . Действительно, элементами множества  $A \times B$  являются пары  $(a; b)$ , а элементами множества  $B \times A$  являются пары  $(b; a)$ . При  $a \neq b$  эти пары различны. Следовательно, если  $A \neq B$ , то множества  $A \times B$  и  $B \times A$  так же различны. В этом нетрудно убедиться на любом примере.

2. Декартово умножение множеств не подчиняется и сочетательному закону:  $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$ .

3. Декартово умножение связано с операцией объединения множеств *распределительным свойством*:  $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ .

Даны множества  $A = \{a, b\}$ ,  $B = \{c, d, e\}$ ,  $C = \{c, m\}$ . Докажем, что множество  $A \times (B \cup C)$  равно множеству  $(A \times B) \cup (A \times C)$ .

Найдем вначале  $B \cup C = \{c, d, e, m\}$ , затем  $A \times (B \cup C) = \{(a, c), (a, d), (a, e), (a, m), (b, c), (b, d), (b, e), (b, m)\}$ .

Теперь найдем  $A \times B = \{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e)\}$  и  $A \times C = \{(a, c), (a, m), (b, c), (b, m)\}$ . И наконец  $(A \times B) \cup (A \times C) = \{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e), (a, m), (b, m)\}$ .

Мы видим, что множества  $A \times (B \cup C)$  и  $(A \times B) \cup (A \times C)$  состоят из одинаковых элементов. Значит  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ .

Наглядное изображение декартового произведения двух множеств (конечных и бесконечных) можно получить при помощи декартовой системы координат на плоскости. **Декартова система координат** – это две взаимно перпендикулярные координатные прямые  $OX$  и  $OY$  с общей единицей длины и заданным направлением, точка пересечения которых является началом отсчета. Прямая  $OX$  – ось абсцисс, прямая  $OY$  – ось ординат. Заметим, что элементы множества  $A$  мы изобразим на оси  $OX$ , а элементы множества  $B$  – на оси  $OY$ .

Изобразим некоторые числовые множества  $X$  и  $Y$  наглядно:

1)  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{3, 5\}$

2)  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = [3; 5]$

Так как множества заданы перечислением, то образованная при этом каждая пара чисел может быть единственным образом изображена на координатной плоскости.

Так как множество  $X$  состоит из трех элементов 1, 2, 3, а множество  $Y$  бесконечно, то их декартово произведение будет состоять из бесконечного множества пер, первая компонента либо 1, либо 2, либо 3, а вторая – любое действительное число из промежутка  $[3; 5]$ , что изобразится тремя отрезками.

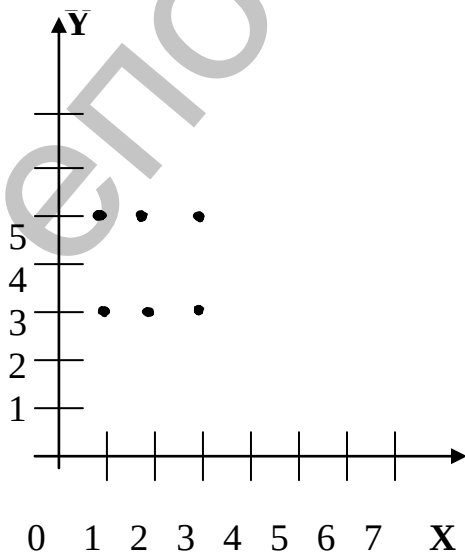


Рис. 15.

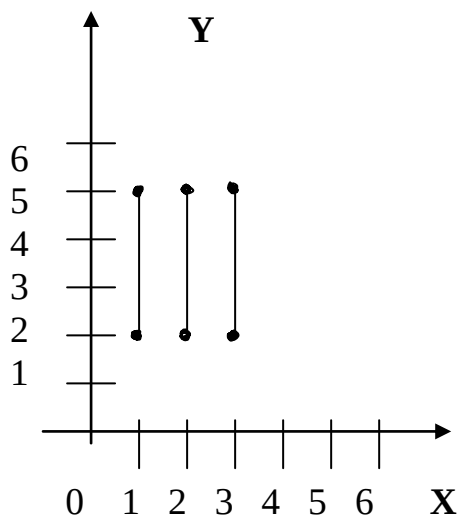


Рис. 16.



3)  $X=[1; 3], Y=[3; 5]$

Оба множества бесконечны. Поэтому первой координатой пары декартового произведения может быть любое число из промежутка  $[1; 3]$ , а второй из промежутка  $[3; 5]$ , следовательно, точки, изображающие элементы декартового произведения данных множеств, образуют квадрат.

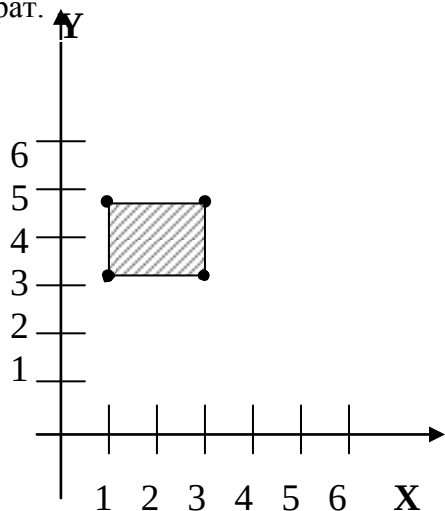


Рис. 17.

4)  $X=R, Y=[3; 5]$

Множество  $X$  состоит из всех действительных чисел, т.е. абсцисса точек декартового произведения данных множеств принимает все действительные значения, в то время как ордината выбирается из промежутка  $[3; 5]$ . Множество таких точек образует полосу.

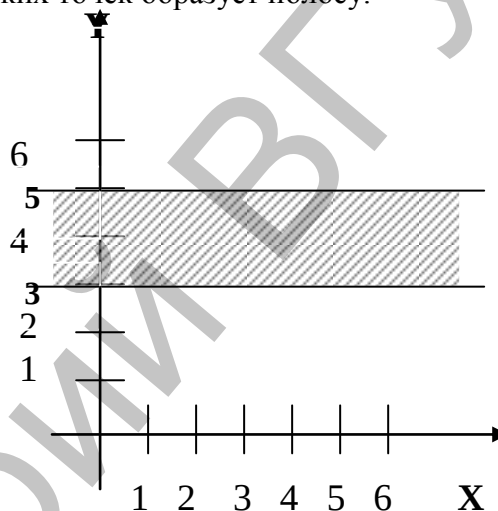


Рис. 18.

## 2. СООТВЕТСТВИЯ МЕЖДУ МНОЖЕСТВАМИ. ОТОБРАЖЕНИЯ. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

**Соответствием между множествами  $X$  и  $Y$**  называется всякое подмножество декартова произведения этих множеств. Соответствия принято обозначать буквами  $P, S, T, R$  и др. Если  $xSy$  – соответствие между элементами множеств  $X$  и  $Y$ , то, согласно определению,  $S \subset X \times Y$ .

Поскольку **соответствие** – это подмножество, то его **можно задать** как любое множество, т.е. либо перечислив все пары элементов, находящихся в данном соответствии, либо указав характеристическое свойство элементов этого подмножества. Например, соответствие между множествами  $X=\{1, 2, 4, 6\}$  и  $Y=\{3, 5\}$  можно задать:

1) при помощи предложения с двумя переменными:  $a < b$  при условии, что  $a \in X, b \in Y$ ;

2) перечислив пары чисел, принадлежащих подмножеству декартова произведения  $X \times Y$ :  $\{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (4, 5)\}$ . К этому способу задания относят также задание соответствия при помощи графа (рис. 19) и графика (рис. 20).

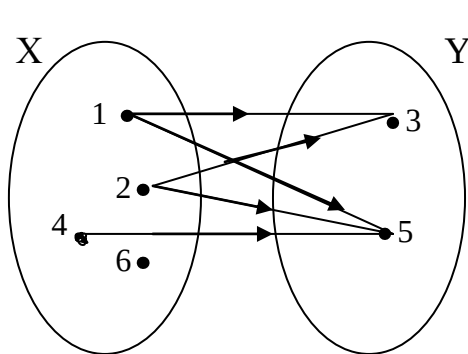


Рис. 19.

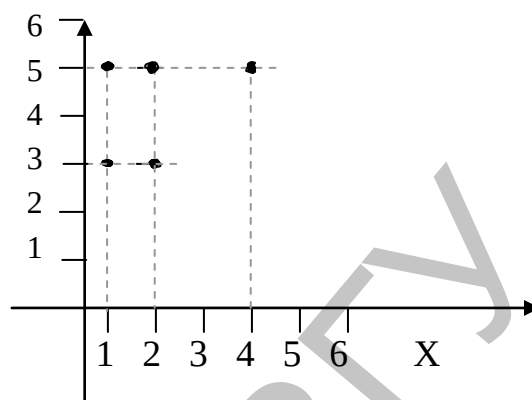


Рис. 20.

**Графом** в математике называется конечная совокупность точек, называемых вершинами графа; некоторые из них соединены друг с другом линиями, которые называются ребрами графа. **График** соответствия представляет собой изображение множества  $X \times Y$  в виде точек на координатной плоскости. Представление соответствия в виде графа и графика позволяет изображать его в тех ситуациях, когда в заданном соответствии находится бесконечное множество пар чисел.

Пусть на множествах  $X = \mathbb{R}$ ,  $Y = \{4, 6\}$  задано соответствие «больше». Так как в заданном соответствии находится бесконечное множество пар, то такое соответствие можно представить лишь наглядно.

