Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра геометрии и математического анализа

Ж.В. Иванова, Т.Л. Сурин, С.В. Шерегов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: Поверхностные интегралы. Элементы теории поля

Курс лекций

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2013

Репозиторий ВГУ

УДК 517 (075.8)
ББК 22.161.1я73
М 90

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 1 от 24.10.2013 г.

Авторы: доценты кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидаты физико-математических наук **Ж.В. Иванова, Т.Л. Сурин;** старший преподаватель кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова **С.В. Шерегов**

Р е ц е н з е н т:
доцент кафедры геометрии и математического анализа
ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук
С.А. Шлапаков

	Иванова, Ж.В.
?	Математический анализ: Поверхностные интегралы. Элементы теории поля : курс лекций / Ж.В. Иванова, Т.Л. Сурин, С.В. Шерегов. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2013. – 51 с.
	Данное издание предназначено для студентов 2 курса специальности «Прикладная математика» и студентов IV курса специальности «Математика. Информатика». В нем излагается теоретический материал и рассматриваются наиболее типичные задачи по излагаемым разделам математического анализа.

УДК
ББК

© Иванова Ж.В., Сурин Т.Л., Шерегов С.В., 2013
© ВГУ имени П.М. Машерова, 2013

Репозиторий ВГУ

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Введение……. 4

I. Векторная функция…….

1.1 Понятие векторной функции одной переменной……

1.2. Понятие векторной функции двух переменных……

II. Понятие поверхности в пространстве……

2.1. Понятие поверхности……

2.2. Способы задания поверхностей в пространстве……..

2.3. Регулярные поверхности……

2.4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности……

2.5. Односторонние и двусторонние поверхности……

2.6. Первая квадратичная форма поверхности……

2.7. Площадь поверхности……..

III. Поверхностные интегралы первого и второго рода……

3.1. Поверхностные интегралы первого рода……

3.2. Поверхностные интегралы второго рода……

3.3. Поверхностный интеграл второго рода в векторной форме….

3.4. Формула Стокса……

3.5. Применение формулы Стокса к исследованию криволинейных интегралов в пространстве……

3.6. Формула Остроградского-Гаусса……

IV. Скалярные и векторные поля……

4.1. Понятие скалярного поля. Поверхность уровня скалярного поля……

4.2. Производная по направлению и градиент скалярного поля…

4.3. Векторные поля. Векторные линии……

4.4. Поток векторного поля……..

4.5. Дивергенция векторного поля……..

4.6. Соленоидальные поля……

4.7. Циркуляция и ротор векторного поля……

4.8. Потенциальные векторные поля……..

Литература……

Репозиторий ВГУ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное издание является продолжением опубликованных ранее учебных изданий «Математический анализ. Введение в анализ. Производная», «Математический анализ. Применение дифференциального исчисления. Интегральное исчисление функции одной переменной», «Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных» и предназначено для студентов очного и заочного отделений математического факультета. В этой части содержится теоретический материал, который обычно изучается в курсе математического анализа на втором курсе очного отделения специальности «Прикладная математика», а также в курсе «Дополнительные главы математического анализа», изучаемого студентами заочного и очного отделений, обучающихся по специальности «Математика. Информатика». Методическое пособие включает в себя следующие разделы: «Векторная функция», «Понятие поверхности в пространстве», «Поверхностные интегралы первого и второго рода», «Скалярные и векторные поля». Курс лекций написан в соответствии с учебной программой по математическому анализу для специальности 1-31 03 07 «Прикладная математика» и учебной программой по курсу «Дополнительные главы математического анализа» для специальности 1-02 05 03-02 «Математика. Информатика». Материал излагается в простой, доступной для самостоятельного изучения форме. Приводится большое количество примеров, которые способствуют более основательному, осмысленному изучению теоретического материала.

В конце данного издания приведен список основной и дополнительной литературы, необходимой для изучения вышеназванных разделов математического анализа.

Репозиторий ВГУ

I. ВЕКТОРНАЯ ФУНКЦИЯ

1.1. Понятие векторной функции одной переменной

Введем понятие векторной функции одной переменной.

Определение* 1.1** *Если каждой точке t из интервала $T \in R^1$ ставится в соответствие некоторый вектор $\vec{r}\,(x(t), y(t))$ на плоскости (или вектор $\vec{r}\,(x(t), y(t), z(t))$ в пространстве), то говорят, что на интервале T задана* ***векторная функция $\vec{r}\,$**(t)**.

При этом интервал T называют ***областью определения*** функции $\vec{r}\,(t)$. Вектор $\vec{r}\,(t_0)$, соответствующий конкретной точке $t_0 \in T$, будем называть ***значением*** векторной функции $\vec{r}\,(t)$ в точке t_0. Совокупность значений функции $\vec{r}\,(t)$ во всех точках интервала T будем называть ***множеством значений*** функции $\vec{r}\,(t)$.

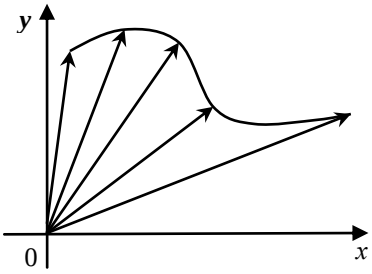

Рис. 1.

Рассмотрим векторную функцию $\vec{r}\,(t)$. Пусть начала всех векторов $\vec{r}\,(t)$, $t \in T$ выходят из точки $O\,(0, 0)$. Тогда геометрическое место точек, которое опишут концы этих векторов, называется ***годографом*** векторной функции $\vec{r}\,(t)$. Годограф векторной функции $\vec{r}\,(t) = \vec{r}\,(x(t), y(t))$ представляет некоторую линию на плоскости (рис. 1). Годограф векторной функции $\vec{r}\,(t) = \vec{r}\,(x(t), y(t), z(t))$ – линия в пространстве.

Определение* 1.2.** *Вектор $\vec{b}$ называется* ***пределом векторной функции $\vec{r}\,(t)$ *в точке a, если для любого действительного числа $\varepsilon > 0$ существует такое действительного числа $\delta > 0$, что для всех t, удовлетворяющих неравенству $0 < |t - a| < \delta$, выполняется неравенство*

$$|\vec{r}\,(t) - \vec{b}\,| < \varepsilon. \qquad (1.1)$$

Обозначение: $\lim\limits_{t \to a} \vec{r}(t) = \vec{b}$.

***Теорема* 1.1.** *Для того, чтобы векторная функция $\vec{r}\,(t) = \vec{r}\,(x(t), y(t), z(t))$ имела предел $\vec{b}\,(b_1, b_2, b_3)$ в точке a, необходимо и достаточно, чтобы существовали следующие пределы*:

$$\lim_{t \to a} x(t) = b_1, \quad \lim_{t \to a} y(t) = b_2, \quad \lim_{t \to a} z(t) = b_3. \qquad (1.2)$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть $\lim\limits_{t \to a} \vec{r}(t) = \vec{b}$, тогда, по определению 1.2, для любого действительного числа $\varepsilon > 0$ существует такое действительное число $\delta > 0$, что для всех t, удовлетворяющих неравенству $0 < |t - a| < \delta$, выполняется неравенство (1.1).

Репозиторий ВГУ

Координатами вектора $\vec{r}\,(t) - \vec{b}$ будут скалярные функции: $x(t) - b_1$, $y(t) - b_2$, $z(t) - b_3$. Из (1.1) следует, что модуль вектора $\vec{r}\,(t) - \vec{b}$ удовлетворяет неравенству:

$$|\vec{r}\,(t) - \vec{b}\,| = \sqrt{(x(t) - b_1)^2 + (y(t) - b_2)^2 + (z(t) - b_3)^2} < \varepsilon.$$

Так как

$$|x(t) - b_1| < \sqrt{(x(t) - b_1)^2 + (y(t) - b_2)^2 + (z(t) - b_3)^2} < \varepsilon,$$

то, число b_1 является пределом функции $x(t)$ в точке a.

Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{t \to a} y(t) = b_2$, $\lim\limits_{t \to a} z(t) = b_3$.

Достаточность. Пусть существуют пределы (1.2). Значит, для любого действительного числа $\varepsilon > 0$ существует такое действительное число $\delta > 0$, что для всех t, удовлетворяющих неравенству $0 < |t - a| < \delta$, выполняются неравенства:

$$|x(t) - b_1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}, \quad |y(t) - b_2| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}, \quad |z(t) - b_3| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}.$$

Тогда,

$$|\vec{r}\,(t) - \vec{b}\,| = \sqrt{(x(t) - b_1)^2 + (y(t) - b_2)^2 + (z(t) - b_3)^2} <$$

$$< \sqrt{\left(\varepsilon/\sqrt{3}\right)^2 + \left(\varepsilon/\sqrt{3}\right)^2 + \left(\varepsilon/\sqrt{3}\right)^2} = \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{t \to a} \vec{r}(t) = \vec{b}$.■

Из теоремы 1.1 следует, что существование в точке a предела векторной функции $\vec{r}\,(t)$ равносильно существованию в этой точке пределов скалярных функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Определение* 1.3.** *Векторная функция* $\vec{r}\,(t)$ *называется* ***непрерывной в точке $\mathbf{t_0}$, *если выполняется равенство* $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

Из теоремы 1.1 и определения непрерывности векторной функции следует, что для того, чтобы векторная функция $\vec{r}\,(t) = \vec{r}\,(x(t), y(t), z(t))$ была непрерывна в точке t_0, необходимо и достаточно, чтобы скалярные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ были непрерывны в точке t_0.

Определение* 1.4.** *Векторная функция* $\vec{r}\,(t)$ *называется* ***непрерывной на интервале T*, если она непрерывна в каждой точке данного интервала.*

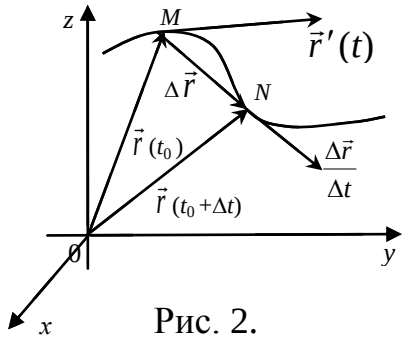

Рис. 2.

Рассмотрим векторную функцию $\vec{r}\,(t)$, определенную в некоторой окрестности точки t_0. Придадим точке

Репозиторий ВГУ

t_0 приращение Δt так, чтобы точка $t_0 + \Delta t$ принадлежала рассматриваемой окрестности. Рассмотрим вектор $\Delta \vec{r}\,(t_0) = \vec{r}\,(t_0 + \Delta t) - \vec{r}\,(t_0)$ (на рисунке 2 это вектор $\overrightarrow{MN}$). Вектор $\Delta \vec{r}\,(t_0)$ называется приращением векторной функции $\vec{r}\,(t)$ в точке t_0.

Определение* 1.5. *Производной векторной функции *в точке* t_0 *называется предел отношения приращения функции в точке* t_0 *к приращению аргумента* Δt, *если* Δt *стремится к нулю*:

$$\vec{r}\,'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t_0)}{\Delta t}. \qquad (1.3)$$

Так как координаты вектора $\dfrac{\Delta \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$ соответственно равны

$$\frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \quad \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \quad \frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t)}{\Delta t},$$

то из теоремы 1.1 и определения производной векторной функции следует, что функция $\vec{r}\,(t)$ имеет производную в точке t_0 тогда и только тогда, когда в точке t_0 существуют производные скалярных функций $x(t), y(t), z(t)$. Таким образом, вектор $\vec{r}\,'(t_0)$ имеет координаты $(x'(t_0),\ y'(t_0),\ z'(t_0))$.

Геометрический смысл производной векторной функции. Производная векторной функции представляет собой вектор, направленный по касательный, проведенной к годографу функции $\vec{r}\,(t)$ в точке t_0.

Если в качестве параметра для векторной функции выбрать длину дуги s, отсчитываемой от некоторой точки M, то производная векторной функции будет равна единичному вектору, направленному по касательной к годографу этой функции.

Физический смысл производной векторной функции. Пусть $\vec{r}\,(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$ – уравнение движения материальной точки в пространстве, тогда кривая, являющаяся годографом этой функции, представляет собой траекторию движения материальной точки, а вектор $\vec{r}\,'(t) = x'(t)\bar{i} + y'(t)\bar{j} + z'(t)\bar{k}$ равен мгновенной скорости материальной точки в момент времени t.

Замечание. Все сказанное выше о векторной функции $\vec{r}\,(t) = \vec{r}\,(x(t), y(t), z(t))$ справедливо и для функции $\vec{r}\,(t) = \vec{r}\,(x(t), y(t))$.

1.2. Понятие векторной функции двух переменных

Аналогично понятию векторной функции одной переменной, введем понятие векторной функции двух переменных.

***Определение* 1.6.** *Если каждой точке* $M(u, v)$ *из множества* $\{M\}$ *двухмерного евклидова пространства* R^2 *ставится в соответствие некоторый вектор* $\vec{r}\,(u, v) = \vec{r}\,(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ *про-*

Репозиторий ВГУ

странства R^3, *то говорят, что на множестве* $\{M\}$ *задана* ***векторная функция*** $\vec{r}$ **(*u*, *v*).**

Множество $\{M\}$ называют ***областью определения*** функции $\vec{r}\,(u, v)$.

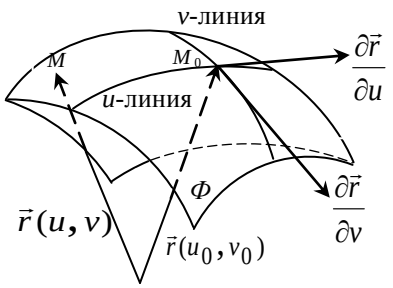

Рис. 3.

Годографом векторной функции $\vec{r}\,(u, v)$ называется геометрическое место точек, являющихся концами векторов $\vec{r}\,(u, v)$, при условии, что вектора выходят из начала координат. Годограф векторной функции $\vec{r}\,(u, v) = \vec{r}\,(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ представляет, вообще говоря, некоторую поверхность Φ в пространстве (рис. 3).

Рассмотрим векторную функцию $\vec{r}\,(u, v)$ и зафиксируем переменную $u = u_0$, тогда функцию

$$\vec{r}\,(u_0, v) = \vec{r}\,(x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v))$$

можно рассматривать, как функцию от одной переменной v, годографом которой является некоторая линия на поверхности Φ. Данная линия называется ***v*- линией**. Аналогично вводится понятие ***u*-линии**.

Определение* 1.7.** *Вектор* $\vec{b}$ *называется* ***пределом векторной функции $\vec{r}\,(u, v)$ *в точке* $A\,(a_1, a_2)$, *если для любого действительного числа* $\varepsilon > 0$ *существует такое действительного числа* $\delta > 0$, *что для всех точек* $M\,(u, v)$, *удовлетворяющих неравенству* $0 < \rho(M, A) < \delta$, *выполняется неравенство*:

$$|\vec{r}\,(u, v) - \vec{b}\,| < \varepsilon. \qquad (1.4)$$

Обозначение: $\lim\limits_{M \to A} \vec{r}(u, v) = \vec{b}$ или $\lim\limits_{M \to A} \vec{r}(M) = \vec{b}$

Здесь, $\rho(M, A) = \sqrt{(u - a_1)^2 + (v - a_2)^2}$ – расстояние между точками $M\,(u, v)$ и $A\,(a_1, a_2)$.

***Теорема* 1.2.** *Для того, чтобы векторная функция* $\vec{r}\,(u, v) = \vec{r}\,(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ *имела предел* $\vec{b}\,(b_1, b_2, b_3)$ *в точке* $A\,(a_1, a_2)$, *необходимо и достаточно, чтобы существовали следующие пределы*:

$$\lim_{M \to A} x(u, v) = b_1, \quad \lim_{M \to A} y(u, v) = b_2, \quad \lim_{M \to A} z(u, v) = b_3,$$

или пределы

$$\lim_{\substack{u \to a_1 \\ v \to a_2}} x(u, v) = b_1, \quad \lim_{\substack{u \to a_1 \\ v \to a_2}} y(u, v) = b_2, \quad \lim_{\substack{u \to a_1 \\ v \to a_2}} z(u, v) = b_3.$$

Определение* 1.8.** *Векторная функция* $\vec{r}\,(u, v)$ *называется* ***непрерывной в точке $\boldsymbol{M_0}$ (u_0, v_0) *если выполняется равенство*

Репозиторий ВГУ

$$\lim_{M \to M_0} \vec{r}(M) = \vec{r}(M_0).$$

Очевидно, что для того, чтобы векторная функция $\vec{r}\,(u, v)$ была непрерывна в точке M_0, необходимо и достаточно, чтобы скалярные функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, являющиеся координатами данной векторной функции, были непрерывны в точке M_0.

Рассмотрим векторную функцию $\vec{r}\,(u, v)$, определенную в некоторой окрестности точки M_0 $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0)) = M_0$ (u_0, v_0). Придадим переменной u_0 приращение Δu так, чтобы точка $M\,(u_0 + \Delta u,\ v_0)$ принадлежала рассматриваемой окрестности. Рассмотрим вектор $\Delta\vec{r}_u\,(u_0, v_0) = \vec{r}\,(u_0 + \Delta u,\ v_0) - \vec{r}\,(u_0, v_0)$. Этот вектор называется частным приращением векторной функции $\vec{r}\,(u, v)$ в точке M_0 по переменной u. Аналогично определяется частное приращение векторной функции в точке M_0 по переменной v.

Определение* 1.9. *Частной производной векторной функции *по переменной* u *называется предел отношения частного приращения* $\Delta\vec{r}_u\,(u_0, v_0)$ *к приращению* Δu *аргумента* u, *если* Δu *стремится к нулю*:

$$\vec{r}_u\,(u_0, v_0) = \frac{\partial\vec{r}(u_0, v_0)}{\partial u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta\vec{r}_u(u_0, v_0)}{\Delta u}. \qquad (1.5)$$

Аналогично определяется частная производная векторной функции по переменной v:

$$\vec{r}_v\,(u_0, v_0) = \frac{\partial\vec{r}(u_0, v_0)}{\partial v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta\vec{r}_u(u_0, v_0)}{\Delta v}. \qquad (1.6)$$

***Замечание* 1.** При нахождении частной производной векторной функции по переменной u мы фиксируем переменную $v = v_0$, тогда функцию $\vec{r}\,(u, v)$ можно рассматривать как функцию от одной переменной u: $\vec{r}\,(u) = \vec{r}\,(u, v_0)$. Годографом этой функции является u-линия на поверхности Φ, проходящая через точку M_0. Таким образом, частная производная $\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u}$ представляет собой вектор, касательный к u-линии. Соответственно, частная производная $\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial v}$ представляет собой вектор, касательный к v-линии (рис. 3).

***Замечание* 2.** Вектор $\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u}$ имеет координаты $x_u(u,v), y_u(u,v)$, $z_u(u,v)$. Вектор $\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial v}$ имеет координаты $x_v(u,v), y_v(u,v)$, $z_v(u,v)$.

Репозиторий ВГУ

Определение* 1.10. *Полным приращением *векторной функции* $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ *в точке* $M(u_0, v_0)$ *называется следующая разность*: $\Delta\vec{r} = \vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - \vec{r}(u_0, v_0)$.