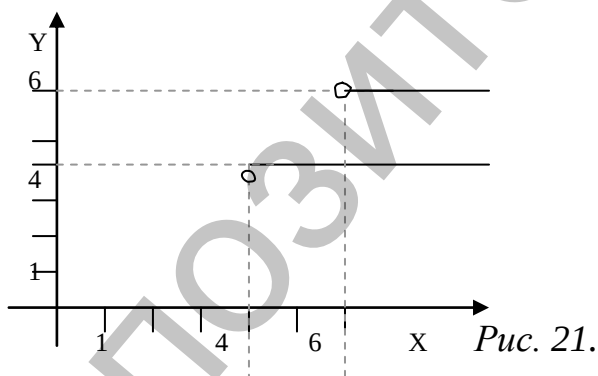


Рис. 21.

На рисунке 22 изображен граф соответствия между множествами  $X$  и  $Y$ :

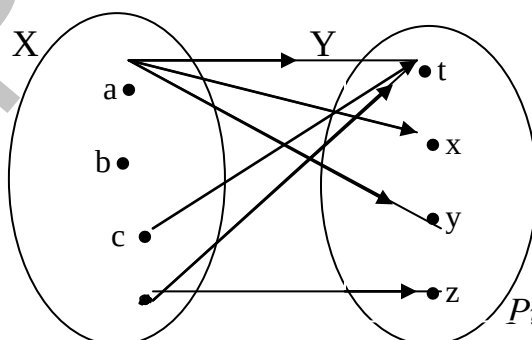


Рис. 22.

Возьмем какую, например,  $a$ , и все стрелки, выходящие из нее. Множество концов стрелок называют *образом элемента  $a$*  при соответствии  $R$ :  $R(a)$ .  

$$R(a) = \{t, x, y\}.$$

Возьмем элемент из множества  $Y$ , например,  $t$ , и все стрелки оканчивающиеся на нем. Множество этих стрелок называют *полным прообразом элемента  $t$* :  $R^{-1}(t)$ .  $R^{-1}(t) = \{a, c, d\}$ .

Может случиться, что из данной точки не выходит ни одна стрелка, например,  $b$ . Тогда образ элемента  $b$  пуст:  $R(b) = \emptyset$ .

Множество  $X$  называют областью отправления соответствия  $R$ , множество  $Y$  – областью прибытия.

Совокупность  $A$  всех элементов из  $X$ , имеющих непустые образы, называют *множеством определения соответствия  $R$* . Множество  $B$  всех элементов из  $Y$ , имеющих непустой полный прообраз, называют *множеством значений соответствия  $R$* .

Если график соответствия  $R$  между множествами  $X$  и  $Y$  совпадает со всем декартовым произведением  $X \times Y$ , то *соответствие* называют полным. Если же график пуст, то  $R$  называют *пустым соответствием*.

Над соответствиями можно выполнять различные операции.

Если между множествами  $X$  и  $Y$  заданы соответствия  $xPy$  и  $xQy$ , то их *пересечением*  $R = P \cap Q$  называют соответствие  $xRy$ , график которого является пересечением графиков данных соответствий.

*Объединением*  $S = P \cup Q$  данных соответствий называют соответствие  $xSy$ , график которого является объединением графиков соответствий  $xPy$  и  $xQy$ .

Если графики соответствий  $xPy$  и  $xQy$  – дополнительные множества в  $X \times Y$  (т.е. не пересекаются, а в объединении дают  $X \times Y$ ), то такие соответствия называют *противоположными*. Например, соответствие «число  $x$  больше числа  $y$ » и соответствие «число  $x$  не превосходит числа  $y$ ».

Соответствия  $P$  и  $Q$  называют *несовместимыми*, если не существует ни одной пары  $(x; y)$ , для которой одновременно выполнялись бы условия  $xPy$  и  $xQy$ . Например, для прямых  $x \perp y$  и  $x \parallel y$  соответствия несовместимы.

Например, рассмотрим  $S$  – соответствие «больше на 2» между множествами  $S = \{4, 5, 8, 10\}$  и  $Y = \{2, 3, 6\}$ . Тогда соответствие  $S = \{(4; 2), (5; 3), (8; 6)\}$  и его граф будет таким, как на рисунке 23.

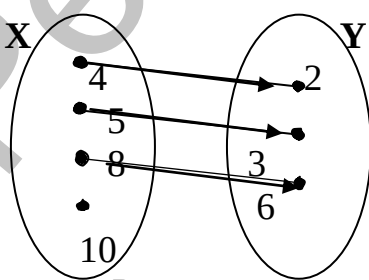


Рис. 23.

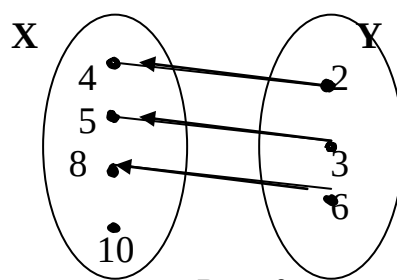


Рис. 24.

Изменим направление стрелок графа на обратное направление, как на рисунке 24. Получим граф нового соответствия «меньше на 2», которое обозначается  $S^{-1}$ . Тогда  $S^{-1} = \{(2; 4), (3; 5), (6; 8)\}$ . Такое соответствие называется обратным данному.

Пусть  $S$  – соответствие между множествами  $X$  и  $Y$ . Соответствие  $S^{-1}$  между множествами  $Y$  и  $X$  называется **обратным** данному, если  $yS^{-1}x$  тогда и только тогда, когда  $xSy$ .

Соответствия  $S$  и  $S^{-1}$  называют **взаимно обратными**. Выясним особенности их графиков соответствий, приведенных в примере выше. Построим в одной координатной плоскости (рис.25) графики соответствий, заданных графами на рисунках 23 и 24.

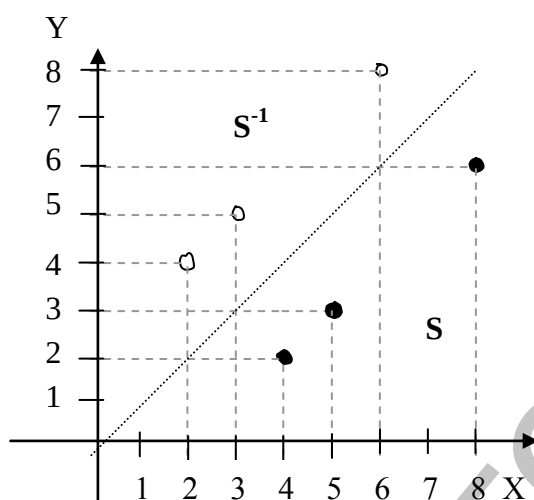
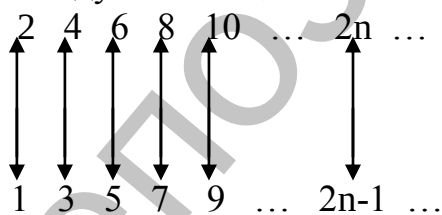


Рис. 25.

Мы видим, что графики взаимно обратных соответствий  $S$  и  $S^{-1}$  симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. Чтобы построить график соответствия  $S^{-1}$  достаточно изобразить на координатной плоскости точки, симметричные точкам графика  $S$  относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов.

Пусть  $A$  – множество всех четных натуральных чисел,  $B$  – множество всех нечетных натуральных чисел. Каждому четному числу поставим в соответствие число, на единицу меньше. Получим взаимно однозначное соответствие между бесконечными множествами  $A$  и  $B$ .



Таким образом, **взаимно однозначным соответствием** между множествами  $X$  и  $Y$  называется такое соответствие, при котором каждому элементу множества  $X$  сопоставляется единственный элемент множества  $Y$  и каждый элемент множества  $Y$  соответствует только одному элементу множества  $X$ .

Установим соответствие между элементами множеств  $A$  и  $B$  с помощью графа, если  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ . Так как каждому элементу из множества  $A$  соответствует единственный элемент из  $B$  и каждое число из множества  $B$  соответствует одному элементу из  $A$ , то соответствие между данными множествами взаимно однозначное

(рис.26). В таком случае множества  $A$  и  $B$  считают равномошными или эквивалентными:  $A \sim B$ .

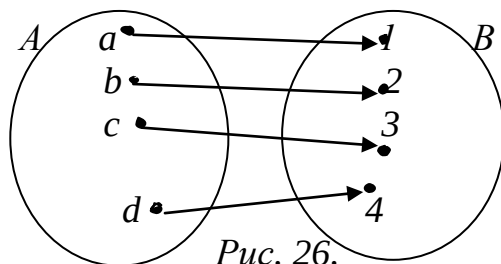


Рис. 26.

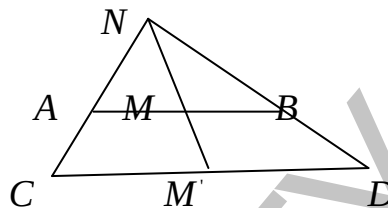


Рис. 27.

Множества  $X$  и  $Y$  называются **равномошными**, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Пусть  $X$  – множество точек отрезка  $AB$ , а  $Y$  – множество точек отрезка  $CD$ , причем длины отрезков различны. Так как между данными множествами можно установить взаимно однозначное соответствие (рис. 27), то множества точек отрезка  $AB$  и  $CD$  равномошны.

Равномошными могут быть как конечные, так и бесконечные множества. Например, множество четных чисел и множество нечетных чисел. Если бесконечное множество равномошно множеству натуральных чисел  $N$ , то его называют счетным. Но среди бесконечных множеств можно найти и такие, которые не будут эквивалентны между собой. Например, множество натуральных чисел и множество всех точек координатной прямой.