Определение* 1.11.** *Векторная функция* $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ *называется* ***дифференцируемой *в точке* $M(u_0, v_0)$, *если ее приращение может быть представлено в виде* $\Delta\vec{r} = \vec{a} \cdot \Delta u + \vec{b} \cdot \Delta v + \vec{\alpha} \cdot \Delta u + \vec{\beta} \cdot \Delta v$, *где* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *некоторые не зависящие от* Δu *и* Δv, *а* $\vec{\alpha}$ *и* $\vec{\beta}$ *– бесконечно малые при* $\Delta u \to 0$ *и* $\Delta v \to 0$ *векторные функции.*

Замечание. Если векторная функция $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ дифференцируема в точке $M_0(u_0, v_0)$, то, очевидно, что $\vec{a} = \dfrac{\partial\vec{r}(M_0)}{\partial u}$, $\vec{b} = \dfrac{\partial\vec{r}(M_0)}{\partial v}$.

Дифференциалом векторной функции $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ называется главная линейная часть приращения векторной функции: $d\vec{r} = \vec{a} \cdot \Delta u + \vec{b} \cdot \Delta v$. Учитывая замечание, и то, что $\Delta u = du$ и $\Delta v = dv$, получим

$$d\vec{r} = \vec{r}_u \cdot du + \vec{r}_v \cdot \Delta v. \qquad (1.7)$$

II. ПОНЯТИЕ ПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

2.1. Понятие поверхности

Прежде чем рассматривать понятие поверхности в пространстве, напомним, что ***замыканием области*** или ***замкнутой областью*** называется множество точек, полученное присоединением к области D всех ее граничных точек. Область называется ***односвязной***, если для любого замкнутого контура L, лежащего внутри этой области, ограниченная этим контуром часть плоскости целиком лежит в D.

Граница области D обозначается ∂D, замыкание области D: $\overline{D}$.

Определение* 2.1**. ***Простой поверхностью *называется множество Ф точек трехмерного пространства, представляющее собой образ какой-либо замкнутой ограниченной односвязной области при взаимно однозначном непрерывном отображении* f.

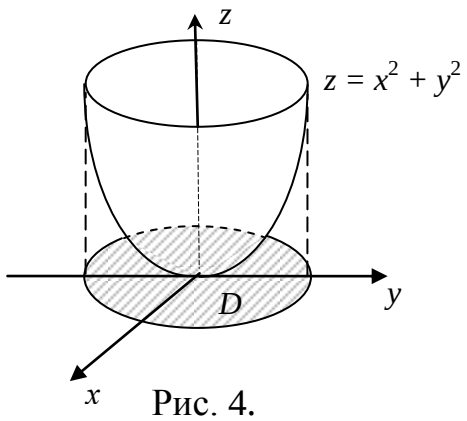

Рис. 4.

Пример 1. Рассмотрим множество D точек круга на плоскости XOY, заданного неравенством: $x^2 + y^2 \le a^2$. Пусть на этом множестве определена функция $z = x^2 + y^2$. Графиком этой функции в пространстве является часть параболоида (рис.4). Этот график и есть образ области

Репозиторий ВГУ

D при отображении, задаваемом функцией $z = x^2 + y^2$. Так как эта функция непрерывна в области D, при этом каждой точке $M(x, y) \in D$ ставится в соответствие единственная точка $N(x, y, x^2 + y^2)$ на параболоиде, и наоборот каждой точке $N(x, y, x^2 + y^2)$ на параболоиде ставится в соответствие единственная точка $M(x, y) \in D$, то данное отображение взаимно однозначное и непрерывное. Следовательно, поверхность, являющаяся графиком функции $z = x^2 + y^2$ – простая.

Определение* 2.2. *Поверхностью *мы будем называть соединение любого конечного числа простых поверхностей.*

Поверхность в отличие от простой поверхности может иметь точки самопересечения и самоналожения.

Сфера в является поверхностью, которую можно рассматривать, как объединение двух простых поверхностей – верхней и нижней полусфер.

2.2. Способы задания поверхностей в пространстве

Векторное задание поверхности. Рассмотрим пространство с введенной на нем декартовой системой координат. Тогда отображение, задающее поверхность в пространстве, может быть представлено в виде векторной функции:

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = \vec{r}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \ (u, v) \in D. \qquad (2.1)$$

В этом случае поверхность является годографом векторной функции (2.1). Говорят, что данная поверхность задана **в векторной форме.**

Параметрическое задание поверхности. Часто отображение, задающее поверхность, представляется в виде системы уравнений

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \qquad (u, v) \in D. \qquad (2.2)$$

В этом случае говорят, что поверхность задана ***параметрически.***

Параметрическое задание поверхности аналогично заданию поверхности в векторной форме. При этом функции (2.2) можно рассматривать как координаты вектора $\vec{r}(u, v)$. В обоих случаях переменные u и v называют ***параметрами*** или ***криволинейными координатами*** поверхности, u-линии и v-линии – ***координатными линиями*** поверхности. Если поверхность элементарная, то через каждую точку данной поверхности проходит по одной координатной линии каждого семейства, которые однозначно определяют положение точки на поверхности.

Репозиторий ВГУ

Явное и неявное задание поверхности. Если за параметры u и v можно взять декартовы координаты x и y, то поверхность может быть задана в виде

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D, \tag{2.3}$$

здесь $x = u$, $y = v$, $z = f(x, y)$. Такое задание поверхности называется ***явным.***

Если поверхность можно задать явно с помощью уравнения (2.3), и функция $z = f(x, y)$ непрерывна в области D, то такая поверхность является элементарной поверхностью.

Кроме того поверхность можно задать с помощью уравнения

$$F(x, y, z) = 0. \tag{2.4}$$

Такое задание поверхности называется ***неявным.***

Пример 2. Рассмотрим сферу радиуса R с центром в начале координат. Эту поверхность можно задать различными способами.

1. Неявно, с помощью уравнения: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

В этом случае сферу можно рассматривать как образ круга K, лежащего в плоскости XOY и ограниченного окружностью $x^2 + y^2 = R^2$, при отображении, задаваемом с помощью уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Данное отображение не является взаимно однозначным, так как каждой точке $(x_0, y_0) \in K$ ставится в соответствие две точки на поверхности: точка с координатами $(x_0, y_0, \sqrt{R^2 - x_0^2 - y_0^2})$ и точка с координатами $(x_0, y_0, -\sqrt{R^2 - x_0^2 - y_0^2})$.

2. Сферу можно рассматривать, как объединение двух поверхностей, заданных явно уравнениями $z = \sqrt{R^2 - x_0^2 - y_0^2}$ и $z = -\sqrt{R^2 - x_0^2 - y_0^2}$.

3. Эту же сферу можно задать параметрически, с помощью системы уравнений:

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi\sin\theta, \\ y = R\sin\varphi\sin\theta, \\ z = R\cos\theta, \end{cases} \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \theta \le \pi. \tag{2.5}$$

В этом случае сферу можно рассматривать как образ прямоугольника $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$, при отображении, задаваемом функцией (2.5). Это отображение не является взаимно однозначным, так как точки с координатами $\varphi = 2\pi$ и $\varphi = 0$ отображаются в одни и те же точки сферы. Кроме того точки у которых $\theta = 0$ ($\theta = \pi$), а $\varphi \in [0, 2\pi]$, отображаются в одну и ту же точку P_1 (0, 0, R) (P_2 (0, 0, $-R$)).

Репозиторий ВГУ

4. В векторной форме поверхность можно задать следующим образом: $\vec{r} = R\cos\varphi\sin\theta\cdot\vec{i} + R\sin\varphi\sin\theta\cdot\vec{j} + R\cos\theta\cdot\vec{k}$, где $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$.

2.3. Регулярные поверхности

Рассмотрим пространство с введенной на нем декартовой системой координат.

Определение* 2.3.** ***Окрестностью точки М поверхности Ф *называется общая часть поверхности Ф и пространственной окрестности точки М.*

(***Пространственной окрестностью*** *точки М* называется открытый шар произвольного радиуса с центром в точке *М*).

***Определение* 2.4.** *Поверхность Ф называется* ***регулярной* (*k раз дифференцируемой*)**, *если у каждой точки поверхности существует окрестность, которую можно задать параметрически с помощью уравнений* (2.2), *где функции* $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ *k раз дифференцируемы в области D.*

При $k = 1$ поверхность называется ***гладкой***.

Пусть Φ регулярная поверхность и точка $M \in \Phi$. Пусть в некоторой окрестности данной точки поверхность Φ задается уравнениями (2.2). Рассмотрим в этой окрестности матрицу

$$A = \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} \qquad (2.6)$$

Рассмотрим миноры второго порядка этой матрицы

$$A = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}. \qquad (2.7)$$

Пусть в точке *М* хотя бы один из этих определителей отличен от нуля, тогда точка *М* называется ***обыкновенной точкой поверхности***. Если в точке *М* все определители равны нулю, то точка *М* называется ***особой точкой поверхности***.

***Теорема* 2.1** *Пусть М – обыкновенная точка поверхности и пусть, например, в этой точке определитель* $C \neq 0$. *В этом случае у точки М существует такая поверхностная окрестность, в которой поверхность Ф можно задать явно уравнением* $z = f(x, y)$. *При этом данная часть поверхности может быть однозначно спроектирована на плоскость ХОУ.*

Доказательство. Рассмотри первые два уравнения системы (2.2): $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, которые запишем в виде:

Репозиторий ВГУ

$$\begin{cases} x(u,v) - x = 0, \\ y(u,v) - y = 0, \end{cases} \qquad (u, v) \in D. \qquad (2.8)$$

Уравнения можно рассматривать как систему двух уравнений с четырьмя переменными: u, v, x, y. Якобианом данной системы по переменным u и v является определитель

$$\begin{vmatrix} (x(u,v) - x)'_u & (x(u,v) - x)'_v \\ (y(u,v) - y)'_u & (y(u,v) - y)'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = C.$$

Так как по условию $C \neq 0$, то по теореме о неявных функциях, заданных системой уравнений, система (2.8) определяет две дифференцируемые функции $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $(x, y) \in G$. Подставив данные функции в третье уравнение системы (2.2), мы получим функцию $z = z(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$, которая будет непрерывна и дифференцируема в некоторой области G. ■

В случае, если в точке M не равен нулю определитель B, то существует такая поверхностная окрестность точки M, которую можно задать явно уравнением $y = \varphi(x, z)$. Данная окрестность может быть однозначно спроектирована на плоскость XOZ. Для $A \neq 0$, окрестность точки M может быть задана уравнением $x = \psi(y, z)$ и однозначно проектируется на плоскость YOZ.

Замечание. Если регулярную поверхность задать с помощью векторной функции

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = \vec{r}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D,$$

тогда строки матрицы A (2.6) состоят из координат векторов $\vec{r}'_u$ и $\vec{r}'_v$, а определители (2.7) есть координаты вектора, являющегося векторным произведением векторов $\vec{r}'_u$ и $\vec{r}'_v$:

$$[\vec{r}'_u, \vec{r}'_v] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \vec{k} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}. \quad (2.9)$$

Если в точке M все определители (2.7) равны нулю, т.е. точка M – особая, то вектора $\vec{r}'_u$ и $\vec{r}'_v$ – коллинеарны. В обыкновенной точке поверхности данные вектора не являются коллинеарными.

2.4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Репозиторий ВГУ

Напомним, что ***касательной плоскостью*** к поверхности в точке M_0 называется плоскость, которая обладает тем свойством, что угол между плоскостью и секущей M_0M (точка M произвольная точка поверхности) стремится к нулю при $M \to M_0$.

Вектором нормали к поверхности в точке M_0 называется вектор перпендикулярный к касательной плоскости, проведенной к поверхности в точке M_0.

В случае явного задания поверхности уравнением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, где функция $f(x, y)$ дифференцируема в области D, существует касательная плоскость, проведенная к поверхности в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$, уравнение которой может быть записано в виде

$$z - z_0 = z'_x(M_0)(x - x_0) + z'_y(M_0)(y - y_0),$$

где точка $M_0(x_0, y_0) \in D$. Вектор нормали к поверхности в этом случае имеет координаты $\overrightarrow{N} = \left(z'_x(M_0),\ z'_y(M_0), -1\right)$.

Рассмотрим гладкую поверхность Φ, которая задана параметрически с помощью системы (2.2):

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D,$$

или векторно с помощью векторной функции (2.1):

$$\vec{r}(u, v) = \vec{r}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in D.$$

Пусть поверхность Φ регулярная. Рассмотрим обыкновенную точку $N_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности (здесь $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $z_0 = z(u_0, v_0)$. Точка N_0 является образом точки M_0, лежащей в D плоскости (u, v). Пусть, например, определитель C в точке M_0 не равен нулю. Тогда существует окрестность точки N_0, в которой поверхность Φ можно задать явно уравнением $z = f(x, y)$, где функция $f(x, y)$ дифференцируема в некоторой области G плоскости XOY. Следовательно, по свойству дифференцируемых функций двух переменных, к графику функции $z = f(x, y)$, т.е. к поверхности Φ, в точке N_0 можно провести касательную плоскость.

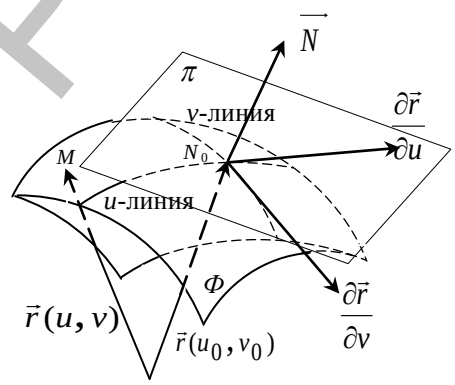

Рис. 3.

Зафиксируем параметр $v = v_0$ и получим u-линию, проходящую через точку N_0 поверхности Φ. Тогда вектор $\vec{r}_u(M_0) = (x_u(u_0, v_0), y_u(u_0, v_0), z_u(u_0, v_0))$ направлен по касательной к данной линии. Зафиксировав параметр $u = u_0$, получим v-линию, проходящую через точку N_0. Вектором, направленным по каса-

Репозиторий ВГУ

тельной к этой линии, является вектор $\vec{r}_v(M_0) = (x_v(u_0, v_0), y_v(u_0, v_0), z_v(u_0, v_0))$.

Очевидно, что векторы $\vec{r}_u(M_0)$ и $\vec{r}_v(M_0)$ лежат в касательной плоскости, проведенной к поверхности Φ в точке N_0. Вектор нормали к поверхности в точке N_0 равен векторному произведению векторов $\vec{r}_u(M_0)$ и $\vec{r}_v(M_0)$, т.е. это вектор

$$\overrightarrow{N} = [\vec{r}_u \vec{r}_v] = \overrightarrow{N}\,(A, B, C), \qquad (2.10)$$

где A, B, C – определители (2.7). Тогда уравнение касательной плоскости к поверхности Φ имеет вид

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0. \qquad (2.11)$$

Замечание. Если в качестве вектора нормали к поверхности рассмотреть единичный вектор $\vec{n} = \dfrac{\overrightarrow{N}}{|\overrightarrow{N}|}$, то его координаты будут направляющими косинусами данного вектора:

$$\cos X = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \ \cos Y = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos Z = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad (2.12)$$

где X, $У$, Z– углы между вектором нормали к поверхности и положительными направлениями координатных осей OX, $OУ$ и OZ соответственно.

2.5. Односторонние и двусторонние поверхности

Рассмотрим гладкую поверхность Φ, заданную с помощью векторной функции $\vec{r} = \vec{r}\,(u, v)$, $(u, v) \in D$. Предположим, что каждая точка поверхности обыкновенная, т.е. в каждой точке можно провести касательную плоскость и построить вектор нормали к поверхности. При этом координаты вектора нормали зависят от координат точки, в которой этот вектор построен, а, следовательно, являются функциями от координат u и v точки M: $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{N}\,(u, v)$. Так как поверхность гладкая, то у каждой точки существует окрестность, в которой функция $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{N}\,(u, v)$ непрерывна.

Определение* 2.5.** *Поверхность Φ называется* ***двусторонней*, если функция $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{N}(u, v)$ непрерывна во всех точках поверхности. В противном случае, поверхность Φ называется* ***односторонней****.*

Репозиторий ВГУ

Двусторонняя и односторонняя поверхности характеризуются следующим свойством. Рассмотрим некоторую точку M_0 на поверхности. Проведем на поверхности замкнутую кривую, проходящую через точку M_0 и не пересекающую границу поверхности. Построим вектор нормали в произвольной точке M данной кривой. Возможны два случая:

– в случае двусторонней поверхности вектор нормали, перемещаясь вместе с точкой M по замкнутому контуру, при возвращении в точку M, примет исходное положение;

– в случае односторонней поверхности вектор нормали, перемещаясь вместе с точкой M по замкнутому контуру, изменит свое направление на противоположное.

В дальнейшем мы будем рассматривать только двусторонние поверхности. Следовательно, в каждой точке такой поверхности можно указать два направления вектора нормали. Выбор стороны поверхности зависит от определенного направления вектора нормали.

Поверхность, на которой выбрано направление вектора нормали, а значит и сторона, называют ***ориентированной.***

2.6. Первая квадратичная форма поверхности

Пусть Φ гладкая поверхность без особых точек, заданная с помощью векторной функции $\vec{r} = \vec{r}\,(u, v) = \vec{r}\,(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in D$. В этом случае вектор $[\vec{r}_u \vec{r}_v] \neq 0$.

Рассмотрим дифференциал функции $\vec{r} = \vec{r}\,(u, v)$: $d\vec{r} = \vec{r}_u \cdot du + \vec{r}_v \cdot dv$.

Определение* 2.6. *Первой квадратичной формой поверхности *называется величина* $\mathrm{I} = d\vec{r}^{\,2}$.

Таким образом,

$$\mathrm{I} = d\vec{r}^{\,2} = (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)^2 = \vec{r}_u^{\,2} du^2 + 2\vec{r}_u \vec{r}_v du dv + \vec{r}_v^{\,2} dv^2. \quad (2.13)$$

Первая квадратичная форма поверхности – положительно определенная квадратичная форма относительно дифференциалов du и dv.

Обозначим коэффициенты первой квадратичной формы следующим образом:

$$E = \vec{r}_u^{\,2}, \qquad F = \vec{r}_u \vec{r}_v, \qquad G = \vec{r}_v^{\,2}. \quad (2.14)$$

Тогда

$$\mathrm{I} = E du^2 + 2F du dv + G dv^2. \quad (2.15)$$

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{N}\,(A, B, C) = [\vec{r}_u \vec{r}_v]$ нормали к поверхности Φ. Можно доказать, что для модуля этого вектора выполняется равенство

Репозиторий ВГУ

$$|\overrightarrow{N}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{EG - F^2} \ . \qquad (2.16)$$

Действительно, пусть угол между векторами $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ равен α. Тогда скалярное произведение векторов можно найти по формуле: $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = |\vec{r}_u| \cdot |\vec{r}_v| \cos\alpha$, а модуль векторного произведения – по формуле $|[\vec{r}_u \ \vec{r}_v]| = |\vec{r}_u| \cdot |\vec{r}_v| \sin\alpha$. Следовательно,

$$|\overrightarrow{N}| = |[\vec{r}_u \ \vec{r}_v]| = |\vec{r}_u| \cdot |\vec{r}_v| \sin\alpha = |\,|\vec{r}_u| \cdot |\vec{r}_v| \sqrt{1 - \cos^2\alpha} =$$

$$= \sqrt{\vec{r}_u^{\,2} \vec{r}_v^{\,2} (1 - \cos^2\alpha)} = \sqrt{\vec{r}_u^{\,2} \vec{r}_v^{\,2} - \vec{r}_u^{\,2} \vec{r}_v^{\,2} \cos^2\alpha} = \sqrt{\vec{r}_u^{\,2} \vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2} =$$

$$= \sqrt{EG - F^2} \ .$$

2.7. Площадь поверхности

Пусть Φ – гладкая двусторонняя поверхность без особых точек. Разобьем данную поверхность сетью произвольных кусочно-гладких кривых на n частей Φ_i. Выберем на каждой частичной поверхности Φ_i точки M_i, через которые проведем касательные плоскости к данной поверхности. Спроектируем части Φ_i на касательные плоскости, проведенные в соответствующих точках M_i. Обозначим через σ_i площади этих проекций, через Δ – наибольший из диаметров областей Φ_i. Составим сумму $\sigma = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i$.