*Отношение равномошности обладает рядом свойств:*

- Рефлексивность (каждое множество равномошно самому себе:  $X \sim X$ ).
- Симметричность, т.е.  $X \sim Y$  и  $Y \sim X$ .
- Транзитивность, т.е. если множество  $X$  равномошно множеству  $Y$ , множество  $Y$  равномошно множеству  $Z$ , то множество  $X$  равномошно множеству  $Z$ :  $X \sim Y$  и  $Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$ .

Отношение между элементами множеств  $X$  и  $Y$  называется **отображением  $X$  в  $Y$** , если каждому элементу  $x$  из множества  $X$  соответствует только один элемент множества  $Y$ . Этот элемент называют **образом элемента  $x$**  при данном отображении:  $f(x)$ . На графе такого отображения из каждой точки множества  $X$  будет выходить только одна стрелка (рис. 28).

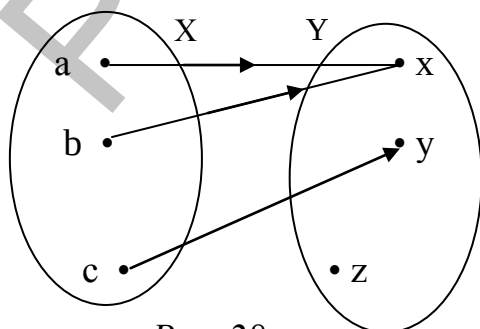


Рис. 28.

Отображения множеств обозначают так:  $f: X \rightarrow Y$  или  $f: X \rightarrow Y$ , где  $f$  – символ отображения. Если при отображении  $f$  элементу  $x$  соответствует элемент  $y$ , то пишут:  $f: x \rightarrow y$ ;  $x \rightarrow y$ ;  $y = f(x)$ .

Рассмотрим следующий пример. Пусть  $X$  – множество студентов в аудитории, а  $Y$  – множество стульев в той же

аудитории. Соответствие «студент  $x$  сидит на стуле  $y$ » задает **отображение  $X$  в  $Y$** . Образом студента  $x$  является стул.

Пусть  $X = Y = N$  – множество натуральных чисел. Соответствие «десятичная запись числа  $x$  состоит из  $y$  цифр» определяет отображение  $N$  в  $N$ . При этом отображении числу 39 соответствует число 2, а числу 45981 – число 5 (39 – двузначное число, 45981 – пятизначное).

Пусть  $X$  – множество четырехугольников,  $Y$  – множество окружностей. Соответствие «четырехугольник  $x$  вписан в окружность  $y$ » не является отображением  $X$  в  $Y$ , так как есть четырехугольники, которые нельзя вписать в окружность. Но в этом случае говорят, что получилось отображение из множества  $X$  в множество  $Y$ .

Если отображение  $X$  в  $Y$  таково, что каждый элемент  $y$  из множества  $Y$  соответствует одному или нескольким элементам  $x$  из множества  $X$ , то такое отображение называют **отображением множества  $X$  на множество  $Y$** .

Множество  $X$  называют областью определения отображения  $f: X \rightarrow Y$ , а множество  $Y$  – областью прибытия этого отображения. Часть области прибытия, состоящая из всех образов  $y$  из множества  $Y$ , называется множеством значений отображения  $f$ .

Если  $y = f(x)$ , то  $x$  называют **прообразом элемента  $y$**  при отображении  $f$ . Множество всех прообразов элемента  $y$  называют его полным прообразом:  $f^{-1}(y)$ .

**Отображения бывают следующих видов:** инъективными, сюръективными и биективными.

Если полный прообраз каждого элемента  $y \in Y$  содержит не более одного элемента (может быть и пустым), то такие отображения называют **инъективными** (рис. 29)

Отображения  $X \rightarrow Y$  такие, что  $f(X) = Y$ , называют отображениями  $X$  на все множество  $Y$  или **сюръективными** (из каждой точки множества  $X$  выходит стрелка, а после изменения направления в каждой точке множества  $X$  заканчивается) (рис. 30).

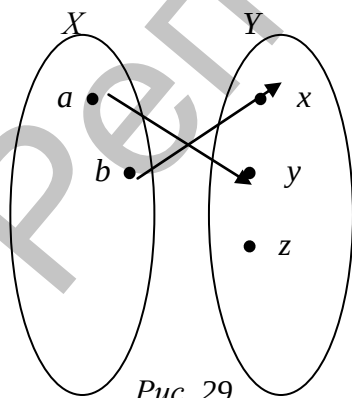


Рис. 29.

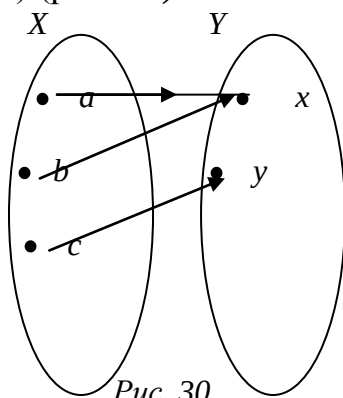


Рис. 30.

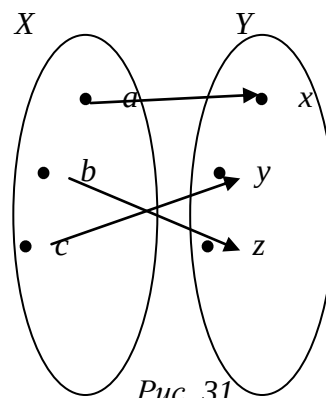


Рис. 31.

Если отображение инъективно и сюръективно, то его называют взаимно однозначным или биективным.

Отображение множества  $X$  на множество называется **биективным**, если каждому элементу  $x \in X$  соответствует единственный элемент  $y \in Y$ , а каждый элемент  $y \in Y$  соответствует только одному элементу  $x \in X$  (рис. 31).

Биективные отображения порождают равномощные (эквивалентные) множества:  $X \sim Y$ .

**Пример.** Пусть  $X$  – множество пальто в гардеробе,  $Y$  – множество крючков там же. Поставим в соответствие каждому пальто крючок, на котором оно висит. Это соответствие является отображением  $X$  в  $Y$ . Оно инъективно, если ни на одном крючке не висит более одного пальто или некоторые крючки свободны. Данное отображение сюръективно, если все крючки заняты или на некоторых висят несколько пальто. Оно будет биективным, если на каждом крючке висит только одно пальто.

**Числовой функцией** называется отображение  $f$  числового множества  $X$  во множество  $R$  действительных чисел. Множество  $X$  называют *областью определения функции  $f$*  (если между множествами  $X$  и  $Y$  установлено соответствие такое, что каждому элементу из множества  $X$  соответствует единственный элемент из множества  $Y$ , то такое соответствие называют функцией).

Если  $f$  – функция, то образ элемента  $x$  на множество  $X$  обозначают  $f(x)$  и называют *значением функции в точке  $x$* , а  $x$  называют *аргументом*.

Если  $f$  – функция с областью определения  $X$ , то пишут  $y = f(x)$ ,  $x \in X$ . Множество чисел вида  $f(x)$  для всех  $x$  из множества  $X$  называют множеством значений функции  $f$ .

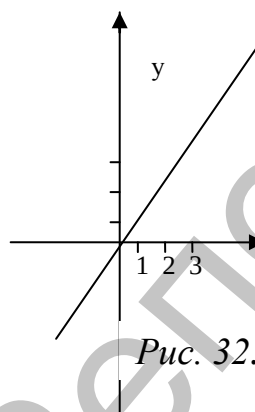
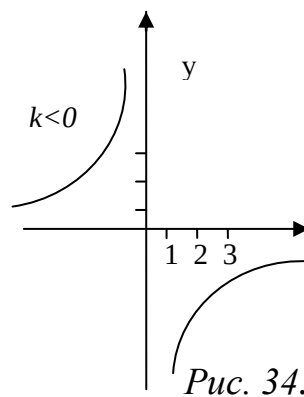
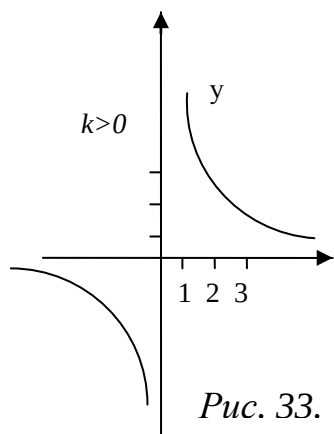


Рис. 32.

Функция, заданная уравнением  $y = kx$  и определенная на множестве всех действительных чисел, называется *прямой пропорциональностью* (рис. 32). Графиком является прямая, проходящая через начало координат. Для прямой пропорциональности характерно следующее свойство:  $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ .

Функция, заданная уравнением  $y = \frac{k}{x}$  и определенная на множестве всех действительных чисел, отличных от нуля, называется *обратной пропорциональностью* (рис. 33, 34). Если  $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$  – пары соответственных значений переменных  $x$  и  $y$  и  $x_2 \neq 0$ , то  $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ . Графиком данной функции является гипербола.



Если функция задана формулой  $y = \frac{6}{x-2}$ , то ее область определения – есть множество действительных чисел, исключая число 2 (если  $x = 2$ , то знаменатель данной дроби обращается в нуль).

Рассмотрим пример. Соответствия между множествами заданы при помощи графов на рис. 35. Определим, какие из них являются функциями.

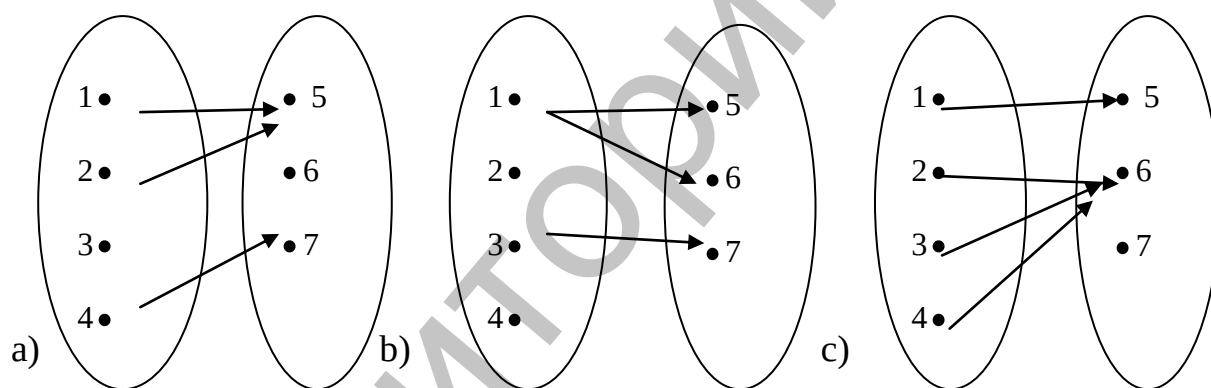


Рис. 35.

а) Каждому значению 1; 2; 4 принадлежащих первому множеству, соответствует единственное число из второго множества. Имеем отображение множества 1;2;4 в множество 5;7, следовательно имеем функцию с областью определения 1;2;4 и множеством значений 5;7.

б) Видим, что числу 1 из первого множества соответствует два различных элемента из второго множества. Следовательно, данное соответствие не является отображением и функцией.

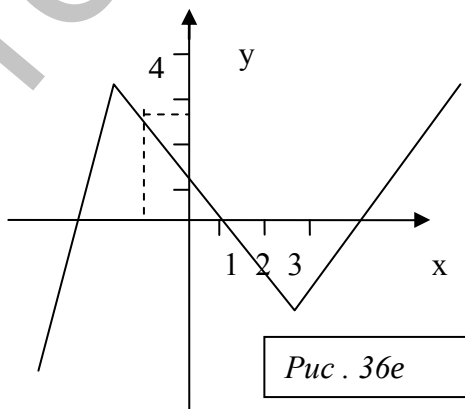
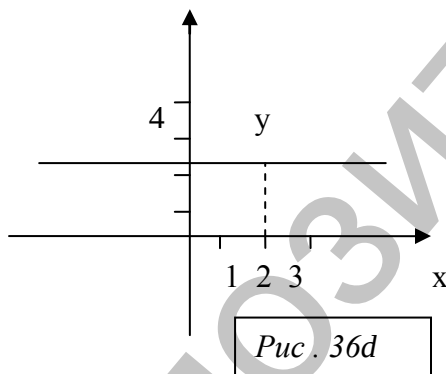
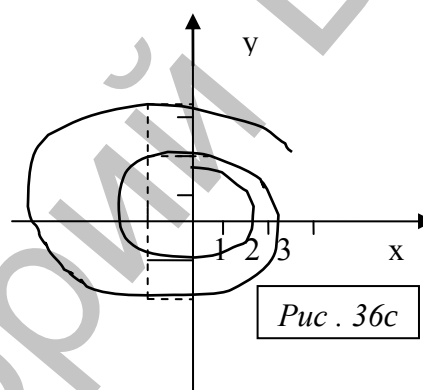
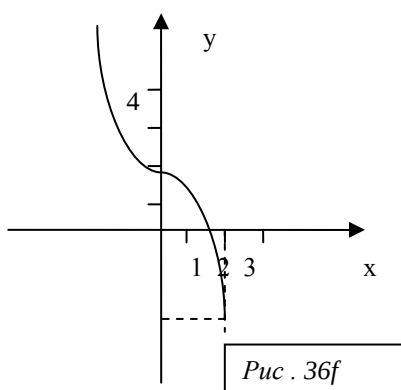
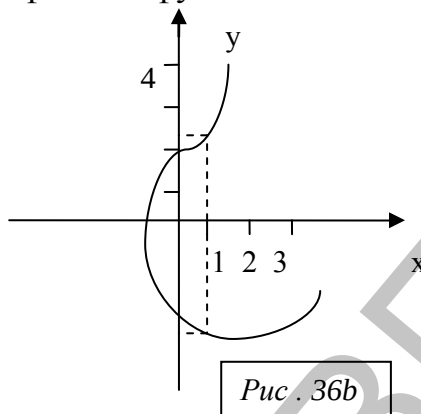
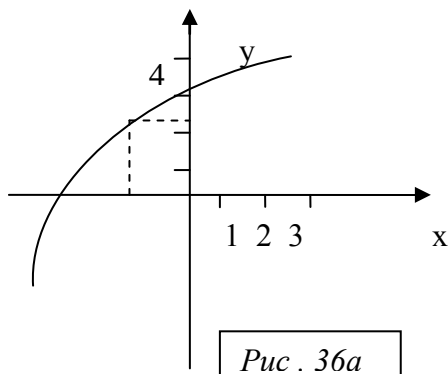
с) Каждому элементу из первого множества соответствует единственный элемент из второго множества. Имеем функцию с областью определения 1;2;3;4; и множеством значений 5;7.

Рассмотрим и такую задачу. Определить, являются ли функциями графиками отношений, заданных кривыми на рис. 36 (а, б, с, d, е).

*Решение:* Графиком функции является кривая, если каждому значению переменной  $x$  соответствует единственному значению пере-



менной  $y$ . Этому условию подчиняются кривые на рис. 37 (а, d, e, f). Остальные кривые не являются графиками функций.



В математике изучают не только связи между элементами двух множеств, т.е. соответствия отображения, но и связи между элементами одного множества. Если рассматривают отношения между двумя элементами, то их называют бинарными, отношения между тремя элементами – тернарными, отношения между  $n$  элементами –  $n$ -арными.

Чтобы определить общее понятие отношения на множестве, рассмотрим пример. Пусть дано множество  $X = \{3, 4, 5, 6, 8\}$ . Между числами этого множества существует отношение «больше»:  $4 > 3$ ,  $5 > 3$ ,  $6 > 3$ ,  $8 > 3$ ,  $5 > 4$ ,  $6 > 4$ ,  $8 > 4$ ,  $6 > 5$ ,  $8 > 5$ ,  $8 > 6$ . Так же существует отноше-

ние « больше на 1»:  $4 > 3$ ,  $5 > 4$ ,  $6 > 5$ . Можно задать и отношение « меньше в два раза», « больше в два раза» и пр.

Рассматривая то или иное отношение, мы оперировали упорядоченными парами, образованными из чисел данного множества  $(4, 3)$ ,  $(5, 3)$ ,  $(6, 3)$  и т.д., которые являются элементами декартова произведения  $X \times X$ .

**Отношением** на множестве  $X$  называется всякое подмножество декартова произведения  $X \times X$ .

Утверждение о том, что элементы  $x$  и  $y$  находятся в отношении  $R$ , можно записывать так:  $(x, y) \in R$  или  $xRy$ . Последняя запись читается: «элемент  $x$  находится в отношении  $R$  с элементом  $y$ ».

**Отношения можно задать** так же, как и соответствия:

1) если множества конечны – перечислив пары элементов данного множества, находящиеся в этом отношении. Формы представления таких пар могут быть различными – они аналогичны формам задания соответствий.

2) при помощи предложения с двумя переменными, т.е. указав характеристическое свойство всех пар данного множества, находящихся в отношении  $R$  (например, «число  $x$  кратно числу  $y$ »).

3) при помощи графа и графика. В отличие от соответствий, граф отношения строится следующим образом: элементы данного множества изображаются точками на плоскости (их называют вершинами графа), а отношение  $R$  – стрелками, идущими от одних точек к другим.

Построим граф отношения «меньше» (рис.37-а) и граф отношения «кратно» (рис. 37-б), заданных на множестве  $X = \{2, 4, 6, 8\}$

Данные отношение можно задать, перечислив пары чисел, находящиеся в данном отношении. Отношение «меньше» ( $x < y$ ):  $R = \{(2, 4), (2, 6), (2, 8), (4, 6), (4, 8), (6, 8)\}$ , а отношение «кратно» ( $x : y$ ):  $R = \{(2, 2), (4, 4), (6, 6), (8, 8), (4, 2), (6, 2), (8, 2), (8, 4)\}$ .

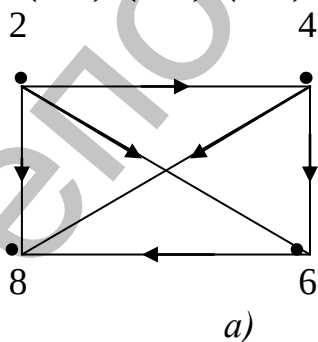
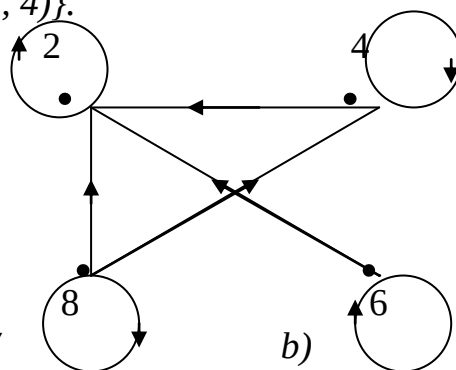


Рис. 37



Для любого отношения  $R$ , заданного на множестве  $X$ , всегда можно задать отношение  $R^{-1}$ , ему **обратное**. Оно определяется так же, как соответствие, обратное данному.