***Определение* 2.7.** *Число S называется пределом сумм σ, при $\Delta \to 0$, если для любого действительного числа $\varepsilon > 0$ существует такое действительное число $\delta > 0$, что независимо от выбора точек M_i и деления поверхности Φ на части, выполняется неравенство $|S - \sigma| < \varepsilon$.*

Если существует предел $S = \lim\limits_{\Delta \to 0} \sigma$, то поверхность Φ называется ***квадрируемой***, а число S называется ***площадью поверхности***.

Введем понятие полной поверхности: поверхность называется ***полной***, если любая фундаментальная последовательность точек этой поверхности сходится к некоторой точке данной поверхности.

Примерами полных поверхностей являются плоскость, сфера, эллипсоид. Любое открытое связное множество на плоскости или сфере – неполные поверхности.

***Теорема* 2.2.** *Гладкая ограниченная полная двусторонняя поверхность квадрируема. Если поверхность Φ задается с помощью векторной функции $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, то площадь поверхности может быть найдена по формуле*

Репозиторий ВГУ

$$S = \iint_D \left|\left[\vec{r}_u\ \vec{r}_v\right]\right| du dv. \qquad (2.17)$$

***Замечание* 1.** Формула (2.17) не зависит от выбора декартовой системы координат в пространстве. Если координаты вектора $\vec{r}$ есть функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, $(u, v) \in D$ то вектор нормали к поверхности $\vec{N} = \left[\vec{r}_u, \vec{r}_v\right]$ имеет координаты (A, B, C), определяемые равенством (2.7). Так как $\left|\vec{N}\right| = \left|\left[\vec{r}_u, \vec{r}_v\right]\right| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, то площадь поверхности Φ может быть найдена по формуле

$$S = \iint_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du dv. \qquad (2.18)$$

Учитывая равенство (2.16), площадь поверхности может быть также найдена по формуле

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, du dv. \qquad (2.19)$$

***Замечание* 1.** Если поверхность Φ задана явно, например уравнением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, то вектор нормали к поверхности имеет координаты $\vec{N} = \left(z'_x(M_0),\ z'_y(M_0), -1\right)$, $|\vec{N}| = \sqrt{z'^2_x + z'^2_y + 1}$. Тогда площадь поверхности можно найти по формуле

$$S = \iint_D \sqrt{z'^2_x + z'^2_y + 1}\, dx dy. \qquad (2.20)$$

III. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДА

3.1. Поверхностные интегралы первого рода

Пусть Φ – гладкая, ограниченная, полная, двусторонняя поверхность. Пусть на поверхности Φ задана функция $f(M)$. Разобьём данную поверхность сетью произвольных кусочно-гладких кривых на n частей Φ_i. Пусть площадь каждой части равна ΔS_i. На каждом кусочке Φ_i произвольным образом выберем точку M_i и найдём значение функции f(M) в этой точке. Построим сумму

$$\sigma(\Phi_i, M_i) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$$

Обозначим через Δ–наибольший из диаметров частей Φ_i.

***Определение* 3.1.** *Число I называется пределом сумм* $\sigma(\Phi_i, M_i)$ *при* $\Delta \to 0$, *если для любого числа* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что для любого разбиения поверхности* Φ *на части, для кото-*

Репозиторий ВГУ

рых $\Delta < \delta$, *независимо от выбора точек* M_i *будет выполняться неравенство*

$$\left|I - \sigma(\Phi_i, M_i)\right| < \varepsilon .$$

Если существует конечный предел I сумм $\sigma(\Phi_i, M_i)$ при $\Delta \to 0$, то он называется ***поверхностным интегралом первого рода*** от функции $f(M)$ по поверхности Φ и обозначается следующим образом:

$$I = \iint\limits_{\Phi} f(M)\, dS . \qquad (3.1)$$

Если в пространстве введена декартова система координат и (x, y, z) – координаты точки $M \in \Phi$, то функция $f(M) = f(x, y, z)$ и поверхностный интеграл (3.1) можно записать в виде

$$I = \iint\limits_{\Phi} f(x, y, z)\, dS . \qquad (3.2)$$

Замечание. Из построения поверхностного интеграла первого рода следует:

1) поверхностный интеграл первого рода не зависит от выбора стороны поверхности;

2) если на поверхности Φ функция $f(x, y, z) \equiv 1$, то площадь S_ϕ поверхности находится по формуле: $S_\Phi = \iint\limits_{\Phi} dS$;

3) если на поверхности Φ функция $f(x, y, z) > 0$ и функцию $f(x, y, z)$ рассматривать как поверхностную плотность данной поверхности, то интеграл (3.2) определяет массу этой поверхности.

***Теорема* 3.1.** *Пусть* Φ *– гладкая ограниченная поверхность, на которой введена единая параметризация с помощью функций* $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, *заданных в ограниченной замкнутой области D плоскости* (u, v). *Пусть на поверхности* Φ *определена непрерывная функция* $f(x, y, z)$. *Тогда поверхностный интеграл первого рода от этой функции может быть найден по формуле*

$$\iint\limits_{\Phi} f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{D} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F}\, du dv . \quad (3.3)$$

Таким образом, для того чтобы свести поверхностный интеграл к двойному, надо заменить координаты x, y, z их выражениями через параметры, а элемент площади поверхности dS – его выражением через коэффициенты первой квадратичной формы.

***Замечание* 1.** Учитывая, равенство (2.16) формула (3.3) может быть записана в виде

$$\iint\limits_{\Phi} f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{D} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du dv . \quad (3.4)$$

Репозиторий ВГУ

***Замечание* 2.** Если поверхность Φ является кусочно-гладкой поверхностью, то поверхностный интеграл $\iint\limits_{\Phi} f(x, y, z)\, dS$ можно рассматривать, как сумму интегралов по гладким частям поверхности

***Замечание* 3.** Если поверхность Φ, заданная явно уравнением $z = f(x, y)$, однозначно проектируется в область D плоскости (x, y), то поверхностный интеграл можно найти по формуле:

$$\iint\limits_{\Phi} f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{D} f(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\, dxdy \qquad (3.5)$$

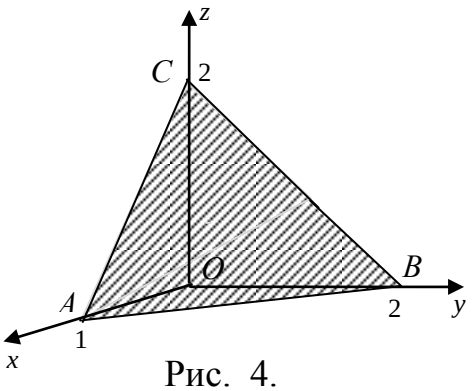

Рис. 4.

Пример 1. Найти поверхностный интеграл $\iint\limits_{\Phi} \frac{dS}{(1 + x + y)^2}$, где поверхность Φ – тетраэдр, ограниченный плоскостью $2x + y + z = 2$ и координатными плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (рис. 4)

Решение. Тетраэдр – кусочно гладкая поверхность. Поэтому поверхностный интеграл будем находить как сумму интегралов по граням тетраэдра Φ.

Обозначим через Φ_1 грань AOB, которая является частью плоскости $z = 0$, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $2x + y = 2$. В этом случае поверхность задана явно уравнением $z = f(x, y)$, где $f(x, y) = 0$. Поверхностный интеграл по грани AOB находим по формуле (3.5), где $f_x' = 0$, $f_y' = 0$, $dS = \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\, dxdy = dxdy$. Область D_1 по которой находится двойной интеграл есть треугольник AOB.

$$\iint\limits_{\Phi_1} \frac{dS}{(1 + x + y)^2} = \iint\limits_{D_1} \frac{dxdy}{(1 + x + y)^2} = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2-2x} \frac{dy}{(1 + x + y)^2} =$$

$$= -\int\limits_0^1 \frac{1}{(1 + x + y)}\Bigg|_0^{2-2x} dx = -\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{3 - x} - \frac{1}{1 + x}\right) dx =$$

$$= (\ln(3 - x) + \ln(1 + x))\Big|_0^1 = \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 = \ln\frac{4}{3}.$$

Грань $\Phi_2 = AOC$ – часть плоскости $y = 0$, ограниченная прямыми $x = 0$, $z = 0$, $2x + z = 2$. Плоскость задана явно уравнением $y = g(x, z)$, где $g(x, z) = 0$. Поэтому поверхностный интеграл по грани AOC находим по формуле, аналогичной формуле (3.5)

Репозиторий ВГУ

($g'_x = 0,\ g'_z = 0,\ dS = \sqrt{1 + g'^2_x + g'^2_z}\, dxdz = dxdz$). Область D_2, по которой находится двойной интеграл, есть треугольник AOC.

$$\iint\limits_{\Phi_2} \frac{dS}{(1+x+y)^2} = \iint\limits_{D_2} \frac{dxdz}{(1+x)^2} = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} \frac{dz}{(1+x)^2} =$$

$$= \int_0^1 \frac{z}{(1+x)^2}\Bigg|_0^{2-2x} dx = \int_0^1 \frac{2(1-x)}{(1+x)^2} dx = 2\int_0^1 \frac{2-1-x}{(1+x)^2} dx =$$

$$= 2\int_0^1 \left(\frac{2}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} \right) dx = \left(\frac{-4}{1+x} - 2\ln(1+x) \right)\Bigg|_0^1 = 2 - 2\ln 2.$$

Интеграл по грани $\Phi_3 = BOC$ находится аналогично предыдущим:

$$\iint\limits_{\Phi_3} \frac{dS}{(1+x+y)^2} = \iint\limits_{D_3} \frac{dydz}{(1+x+y)^2} = \int_0^2 dy \int_0^{2-y} \frac{dz}{(1+y)^2} =$$

$$= \int_0^2 \frac{z}{(1+y)^2}\Bigg|_0^{2-y} dy = \int_0^2 \frac{2-y}{(1+y)^2} dy = \int_0^2 \frac{3-1-y}{(1+y)^2} dy =$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{3}{(1+y)^2} - \frac{1}{1+y} \right) dy = \left(\frac{-3}{1+y} - \ln(1+y) \right)\Bigg|_0^2 = 2 - \ln 3.$$

Найдем интеграл по грани $\Phi_4 = ABC$. Φ_4 – часть плоскости $z = 2 - 2x - y$, ограниченная координатными плоскостями. $dS = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\, dxdy = \sqrt{6}\, dxdy$. Проекцией грани Φ_4 на плоскость XOY является треугольник AOB. Поверхностный интеграл также находим по формуле (3.5):

$$\iint\limits_{\Phi 4} \frac{dS}{(1+x+y)^2} = \iint\limits_{D_1} \frac{\sqrt{6}dxdy}{(1+x+y)^2} = \sqrt{6}\iint\limits_{D_1} \frac{dxdy}{(1+x+y)^2} = \sqrt{6}\ln\frac{4}{3}.$$

Тогда поверхностный интеграл по всей поверхности Φ равен сумме найденных интегралов:

$$\iint\limits_{\Phi} \frac{dS}{(1+x+y)^2} = \ln\frac{4}{3} + 2 - 2\ln 2 + 2 - \ln 3 + \sqrt{6}\ln\frac{4}{3} =$$

$$= 4 + \sqrt{6}\ln\frac{4}{3} - 2\ln 3.$$

3.2. Поверхностные интегралы второго рода

Пусть Φ – гладкая, ограниченная, полная, двусторонняя поверхность. Выберем сторону поверхности, которой отвечает единичный

Репозиторий ВГУ

вектор нормали $\vec{n} = \dfrac{\overrightarrow{N}}{|\overrightarrow{N}|}$ = (cos X, cos Y, cos Z). Пусть на этой поверхности заданы три непрерывные функции: $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$.

Разобьём поверхность Φ произвольным образом сетью кусочно-гладких кривых на n частей Φ_i, площади которых обозначим через ΔS_i. На каждой части выберем произвольную точку M_i и построим три интегральные суммы:

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} P(M_i)\cdot\cos X\cdot\Delta S_i,$$

$$\sigma_2 = \sum_{i=1}^{n} Q(M_i)\cdot\cos Y\cdot\Delta S_i,$$

$$\sigma_3 = \sum_{i=1}^{n} R(M_i)\cdot\cos Z\cdot\Delta S_i.$$

***Определение* 3.2.** *Число* I_1 *называется пределом сумм* $\sigma_1(\Phi_i, M_i)$ *при* $\Delta\to 0$ *если для любого числа* $\varepsilon > 0$, *существует такое* $\delta > 0$, *что для любого разбиения поверхности* Φ *на части, для которых* $\Delta < \delta$, *независимо от выбора точек* M_i *будет выполняться неравенство*

$$|I_1 - \sigma_1(\Phi_i, M_i)| < \varepsilon.$$

Аналогично определяются пределы I_2 и I_3 интегральных сумм σ_2 и σ_3 соответственно.

Пределы I_1, I_2, I_3 при $\Delta\to 0$, если они существуют и конечны, называются ***поверхностными интегралами второго рода*** от функций $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ по поверхности Φ.

Обозначение:

$$I_1 = \iint_{\Phi} P(x, y, z)\cdot\cos X\cdot dS, \qquad (3.6)$$

$$I_2 = \iint_{\Phi} Q(x, y, z)\cdot\cos Y\cdot dS, \qquad (3.7)$$

$$I_3 = \iint_{\Phi} R(x, y, z)\cdot\cos Z\cdot dS. \qquad (3.8)$$

Сумма поверхностных интегралов (3.6)–(3.8) называется ***поверхностным интегралом второго рода в общем виде.***

Обозначение:

$$\iint_{\Phi} (P(x, y, z)\cdot\cos X + Q(x, y, z)\cdot\cos Y + R(x, y, z)\cdot\cos Z)dS$$

***Замечание* 1.** Так как значение поверхностного интеграла второго рода зависит от направляющих косинусов вектора нормали к вы-

Репозиторий ВГУ

бранной стороне поверхности, то этот интеграл зависит от выбора стороны поверхности. При изменении стороны поверхности знак поверхностного интеграла второго рода меняется на противоположный.

***Замечание* 2.** Если сторона поверхности определена и найдены направляющие косинусы вектора нормали, то поверхностные интегралы второго рода от функций $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ есть ни что иное, как поверхностные интегралы первого рода от функций $P(x,y,z)\cdot\cos X$, $Q(x,y,z)\cdot\cos Y$, $R(x,y,z)\cdot\cos Z$.

Следовательно, перейдя от поверхностного второго рода к поверхностному интегралу первого рода мы можем найти этот интеграл по одной из формул (3.3) – (3.5).

Так, если поверхность Φ задана параметрически, то учитывая формулы для нахождения направляющих косинусов вектора нормали:

$$\cos X = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos Y = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos Z = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

и формулу (3.4), получим:

$$\iint_{\Phi} P(x,y,z)\cdot\cos X\cdot dS =$$

$$= \iint_{D} P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv =$$

$$= \iint_{D} P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot A\,dudv, \qquad (3.9)$$

$$\iint_{\Phi} Q(x,y,z)\cdot\cos Y\,dS = \iint_{D} Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot B\,dudv,$$

$$\iint_{\Phi} R(x,y,z)\cdot\cos Z\,dS = \iint_{D} R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot C\,dudv.$$

***Замечание* 3.** Пусть поверхность Φ задана явно с помощью дифференцируемой функции $z = f(x,y)$, $(x,y)\in D$. При этом, если в качестве стороны поверхности выбрана та, которая соответствует вектору нормали, образующему острый угол с осью OZ, т.е. вектору $\vec{N} = (-f'_x, -f'_y, 1)$, то вектор единичной нормали имеет вид: $\vec{n} = \left(-\frac{f'_x}{\sqrt{f'^2_x+f'^2_y+1}}, -\frac{f'_y}{\sqrt{f'^2_x+f'^2_y+1}}, \frac{1}{\sqrt{f'^2_x+f'^2_y+1}}\right)$. Тогда, применяя формулу (3.5), для интеграла (3.8) получим:

$$\iint_{\Phi} R(x,y,z)\cdot\cos Z\,dS =$$

$$= \iint_{D} R(x,y,f(x,y))\frac{1}{\sqrt{f'^2_x+f'^2_y+1}}\cdot\sqrt{f'^2_x+f'^2_y+1}\,dxdy =$$

Репозиторий ВГУ

$$= \iint_D R(x, y, f(x, y))dxdy .$$

Учитывая это, поверхностный интеграл второго рода (3.8) обозначается следующим образом:

$$\iint_{\Phi} R(x, y, z) \cdot \cos Z dS = \iint_{\Phi} R(x, y, z) dxdy .$$

Отметим, что такое же обозначение используется и в том случае, если поверхность Φ не является графиком функции $z = f(x, y)$. Поверхностные интегралы (3.6) и (3.7) обозначаются похожим образом:

$$\iint_{\Phi} R(x, y, z) \cdot \cos X dS = \iint_{\Phi} P(x, y, z) dydz ,$$

$$\iint_{\Phi} Q(x, y, z) \cdot \cos Y dS = \iint_{\Phi} Q(x, y, z) dxdz .$$

Тогда поверхностный интеграл второго рода в общем виде можно записать следующим образом:

$$\iint_{\Phi} (P(x, y, z) \cdot \cos X + Q(x, y, z) \cdot \cos Y + R(x, y, z) \cdot \cos Z) dS =$$

$$= \iint_{\Phi} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dxdz + R(x, y, z) dxdy .$$

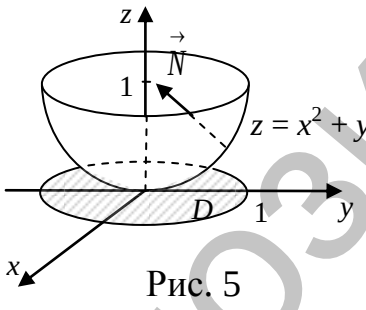

Рис. 5

Пример 2. Найти поверхностный интеграл второго рода $\iint_{\Phi} xdydz + ydxdz + zdxdy$, где Φ верхняя сторона части параболоида $z = x^2 + y^2$, отсеченная плоскостью $z = 1$.

Решение. Так как поверхность задана явно, то вектор нормали к верхней стороне поверхности имеет координаты $\vec{N} = (-f'_x, -f'_y, 1)$,

или $\vec{N} = (-2x, -2y, 1)$. Проекцией поверхности на плоскость XOY является круг $x^2 + y^2 \le 1$. Тогда

$$I = \iint_{\Phi} xdydz + ydxdz + zdxdy = \iint_D (x \cdot (-2x) + y \cdot (-2y) + (x^2 + y^2)) dxdy =$$

$$= -\iint_D (x^2 + y^2) dxdy .$$

Перейдем в двойном интеграле к полярным координатам: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$, якобиан перехода $\Delta = r,\quad 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1$. Тогда

Репозиторий ВГУ

$$I = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi) r\,dr = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 dr =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4}\Big|_0^1 d\varphi = -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi = -\frac{1}{4}\cdot 2\pi = -\frac{\pi}{2}.$$

3.3. Поверхностный интеграл второго рода в векторной форме

Пусть Φ – гладкая, ограниченная, полная, двусторонняя поверхность. Пусть на поверхности заданы непрерывная векторная функция $\vec{r}(M) = (P(M), Q(M), R(M))$ и непрерывная векторная функция $\vec{n}(M) = (\cos X(M), \cos Y(M), \cos Z(M))$ единичных нормалей. Найдем скалярное произведение векторов $\vec{r}(M)$ и $\vec{n}(M)$:

$$\vec{r}(M)\cdot\vec{n}(M) = P(M)\cdot\cos X(M) + Q(M)\cdot\cos Y(M) + R(M)\cdot\cos Z(M).$$

Отсюда следует, что поверхностный интеграл второго рода можно записать в виде:

$$\iint_{\Phi} (P(x, y, z)\cdot\cos X + Q(x, y, z)\cdot\cos Y + R(x, y, z)\cdot\cos Z)dS =$$

$$= \iint_{\Phi} \vec{r}(M)\cdot\vec{n}(M)dS. \qquad (3.10)$$

Замечание. Отметим, что общий поверхностный интеграл второго рода $\iint_{\Phi} \vec{r}(M)\cdot\vec{n}(M)dS$ численно равен величине, которую в физике называют ***потоком*** вектора $\vec{r}(M)$ через поверхность Φ.