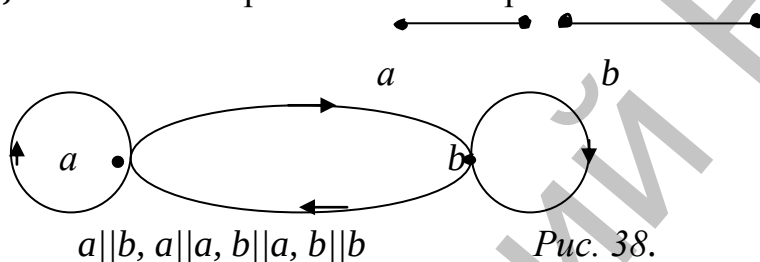
Например, если  $R$  – отношение « $x$  меньше  $y$ », то обратным ему будет отношение « $y$  больше  $x$ » на некотором множестве  $K$ .

### Свойства отношений:

- 1) Рефлексивность;
- 2) Симметричность;
- 3) Транзитивность.
- 4) Связанность.

Отношение  $R$  на множестве  $X$  называется **рефлексивным**, если о каждом элементе множества  $X$  можно сказать, что он находится в отношении  $R$  с самим собой:  $xRx$ . Если отношение рефлексивно, то в каждой вершине графа имеется петля. И наоборот, граф, каждая вершина которого содержит петлю, представляет собой граф рефлексивного отношения (рис. 37-б).

Например, отношение параллельности отрезков:



Примерами рефлексивных отношений являются и отношение «кратно» на множестве натуральных чисел (каждое число кратно самому себе), и отношение подобия треугольников (каждый треугольник подобен самому себе), и отношение «равенства» (каждое число равно самому себе) и др.

Существуют отношения, не обладающие свойством рефлексивности, например, отношение перпендикулярности отрезков:  $a \perp b$ ,  $b \perp a$  (нет ни одного отрезка, о котором можно сказать, что он перпендикулярен самому себе). Поэтому на графе данного отношения нет ни одной петли.



Граф этого отношения выглядит так:

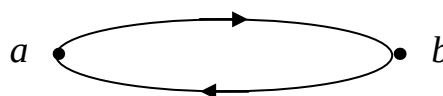


Рис. 39.

Не обладает свойством рефлексивности и отношение «длиннее» для отрезков, «больше на 2» для натуральных чисел и др.

Отношение  $R$  на множестве  $X$  называется **антирефлексивным**, если для любого элемента из множества  $X$  всегда ложно  $xRx$ :  $\overline{xRx}$ .

Существуют отношения, не являющиеся ни рефлексивными, ни антирефлексивными. Примером такого отношения может служить отношение «точка  $x$  симметрична точке  $y$  относительно прямой  $l$ », заданное на множестве точек плоскости. Действительно, все точки прямой  $l$  симметричны сами себе, а точки, не лежащие на прямой  $l$ , себе не симметричны.

Отношение  $R$  на множестве  $X$  называется **симметричным**, если выполняется условие: из того, что элемент  $x$  находится в отношении с элементом  $y$ , следует, что и элемент  $y$  находится в отношении  $R$  с элементом  $x$ :  $xRy \Rightarrow yRx$ .

Граф симметричного отношения обладает следующей особенностью: вместе с каждой стрелкой, идущей от  $x$  к  $y$ , граф содержит стрелку, идущую от  $y$  к  $x$  (рис. 39).

Примерами симметричных отношений могут быть следующие: Отношение «параллельности отрезков», отношение «перпендикулярности отрезков», отношение «равенства отрезков», отношение «подобия треугольников», отношение «равенства дробей» и др.

Существуют отношения, которые не обладают свойством симметричности. Например, отношение «длиннее» для отрезков:



Действительно, если отрезок  $x$  длиннее отрезка  $y$ , то отрезок  $y$  не может быть длиннее отрезка  $x$ . Граф этого отношения обладает особенностью: стрелка, соединяющая вершины, направлена только в одну сторону.



Рис. 40.

Отношение  $R$  называют **антисимметричным**, если для любых элементов  $x$  и  $y$  из истинности  $xRy$  следует ложность  $yRx$ :  $xRy \Rightarrow \neg yRx$ .

Кроме отношения «длиннее» на множестве отрезков существуют и другие антисимметричные отношения. Например, отношение «больше» для чисел (если  $x$  больше  $y$ , то  $y$  не может быть больше  $x$ ), отношение «больше» на « $\gg$ » и др.

Существуют отношения, которые не обладают ни свойством симметричности, ни свойством антисимметричности. Например, в семье трое детей: Коля, Миша, Таня. Тогда граф отношения «быть братом» будет таким:

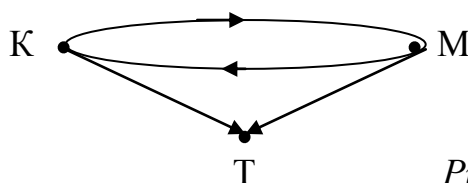


Рис. 41.

Отношение  $R$  на множестве  $X$  называют **транзитивным**, если из того, что элемент  $x$  находится в отношении  $R$  с элементом  $y$ , а элемент  $y$  находится в отношении  $R$  с элементом  $z$ , следует, что элемент  $x$  находится в отношении  $R$  с элементом  $z$ :  $xRy$  и  $yRz \Rightarrow xRz$ .

Граф транзитивного отношения с каждой парой стрелок, идущих от  $x$  к  $y$  и от  $y$  к  $z$ , содержит стрелку, идущую от  $x$  к  $z$ .

Например, Коле 8 лет, Мише 5 лет, Тане 2 года. Граф отношения «быть старше» выглядит так:

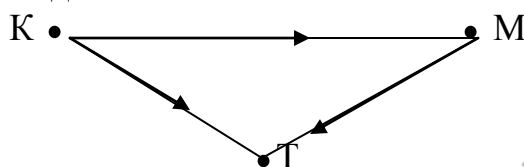


Рис. 42.

Свойством транзитивности обладает и отношение «длиннее» на множестве отрезков: если отрезок  $a$  длиннее отрезка  $b$ , отрезок  $b$  длиннее отрезка  $c$ , то отрезок  $a$  длиннее отрезка  $c$ . Отношение «равенства» на множестве отрезков так же обладает свойством транзитивности:  $(a=b, b=c) \Rightarrow (a=c)$ .

Существуют отношения, которые не обладают свойством транзитивности. Таким отношением является, например, отношение перпендикулярности: если отрезок  $a$  перпендикулярен отрезку  $b$ , а отрезок  $b$  перпендикулярен отрезку  $c$ , то отрезки  $a$  и  $c$  не перпендикулярны!

Существует еще одно свойство отношений, которое называется свойством связности, а отношение, обладающее им, называют связанным.

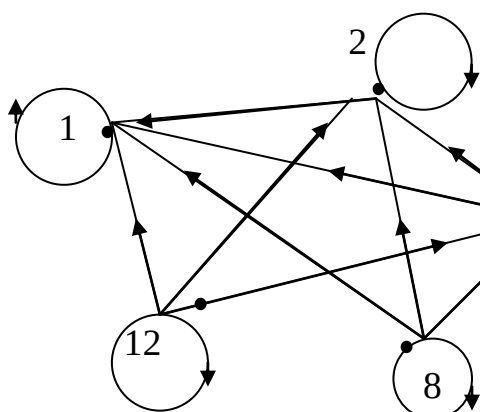
Отношение  $R$  на множестве  $X$  называется **связанным**, если для любых элементов  $x$  и  $y$  из данного множества выполняется условие: если  $x$  и  $y$  различны, то либо  $x$  находится в отношении  $R$  с элементом  $y$ , либо элемент  $y$  находится в отношении  $R$  с элементом  $x$ . С помощью символов это определение можно записать так:  $x \neq y \Rightarrow xRy$  или  $yRx$ .

Например, свойством связности обладает отношение «больше» для натуральных чисел: для любых различных чисел  $x$  и  $y$  можно утверждать, либо  $x > y$ , либо  $y > x$ .

На графе связанного отношения любые две вершины соединены стрелкой. Справедливо и обратное утверждение.

Существуют отношения, которые не обладают свойством связности. Таким отношением, например, является отношение делимости на множестве натуральных чисел: можно назвать такие числа  $x$  и  $y$ , что ни число  $x$  не является делителем числа  $y$ , ни число  $y$  не является делителем числа  $x$  (числа 17 и 11, 3 и 10 и т.д.).

Рассмотрим несколько примеров. На множестве  $X = \{1, 2, 4, 8, 12\}$  задано отношение «число  $x$  кратно числу  $y$ ». Построим граф данного отношения и сформулируем его свойства.



Данное отношение обладает следующими свойствами:

- 1) рефлексивностью, так как в каждой вершине графа есть петля;
- 2) антисимметричностью, две вершины графа соединены только одной стрелкой.

Рис. 43.

Рассмотрим на множестве дробей  $X = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}\}$  отношение «равенства».

Свойства отношения: 1) рефлексивность (каждая дробь равна сама себе); 2) симметричность ( $\frac{m}{n} = \frac{p}{k}$ ); 3) транзитивность (если первая дробь равна второй, вторая дробь равна третьей дроби, то первая дробь равна третьей).

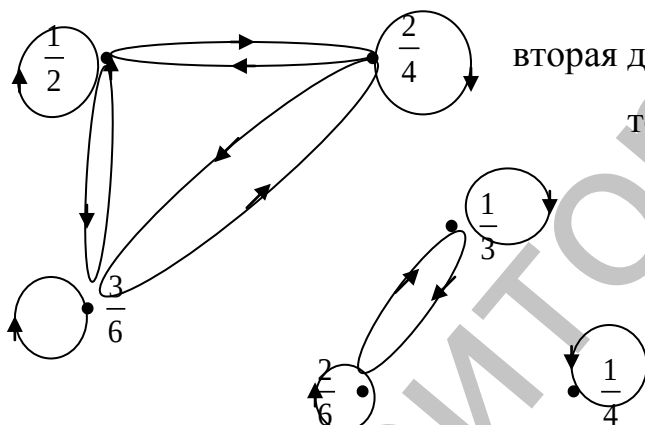


Рис. 44.

Про отношение равенства дробей говорят, оно является отношением эквивалентности.

Отношение  $R$  на множестве  $X$  называется **отношением эквивалентности**, если оно одновременно обладает свойством рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Примерами отношений эквивалентности могут служить: отношения равенства геометрических фигур, отношение параллельности прямых (при условии, что совпадающие прямые считаются параллельными).

В рассмотренном выше отношении «равенства дробей», множество  $X$  разбилось на три подмножества:  $\{\frac{1}{2}; \frac{2}{4}; \frac{3}{6}\}$ ,  $\{\frac{1}{3}; \frac{2}{6}\}$ ,  $\{\frac{1}{4}\}$ . Эти подмножества не пересекаются, а их объединение совпадает с множеством  $X$ , т.е. имеем разбиение множества на классы.

Итак, если на множестве  $X$  задано отношение эквивалентности, то оно порождает разбиение этого множества на попарно непересекающиеся подмножества – классы эквивалентности.

Так, мы установили, что отношению равенства на множестве  $X = \{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{2}{4}; \frac{2}{6}; \frac{3}{6}\}$  соответствует разбиение этого множества на классы эквивалентности, каждый из которых состоит из равных между собой дробей.

Принцип разбиения множества на классы при помощи некоторого отношения эквивалентности является важным принципом математики. Почему?

Во-первых, эквивалентный – это значит равносильный, взаимозаменяемый. Поэтому элементы одного класса эквивалентности взаимозаменяемы. Так, дроби, оказавшиеся в одном классе эквивалентности  $\{\frac{1}{2}; \frac{2}{4}; \frac{3}{6}\}$ , неразличимы с точки зрения отношения равенства, и дробь  $\frac{3}{6}$  может быть заменена другой, например  $\frac{1}{2}$ . И эта замена не изменит результата вычислений.

Во-вторых, поскольку в классе эквивалентности оказываются элементы, неразличимые с точки зрения некоторого отношения, то считают, что класс эквивалентности определяется любым своим представителем, т.е. произвольным элементом класса. Так, любой класс равных дробей можно задать, указав любую дробь, принадлежащую этому классу. Определение класса эквивалентности по одному представителю позволяет вместо всех элементов множества изучать совокупность представителей из классов эквивалентности. Например, отношение эквивалентности «иметь одинаковое число вершин», заданное на множестве многоугольников, порождает разбиение этого множества на классы треугольников, четырехугольников, пятиугольников и т.д. свойства, присущие некоторому классу, рассматриваются на одном его представителе.

В-третьих, разбиение множества на классы с помощью отношения эквивалентности используется для введения новых понятий. Например, понятие «пучок прямых» можно определить как то общее, что имеют параллельные прямые между собой.

Другим важным видом отношений являются отношения порядка. Рассмотрим задачу. На множестве  $X = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  задано отношение «иметь один и тот же остаток при делении на 3». Это отношение порождает разбиение множества  $X$  на классы: в один попадут все числа, при делении которых на 3 получается в остатке 0 (это числа 3, 6, 9). Во второй – числа, при делении которых на 3 в остатке получается 1 (это числа 4, 7, 10). В третий попадут все числа, при делении которых на 3 в остатке получается 2 (это числа 5, 8). Действительно, полученные множества не пересекаются и их объединение совпадает с множеством  $X$ . Следовательно отношение «иметь один и тот же оста-

ток при делении на 3», заданное на множестве  $X$ , является отношением эквивалентности.

Возьмем еще пример: множество учащихся класса можно упорядочить по росту или возрасту. Заметим, что это отношение обладает свойствами антисимметричности и транзитивности. Или всем известен порядок следования букв в алфавите. Его обеспечивает отношение «следует».

Отношение  $R$  на множестве  $X$  называется **отношением строгого порядка**, если оно одновременно обладает свойствами антисимметричности и транзитивности. Например, отношение « $x < y$ ».

Если же отношение обладает свойствами рефлексивности, антисимметричности и транзитивности, то такое оно будет являться **отношением нестрогого порядка**. Например, отношение « $x \geq y$ ».

Примерами отношения порядка могут служить: отношение «меньше» на множестве натуральных чисел, отношение «короче» на множестве отрезков. Если отношение порядка обладает еще и свойством связности, то говорят, что оно является **отношением линейного порядка**. Например, отношение «меньше» на множестве натуральных чисел.

Множество  $X$  называется **упорядоченным**, если на нем задано отношение порядка.

Например, множество  $X = \{2, 8, 12, 32\}$  можно упорядочить при помощи отношения «меньше» (рис. 45), а можно это сделать при помощи отношения «кратно» (рис. 46). Но, являясь отношением порядка, отношения «меньше» и «кратно» упорядочивают множество натуральных чисел по-разному. Отношение «меньше» позволяет сравнивать два любых числа из множества  $X$ , а отношение «кратно» таким свойством не обладает. Так, пара чисел 8 и 12 отношением «кратно» не связана: нельзя сказать, что 8 кратно 12 либо 12 кратно 8.

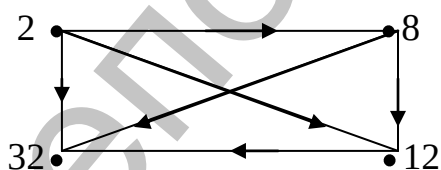


Рис. 45.

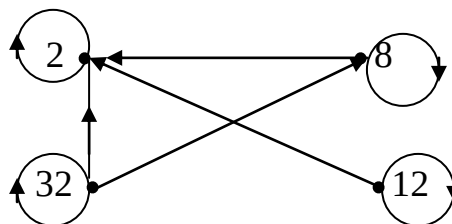


Рис. 46.

Не следует думать, что все отношения делятся на отношения эквивалентности и отношения порядка. Существует огромное число отношений, не являющихся ни отношениями эквивалентности, ни отношениями порядка.



### 3. ЗАДАЧИ

#### Множества и операции над ними.

1. Составить множество всех подмножеств данного множества  $A = \{4, 5, 6, 7\}$ .

2. Установите, в каком отношении находятся множества  $A$  и  $B$ , если  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , а множество  $B$  таково: а)  $B = \{5, 6, 7\}$ , б)  $B = \{1, 2, 8, 9\}$ , в)  $B = \{4, 2, 3, 1\}$ , г)  $B = \{1, 3\}$ . Изобразите на кругах Эйлера. Изобразите данные множества на числовой прямой.

3. Установите, в каком отношении находятся множества  $A$  и  $B$ , если  $A = \{a, в, с, d\}$ , а множество  $B$  таково: а)  $B = \{k, l, m\}$ , б)  $B = \{b, с, e, f, k\}$ , в)  $B = \{d, f, с, b, a\}$ , г)  $B = \{b, d\}$ . Изобразите на кругах Эйлера.

4. Укажите верные утверждения:

1) Множество  $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$  можно задать с помощью характеристического свойства следующим образом:  $B = \{x | x \in N, x \leq 5\}$ ;

2) Если  $A$  – множество чисел, кратных 2, а  $B$  – множество чисел, кратных 4, то  $A \subset B$ ;

3) Множество  $A = \{x | x \in N, x < 2\}$  совпадает с множеством  $B = \{0; 1; 2\}$ ;

4) Если  $A$  – множество остроугольных треугольников,  $B$  – множество равнобедренных треугольников, то  $A \cup B$  – это множество равнобедренных треугольников.

5. Найдём пересечение, объединение и разность множеств  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  и  $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ :  $A \cap B = \{2, 4, 6\}$ .

6. Пусть  $A = \{3, 6, 12, 24\}$ ,  $B = \{6, 24\}$ , найдите  $A \setminus B$ .

7. Даны множества  $A = \{a, b, c, d, e\}$  и  $B = \{a, b, r, t, s, f\}$ . Найти  $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$ . Изобразить с помощью кругов Эйлера.

8. Даны множества  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  и  $B = \{2, 4, 6, 8, 9\}$ . Найти  $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$ . Изобразить с помощью кругов Эйлера

9. Перечислить элементы множеств  $A$  и  $B$ . Найти  $A \cap B, A \cup B, A \setminus B$ . Изобразить на диаграммах Эйлера-Венна и числовой прямой, если  $A = \{x | x \in Z, -4 < x \leq 1\}$ ,  $B = \{x | x \in Z, 1 \leq x < 4\}$ .

10. Перечислить элементы множеств  $A$  и  $B$ . Найти  $A \cap B, A \cup B, A \setminus B$ . Изобразить на диаграммах Эйлера-Венна и числовой прямой, если  $A = \{x | x \in Z, 5 < x < 10\}$ ,  $B = \{x | x \in Z, -1 \leq x < 5\}$ .

11. Изобразить на диаграммах Эйлера-Венна множества  $(X \cap Y)'$ ,  $X \cap Y \cup Z$ . Изобразить на диаграммах Эйлера-Венна множества  $(X \cup Y)'$ ,  $(X' \cap Y) \setminus Z$ .

12. Перечислить свойства операций над множествами.