3.4. Формула Стокса

Пусть Φ – кусочно-гладкая, полная, двусторонняя поверхность, ограниченная кусочно-гладкой замкнутой кривой Γ.

Определение* 3.3.** *Направление на контуре Г называется* ***положительным*, если с учетом выбранной стороны поверхности при обходе контура в заданном направлении поверхность остается слева.*

***Теорема* 3.2.** *Пусть Ф – полная, гладкая, односвязная, двусторонняя поверхность с кусочно-гладкой замкнутой границей Г, которая однозначно проектируется на каждую координатную плоскость. Пусть на поверхности Ф и на ее границе Г определены дифференцируемые функции* $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$. *Пусть контур Г ориентирован в положительном направлении с учетом выбранной стороны поверхности. Тогда имеет место следующее соотношение*:

Репозиторий ВГУ

$$\iint_{\Phi}((\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\cdot\cos X+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\cdot\cos Y+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\cdot\cos Z)dS=$$

$$=\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz \qquad (3.11)$$

Формула (3.11) называется ***формулой Стокса.***

Доказательство. Будем считать, что вектор нормали образует с координатными осями острые углы.

Рассмотрим интеграл $I_1=\iint_{\Phi}(\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\cos Y-\frac{\partial P}{\partial y}\cdot\cos Z)dS$. Поскольку поверхност Φ однозначно проектируется на плоскость XOY, то эту поверхность можно рассматривать, как график некоторой функции $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$. Границей области D является некоторая кусочно-гладкая кривая L, которая является проекцией кривой Γ. Кривая L ориентирована таким образом, что при обходе контура, область D остается слева. Вектор единичной нормали к выбранной стороне поверхности имеет координаты:

$$\vec{n}=\left(-\frac{f'_x}{\sqrt{f'^2_x+f'^2_y+1}},-\frac{f'_y}{\sqrt{f'^2_x+f'^2_y+1}},\frac{1}{\sqrt{f'^2_x+f'^2_y+1}}\right).$$

Так как на поверхности Φ значения функции $P(x,y,z)$ равны $P(x,y,f(x,y))$, то по правилу дифференцирования сложной функции $\frac{\partial}{\partial y}(P(x,y,f(x,y)))=\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\cdot f'_y$

Перейдем в поверхностном интеграле к двойному:

$$\iint_{\Phi}(\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\cos Y-\frac{\partial P}{\partial y}\cdot\cos Z)dS=-\iint_{D}(\frac{\partial P}{\partial z}\cdot f'_y+\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=$$

$$=-\iint_{D}\frac{\partial P(x,y,f(x,y))}{\partial y}dxdy.$$

Воспользуемся формулой Грина, тогда

$$I_1=-\iint_{D}\frac{\partial P(x,y,f(x,y))}{\partial y}dxdy=\oint_{L}P(x,y,f(x,y))dx.$$

Так как каждая точка $N(x,y)\in L$ является образом некоторой точки $M(x,y,z)\in\Gamma$, то функция $P(x,y,f(x,y))$, определенная на кривой L, является образом функции $P(x,y,z)$, определенной на кривой Γ. Следовательно,

$$I_1=\oint_{L}P(x,y,f(x,y))dx=\oint_{\Gamma}P(x,y,z)dx.$$

Репозиторий ВГУ

Мы доказали, что

$$I_1 = \iint\limits_{\Phi} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cdot \cos Y - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \cos Z\right) dS = \oint\limits_{\Gamma} P(x, y, z)dx.$$

Аналогично доказываются равенства

$$I_1 = \iint\limits_{\Phi} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos Z - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos X\right) dS = \oint\limits_{\Gamma} Q(x, y, z)dy.$$

$$I_1 = \iint\limits_{\Phi} \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos X - \frac{\partial R}{\partial x} \cos Y\right) dS = \oint\limits_{\Gamma} R(x, y, z)dz. \blacksquare$$

***Замечание* 1.** Теорема Стокса справедлива и в том случае, когда поверхность Φ – кусочно-гладкая, полная, двусторонняя поверхность, которая не может быть однозначно спроектирована на координатные плоскости.

***Замечание* 2.** Формулу Стокса легко запомнить, если записать ее в следующем виде:

$$\oint\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint\limits_{\Phi} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \cdot \cos X + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \cdot \cos Y + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \cdot \cos Z\right) dS =$$

$$\iint\limits_{\Phi} \begin{vmatrix} \cos X & \cos Y & \cos Z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS.$$

Пример 3. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{\Gamma} (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz,$$

где Γ – окружность, полученная при пересечении сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ и плоскости $x + y + z = 0$, пробегаемая против часовой стрелки, если смотреть с положительного конца оси OX.

Решение. Контур Γ можно рассматривать как границу круга, лежащего в плоскости Φ: $x + y + z = 0$. Тогда на плоскости выбирается верхняя сторона, вектор единичной нормали к которой имеет координаты: $\bar{n}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. При этом $P(x, y, z) = y - z$, $Q(x, y, z) = z - x$, $R(x, y, z) = x - y$. Тогда $P'_x = 0$, $P'_y = 1$, $P'_z = -1$, $Q'_x = -1$, $Q'_y = 0$, $Q'_z = 1$, $R'_x = 1$, $R'_y = -1$, $R'_z = 0$.

По формуле (3.11) имеем

Репозиторий ВГУ

$$I = \oint_{\Gamma} (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz =$$

$$= \iint_{\Phi} ((-1-1)\cos X + (-1-1)\cos Y + (-1-1)\cos Z)dS,$$

где

$$\cos X = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \cos Y = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \cos Z = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

тогда

$$I = -\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{\Phi} dS = -\frac{2}{\sqrt{3}} S_{кр},$$

где $S_{кр}$ – площадь круга, ограниченного окружностью Γ, лежащего в плоскости Φ, . Тогда $I = -\frac{6\pi}{\sqrt{3}} = -2\sqrt{3}\pi$.(Здесь мы использовали формулу $S_{\Phi} = \iint_{\Phi} dS$).

3.5. Применение формулы Стокса к исследованию криволинейных интегралов в пространстве

Определение* 3.4.** *Область* (*V*) *называется* ***поверхностно-односвязной*, если на любую замкнутую кусочно-гладкую кривую L* $\in$ (*V*) *можно «натянуть» кусочно-гладкую поверхность, лежащую в области* (*V*), *для которой контур L является границей.*

***Теорема* 3.3.** *Пусть в некоторой поверхностно-односвязной области* (*V*) *заданы непрерывные вместе со своими частными производными функции P* (*x*, *y*, *z*), *Q* (*x*, *y*, *z*), *R* (*x*, *y*, *z*). *Тогда эквивалентны следующие условия*

1) *криволинейный интеграл второго рода по любой замкнутой* (*возможно самопересекающейся*) *кусочно-гладкой кривой L, лежащей в* (*V*), *равен нулю, т.е.*

$$\oint_{L} Pdx + Qdy + Rdz = 0;$$

2) *для любых двух точек A и B, лежащих в области* (*V*), *значение интеграла* $\oint_{L} Pdx + Qdy + Rdz$ *не зависит от кусочно-гладкой кривой AB, соединяющей точки A и B и расположенной в* (*V*);
3) *выражение Pdx + Qdy + Rdz является полным дифференциалом некоторой функции u* (*x*, *y*, *z*), *т.е. в области* (*V*), *существует функция u* (*M*) = *u* (*x*, *y*, *z*) *такая, что du = Pdx + Qdy + Rdz . При этом для любой кусочно-гладкой кривой AB, лежащей в области* (*V*), *имеет место равенство*:

Репозиторий ВГУ

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = u(B) - u(A); \qquad (3.12)$$

4) в области (V) выполняются равенства

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Доказательство. Доказательство будем проводить по схеме $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$. Утверждения $1 \to 2$, $2 \to 3$, $3 \to 4$ доказываются аналогично утверждениям соответствующей теоремы для криволинейного интеграла второго рода на плоскости.

Докажем, что из условия 4 следует условие 1.

Пусть L – произвольная замкнутая кусочно-гладкая кривая, лежащая в области (V). Так как (V) поверхностно-односвязная область, то в данной области существует кусочно-гладкая поверхность Φ, границей которой является кривая L. Тогда, по формуле Стокса (3.11) и из условия 4 имеем

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_{\Phi} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \cdot \cos X + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \cdot \cos Y + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \cdot \cos Z\right) dS = 0.$$

3.6. Формула Остроградского-Гаусса

Пусть Φ – замкнутая кусочно-гладкая, полная, двусторонняя поверхность, ограничивающая некоторую область (V) пространства. Справедлива следующая теорема.