13. Даны множества  $A = \{x | x \in Z, 1 < x < 8\}$ ,  $B = \{y | y \in Z, 5 < y < 13\}$ . Задайте множества перечислением и найдите пересечение, объединение, разность множеств. Изобразить на диаграммах Эйлера-Венна.

14. Даны множества:  $A=\{a, b, c, d, e\}$ ;  $B=\{c, d, f, k\}$ ;  $C=\{b, c, d, f, m\}$ . Перечислите элементы множеств:  $K=(A \cup B) \cap C$  и  $P=A \cup B \cap C$ . Содержится ли элемент  $m$  в множестве  $K$ , а элемент  $f$  в множестве  $P$ ?

15. Докажите, что для любых множеств  $A$  и  $B$  верно равенство  $(A' \cap B)' = A \cup B'$ .

16. Отметить штриховкой области, изображающие множества а)  $(P \cup Q) \cap S$ , б)  $P \cup Q \cap S$ , в)  $(P \cap Q) \cup S$ , г)  $P \cap S \cup Q$ , е)  $(P \cup Q)' \cup S$ , ж)  $(P' \cup Q) \cup S$ , з)  $P \setminus Q \setminus S$ , и)  $P \setminus S \cup Q$ , если множества попарно пересекаются.

17. Пусть  $A$  – множество натуральных чисел кратных 3,  $B$  – множество натуральных чисел, кратных 7. Зададим множества  $A \cap B$  и  $A \cup B$  и выясним, какие из чисел 42, 15, 70, 26, 0 им принадлежат.

18. Найти пересечение и объединение множеств: а)  $(-\infty; 9]$  и  $[5; +\infty)$ ; б)  $[2; 7]$  и  $[0; 9]$ ; в)  $(-\infty; 7]$  и  $[9; +\infty)$ .

19. Даны множества:  $A$  – тупоугольных треугольников,  $B$  – прямоугольных треугольников,  $C$  – треугольников с углом в  $50^\circ$ . Изобразить область на кругах Эйлера для множества  $A \cup B \cap C$ .

20. Пусть  $A$  – множество натуральных чисел, кратных 3,  $B$  – множество натуральных чисел, кратных 7. Задайте описанием характеристического свойства множества  $A \setminus B$  и назовите три числа, принадлежащих этому множеству.

21. Известно, что  $A \times B = \{(2, 9), (2, 5), (2, 6), (9, 9), (9, 5), (9, 6)\}$ . Установите, из каких элементов состоят множества  $A$  и  $B$ .

22. Перечислить элементы, принадлежащие множеству  $A \times B$ , если  $A=\{a, b, c, d\}$ ,  $B=A$ .

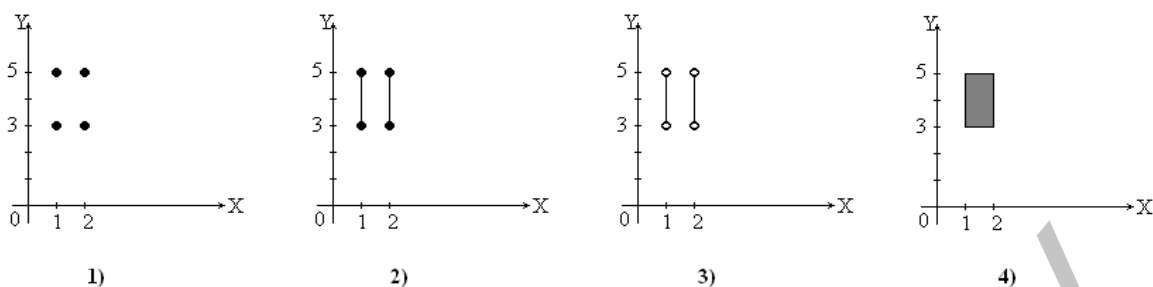
23. Пусть даны множества  $A_1=\{1, 2\}$ ;  $A_2=\{3, 4, 5\}$ ;  $A_3=\{7, 8\}$ . Найти декартово произведение  $A_1 \times A_2 \times A_3$ .

24. Даны множества  $A = \{2, 4, 6\}$  и  $B = \{-3, -2, -1\}$ . Найти  $A \times B$ ,  $B \times A$ .

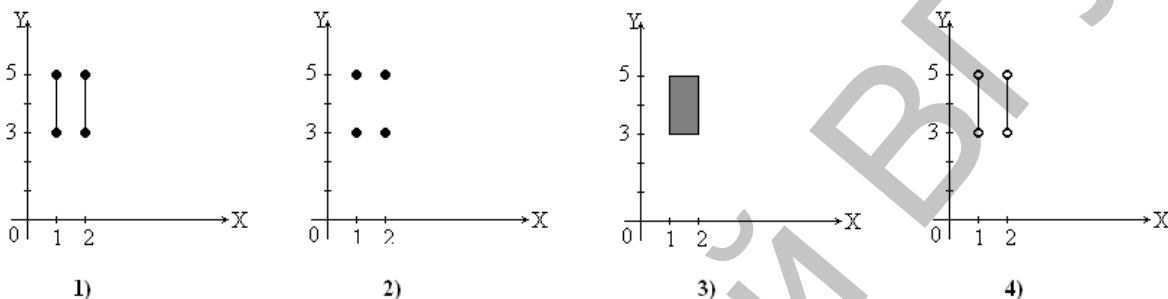
25. Изобразить в прямоугольной системе координат декартово произведение множеств  $A$  и  $B$ , если  $A=[1; 5]$ ,  $B=\{-3, -2, -1\}$ ;  $A=R$ ,  $B=\{1\}$ ;  $A=(-3; 5)$ ,  $B=[0; +\infty)$ .

26. Изобразить декартово произведение числовых множеств  $X$  и  $Y$ :  $X=\{0, 2, 3\}$  и  $Y=\{5, 7\}$ ;  $X=\{0, 2, 3\}$  и  $Y=[5; 7]$ ;  $X=[0; 3]$  и  $Y=[5; 7]$ ;  $X=R$  и  $Y=[5; 7]$ ;  $X=(0; 3)$  и  $Y=\{5; 7\}$ ;  $X=(0; 3)$  и  $Y=(5; 7)$ ;  $X=(0, 3)$  и  $Y=R$ ;  $X=R$  и  $Y=(1; +\infty)$

27. Пусть  $X = \{1; 2\}$ ,  $Y = \{3; 5\}$ . Изображением на координатной плоскости множества точек  $X \times Y$  является:



Пусть  $X = \{1; 2\}$ ,  $Y = [3; 5]$ . Изображением на координатной плоскости множества точек  $X \times Y$  является:



**28.** Даны множества  $A = \{a, b\}$ ,  $B = \{c, d, e\}$ ,  $C = \{c, m\}$ . Докажите, что множество  $A \times (B \cup C)$  равно множеству  $(A \times B) \cup (A \times C)$ .

#### Соответствия между множествами. Отображения. Функции.

**29.** Пусть  $R = \{(1; 2); (1; 3); (2; 3)\}$  – соответствие между множествами  $X = \{1; 2; 3; 4\}$  и  $Y = \{1; 2; 3\}$ . Укажите верные утверждения:

- 1)  $R$  – не функция;
- 2)  $R$  – отображение;
- 3)  $R$  – инъекция;
- 4)  $R$  – сюръекция.

Пусть  $R = \{(1; 2); (2; 3); (3; 4)\}$  – соответствие между множествами  $X = \{1; 2; 3\}$  и  $Y = \{2; 3; 4\}$ . Укажите верные утверждения:

- 1)  $R$  – не функция;
- 2)  $R$  – биекция;
- 3)  $R$  – инъекция, но не сюръекция;
- 4)  $R$  – не отображение.

Пусть  $R = \{(2; 1); (3; 2); (4; 3)\}$  – соответствие между множествами  $X = \{2; 3; 4\}$  и  $Y = \{1; 2; 3; 7\}$ . Укажите верные утверждения:

- 1)  $R$  – не функция;
- 2)  $R$  – сюръекция;
- 3)  $R$  – инъекция;
- 4)  $R$  – биекция.

Пусть  $R = \{(4; 9); (8; 3); (12; 7); (14; 9)\}$  – соответствие между множествами  $X = \{4; 8; 12; 14\}$  и  $Y = \{3; 7; 9\}$ . Укажите верные утверждения:

- 1)  $R$  – сюръекция;
- 2)  $R$  – не функция;

3)  $R$  – инъекция;

4)  $R$  – биекция.

30. Каждому числу из множества  $X = \{3, 4, 5\}$  поставлен его делитель из множества натуральных чисел. Является ли это отношение функцией?

31. Функция задана уравнением  $y = 2x - 4$ . область ее определения – множество  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ . Найдите множество значений этой функции.

32. Соответствие  $P$  – «число  $x$  кратно числу  $y$ » задано между множествами  $X = \{135, 0, 265, 122\}$  и  $Y = \{3, 4, 5, 9\}$ . Постройте граф отношения. Есть ли стрелка, идущая от числа 135 к числу 9? К каким числам из множества  $Y$  идут стрелки от числа 0?

33. Отношение  $P$  – «больше»,  $T$  – «больше на 2»,  $E$  – «больше в 2 раза» заданы на множестве  $A = \{2, 4, 6, 8, 12\}$ . Постройте графы и графики данных отношений.

34. Постройте граф отношения «больше в 2 раза», заданном на множестве  $X$ , если  $X = \{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 4\}$ ; если  $X = [-4, 4]$ .

35. Графики соответствий  $P, T, M$ , заданных на множестве действительных чисел, приведены на рис.



Укажите область определения и множество значений каждого соответствия.

36. Множество  $T = \{(1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0)\}$  представляет собой соответствие между элементами множеств  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  и  $Y = \{0, 1\}$ . Задайте соответствие, обратное соответствию  $T$ , и постройте графики соответствий.

37. Элементы множеств  $X$  и  $Y$  находятся в соответствии  $y = x - 3$ . Постройте график данного соответствия, если: а)  $X = Y = \mathbb{R}$ , б)  $X = [-2, 2]$ ,  $Y = \mathbb{R}$ , в)  $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ,  $Y = \mathbb{Z}$ .

38. Постройте график соответствия  $y > 3x = 2$ , заданного на множестве  $X$ , если а)  $X = \mathbb{R}$ , б)  $X = \mathbb{Z}$ .

39. Между множествами  $X$  и  $Y$  задано соответствие «быть делителем». Установите, является ли оно отображением  $X$  в  $Y$ , если: а)  $X = \{2, 3, 5, 7\}$ ,  $Y = \{15, 28, 37\}$ , б)  $X = \{2, 3, 5, 7\}$ ,  $Y = \{15, 21, 30\}$ , в)  $X = \{2, 3, 5, 7\}$ ,  $Y = \{4, 25, 21\}$ .

**40.** Элементы множеств  $X = \{4, 15, 9, 6\}$  и  $Y = \{2, 3, 19\}$  связаны отношениями «число  $x$  меньше числа  $y$ » и «число  $x$  кратно числу  $y$ ». Какое из них является отображением  $X$  в  $Y$ ?

**41.** Докажите, что множества  $A$  и  $B$  равномощны, если:  
а)  $A$  – множество сторон треугольника,  $B$  – множество его углов,  
б)  $A$  – множество букв в слове «колос»,  $B$  – множество цифр числа 34574?

**42.** Каждому числу из множества  $X = \{3, 4, 5\}$  поставлен его делитель из множества натуральных чисел. Является ли это отношение функцией?

**43.** Функция задана уравнением  $y = 2x - 4$ . Область ее определения – множество  $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ . Найдите множество значений.

**44.** Найдите область определения функции: а)  $y = 5x - 2$ ,  
б)  $y = \frac{7}{x}$ , в)  $y = \frac{3x^2}{(x+1)(x-2)}$ , г)  $y = \sqrt{x-2}$ .

**45.** Постройте график функции  $y = 3x$ , зная, что область определения есть: а) множество действительных чисел, б) промежуток  $[0, 4]$ , в) множество целых чисел, г) множество  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ .

**46.** Постройте график функции  $y = \begin{cases} x, & x < 0 \\ -2x, & x \geq 0 \end{cases}$

**47.** На множестве  $X = \{0, 1, 2, 3\}$  задано отношение  $S = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (0, 1), (1, 2), (0, 2), (1, 0), (2, 1), (2, 0)\}$ . На множестве  $A = \{3, 6, 12, 24, 1\}$  задано отношение «быть делителем». Упорядочивает ли оно множество  $A$ ? Определите свойства отношения  $S$  и постройте его график.

**48.** На множестве отрезков заданы отношения  $P$  – «длиннее», и  $M$  – «иметь одну и ту же длину». Какое из них является отношением эквивалентности?

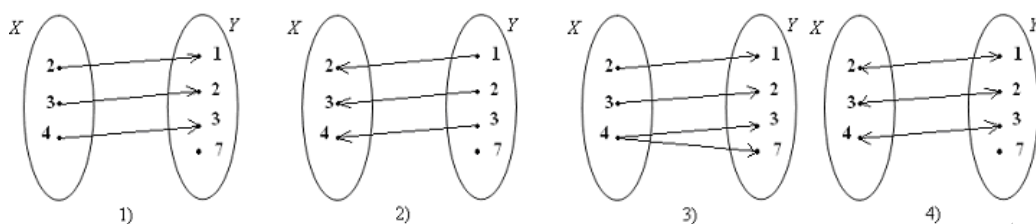
**49.** На множестве  $A = \{3, 6, 12, 24, 1\}$  задано отношение «быть делителем». Упорядочивает ли оно множество  $A$ ?

**50.** На множестве  $A = \{3, 6, 12, 24, 1\}$  задано отношение «быть делителем». Упорядочивает ли оно множество  $A$ ?

**51.** Постройте граф соответствия «больше или равно» между элементами множества  $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ .

**52.** На множестве  $X = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  задано отношение  $R = \{(1, 1), (3, 3), (5, 5), (7, 7), (9, 9), (1, 3), (3, 1), (5, 9), (9, 5)\}$ . Докажите, что  $R$  – отношение эквивалентности.

**53.** Между множествами  $X = \{2, 3, 4\}$  и  $Y = \{1, 2, 3, 7\}$  установлено соответствие  $R$ : « $x = y + 1$ ». Укажите граф этого соответствия.



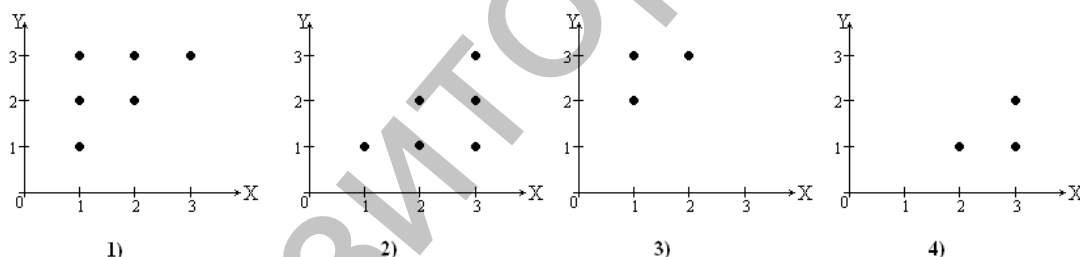
54. Пусть  $R$  – соответствие "х больше у" между множествами  $X = \{1; 3; 4\}$  и  $Y = \{2; 3\}$ , причем  $x \in X, y \in Y$ . Укажите верные утверждения:

- 1)  $(x; y) \in X \times Y$ ;
- 2)  $R \in X \times Y$ ;
- 3)  $R \neq \{(3; 2); (4; 2); (4; 3)\}$ ;
- 4)  $\{(3; 2); (4; 2); (4; 3)\} \cap X \times Y = \emptyset$ .

55. На множестве  $M = \{0; 1; 2; 3\}$  задано бинарное отношение  $R$ : «быть больше на 1». Укажите верные утверждения:

- 1) Данное бинарное отношение рефлексивно;
- 2) Данное бинарное отношение не рефлексивно;
- 3) Данное бинарное отношение симметрично;
- 4) Данное бинарное отношение транзитивно.

56. На множестве  $M = \{1; 2; 3\}$  задано бинарное отношение  $R$ : «быть меньше». Укажите график этого отношения.



57. Постройте график функции  $y = 2x - 3$  с областью определения  $D = [-3; 2]$ . 5) Известно, что график функции  $y = 2x + b$  проходит через точку  $(1; 4)$ . Пройдет ли он через точку  $(3; 8)$ ? Постройте этот график.

58. Лена купила  $x$  карандашей, а Катя в 2 раза больше. Обозначьте число карандашей, купленных Катей, через  $y$  и выразите  $y$  через  $x$ . Постройте график установленного соответствия при условии, что  $x \leq 5$ . Является это соответствие функцией? Какова ее область определения и область значений?

59. Из квадрата со стороной  $10$  см вырезали прямоугольник со сторонами  $8$  см и  $x$  см. Обозначив площадь оставшейся части через  $y$ , выразите зависимость  $y$  от  $x$  формулой. Найдите значение зависимой переменной, если значение аргумента равно  $2,5$ ;  $4$ ;  $10$ . Найдите значение независимой переменной, если значение функции равно  $20$ ;  $36$ ;  $88$ .

**60.** Постройте график функции  $y = x^2 + 2x + c$ , если известно, что точка  $A(3; 7)$  принадлежит этому графику.

**61.** Установите вид зависимости, в которой находятся переменные  $x$  и  $y$ , если: а)  $x$  – длина стороны квадрата,  $y$  – его периметр, б)  $x$  – длина стороны квадрата,  $y$  – его площадь, в) число страниц, перепечатанных машинисткой за 1 ч,  $y$  – число часов, за которое она перепечатает рукопись.

**62.** Постройте график соответствия, заданного на множестве действительных чисел уравнением а)  $y = 4 - x^2$ , б)  $1 = x^2 + y^2$  в)  $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 4$ .

**63.** Постройте график соответствия, заданного на множестве действительных чисел неравенством: а)  $3x - 5y \leq 4$ , б)  $(x-4)^2 + (y-1)^2 > 36$ .

**64.** Отношения  $P$  и  $T$  заданы на множестве действительных чисел. Постройте график отношений  $P \cap T$  и  $P \cup T$ , если  $P = \{(x, y) | 3x + 5y > 7\}$ ,  $T = \{(x, y) | 4x + 5y < 9\}$ .

**65.** На множестве отрезков заданы соответствия «длиннее», «длиннее в 2 раза», «длиннее на 2 см». Как задать соответствие, обратное данным?

Учебное издание

## **ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ**

Методические рекомендации

В 2 частях

### **ЧАСТЬ 1**

Составители:

**ВИНОГРАДОВА Алла Викторовна**

**УСТИМЕНКО Владимир Викторович**

Технический редактор

*Г.В. Разбоева*

Компьютерный дизайн

*И.В. Волкова*

Подписано в печать 19.11.2013. Формат 60x84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 2,33. Уч.-изд. л. 1,92. Тираж 60 экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования  
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

ЛИ № 02330/110 от 30.01.2013.

Отпечатано на ризографе учреждения образования

«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.