***Теорема* 3.4.** *Пусть функции* $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ *дифференцируемы в области* (V) *и на ее границе* Φ. *Тогда справедлива следующая формула*

$$\iint_{\Phi} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz, \quad (3.13)$$

где на поверхности Φ *выбрана внешняя сторона.*

Формула (3.13) называется ***формулой Остроградского-Гаусса.***

Пример 4. С помощью формулы Остроградского-Гаусса найти поверхностный интеграл $\iint_{\Phi} xdydz + ydxdz + zdxdy$, где Φ – внешняя сторона тетраэдра, ограниченного плоскостью $x + y + z = 1$ и координатными плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Репозиторий ВГУ

Решение. Воспользуемся формулой (3.13), где $P(x, y, z) = x$, $Q(x, y, z) = y$, $R(x, y, z) = z$. Тогда $P'_x = 1$, $Q'_y = 1$, $R'_z = 1$. Область V, по которой находится тройной интеграл – это область, ограниченная поверхностью тетраэдра $AOBC$ (рис.6).

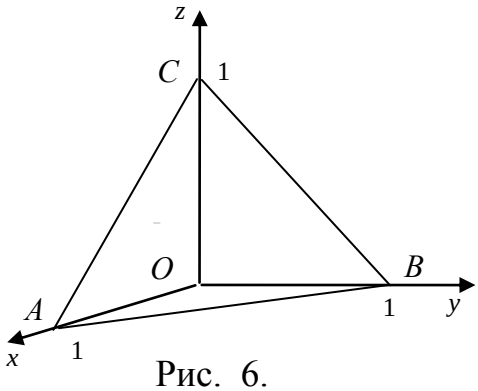

Рис. 6.

$$I = \iint\limits_{\Phi} xdydz + ydxdz + zdxdy =$$
$$= \iiint\limits_{V} (1+1+1)dxdydz =$$
$$= 3\iiint\limits_{V} dxdydz = 3V_т,$$

где $V_т$ – объем тетраэдра, высота которого $OC = 1$, основанием служит прямоугольный треугольник AOB с катетами $AO = 1$, $OB = 1$. $V_т = \frac{1}{3} OC \cdot S_{\Delta AOB} = \frac{1}{6}$. Следовательно, $I = \frac{1}{2}$.

Пример 5. С помощью формулы Остроградского-Гаусса найти поверхностный интеграл $\iint\limits_{\Phi} x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$, где Φ –внешняя часть конуса $z^2 = x^2 + y^2$ $(0 \le z \le h)$.

Решение. Формула Остроградского-Гаусса применяется для замкнутых поверхностей, поэтому, присоединим к поверхности конуса часть плоскости $z = h$ $(x^2 + y^2 \le h^2)$. Назовем эту поверхность Φ_1. Тогда по формуле (3.13):

$$\iint\limits_{\Phi} x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy + \iint\limits_{\Phi_1} x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy =$$
$$= \iiint\limits_{V} (2x + 2y + 2z)dxdydz,$$

или

$$\iint\limits_{\Phi} x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy = \iiint\limits_{V} (2x + 2y + 2z)dxdydz -$$
$$- \iint\limits_{\Phi_1} x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy.$$

Для нахождения тройного интеграла перейдем к цилиндрическим координатам: $x = r\cos\varphi$, $x = r\sin\varphi$, $z = z$. Уравнение части конуса в цилиндрических координатах примет вид: $z = r$, уравнение плоскости: $z = h$. Тогда новые переменные в области V_1 изменяются в следующих пределах: $0 \le r \le h$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $r \le z \le h$. Тогда

$$\iiint\limits_{V} (2x + 2y + 2z)dxdydz = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dr \int_r^h (r\cos\varphi + r\sin\varphi + z)rdz =$$

Репозиторий ВГУ

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \left((\cos\varphi + \sin\varphi) r^2 z + \frac{z^2}{2} r \right)\Bigg|_r^h dr =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \left((\cos\varphi + \sin\varphi)(hr^2 - r^3) + \frac{h^2 r - r^3}{2} \right) dr =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \left(\cos\varphi + \sin\varphi)(h\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4}) + \frac{h^2}{4} r^2 - \frac{r^4}{8} \right)\Bigg|_0^h d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \left((\cos\varphi + \sin\varphi)\frac{h^4}{12} + \frac{h^4}{8} \right) d\varphi = \left(\frac{h^4}{6}\left(\sin\varphi - \cos\varphi) + \frac{h^4}{4}\varphi \right) \right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{h^4\pi}{2}.$$

Найдем поверхностный интеграл второго рода по верхней стороне поверхности Φ_1, единичный вектор нормали к которой: $\bar{n}(0, 0\,1)$.

$$\iint_{\Phi_1} x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy = \iint_{\Phi_1} (x^2 \cos X + y^2 \cos Y + z^2 \cos Z) dS =$$

$$= \iint_{\Phi_1} z^2 dS = \iint_{\Phi_1} h^2 dxdy = \pi h^4$$

Итак, $\iint_{\Phi} x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy = \frac{h^4\pi}{2} - \pi h^4 = -\frac{h^4\pi}{2}$.

IV. СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

4.1. Понятие скалярного поля. Поверхность уровня скалярного поля

Определение* 4.1.** *Пусть D – некоторая область на плоскости или в пространстве. Предположим, что в каждой точке $M \in D$ задана скалярная функция $u(M, t)$, где t – время. В этом случае говорят, что в этой области задано* ***скалярное поле $u = u(M, t)$.

Если скалярное поле зависит от времени, то такое поле называется ***нестационарным***. Если же скалярное поле зависит только от выбора точки M области D, то поле называется ***стационарным***.

Мы будем рассматривать стационарные поля, определенные в пространстве, хотя все выкладки, приведенные далее, будут справедливы и для полей на плоскости, а также для нестационарных полей (нестационарное поле можно рассматривать как стационарное поле, определенное в пространстве R^4).

Скалярные поля описывают такие физические величины, которые полностью характеризуются своим числовым значением. Например, это может быть температура точек неравномерно нагретого тела,

Репозиторий ВГУ

плотность распределения электрических зарядов в изолированном наэлектризованном теле, потенциал электрического поля и так далее.

Область D, в которой определена функция $u(M)$, может совпадать со всем пространством, а может являться некоторой его частью.

Если в пространстве задана система координат $Oxyz$, то задание точки M в области D равносильно заданию координат x, y, z этой точки, тогда поле $u(M)$ можно рассматривать, как функцию трех переменных: $u = u(x, y, z)$.

Определение* 4.2. *Поверхностью уровня скалярного поля *называется геометрическое место точек, в которых скалярное поле* $u(M)$ *принимает постоянное значение*: $u(M) = C$.

Если функция $u(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные по всем переменным, которые одновременно не равны нулю, то поверхностью уровня скалярного поля является гладкая поверхность в пространстве, заданная уравнением $u(x, y, z) = C$.

Отметим, что через каждую точку области D проходит единственная поверхность уровня. Поверхности уровня скалярного поля между собой не пересекаются.

Замечание. Поверхности уровня для скалярных полей на плоскости называются ***линиями уровня*** и задаются уравнениями $u(x, y) = C$.

Пример 1. Найти поверхность уровня скалярного поля $u = 2x^2 - 3y^2 + 16x - 18y - 12z + 43$, проходящую через точку $M(-1, 1, 1)$.

Решение. Совокупность поверхностей уровня данного поля определяется уравнением

$$2x^2 - 3y^2 + 16x - 18y - 12z + 43 = C.$$

Определим значение постоянной C для поверхности уровня, проходящей через точку M. Для этого подставим координаты точки в левую часть равенства: $2(-1)^2 - 3\cdot 1^2 + 16(-1) - 18\cdot 1 - 12\cdot 1 + 43 = C$, или $C = -4$. Следовательно, искомая поверхность задается уравнением

$$2x^2 - 3y^2 + 16x - 18y - 12z + 43 = -4,$$

или $2x^2 - 3y^2 + 16x - 18y - 12z + 47 = 0$.

Выделяя полные квадраты в левой части уравнения получаем:

$$\frac{(x+4)^2}{3} - \frac{(y+3)^2}{2} = 2(z - \frac{7}{2}).$$

Таким образом, поверхность уровня скалярного поля, проходящая через точку M, является гиперболическим параболоидом.

Репозиторий ВГУ

4.2. Производная по направлению и градиент скалярного поля

Важной характеристикой скалярного поля является скорость изменения поля в заданном направлении, или производная по направлению.

Пусть в области D пространства задано скалярное поле $u = u\,(M)$. Рассмотрим точку $M_0 \in D$ и единичный вектор $\vec{e}$, задающий направление в точке M_0. Выберем точку $M \in D$ таким образом, чтобы вектор $\overrightarrow{M_0M}$ был коллиниарен вектору $\vec{e}$.

Определение* 4.3. *Производной скалярного поля u (M) по направлению *вектора* $\vec{e}$ *в точке* M_0 *называется предел* $\lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{\Delta u}{\rho}$, *где* $\Delta u = u\,(M) - u\,(M_0)$ *– приращение поля* $u\,(M)$ *в точке* M_0, $\rho = \rho\,(M, M_0)$ *– расстояние между точками* M_0 *и* M.

Обозначение: $\dfrac{\partial u}{\partial e} = \lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{\Delta u}{\rho}$.

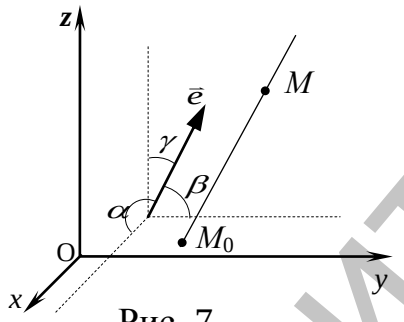

Рис. 7

Если в пространстве задана декартова система координат, то единичный вектор $\vec{e}$ имеет координаты $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где α, β, γ – углы, образованные вектором с положительными направлениями координатных осей OX, OY, OZ соответственно (рис.7). Скалярное поле задается скалярной функцией $u = u\,(x, y, z)$. Тогда понятие производной по направлению скалярного поля совпадает с понятием производной по направлению скалярной функции $u\,(x, y, z)$ и в случае, если функция u дифференцируема, может быть найдено по формуле

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial e} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\cos\gamma. \quad (4.1)$$

***Замечание* 1.** Если точка M_0 фиксирована, то величина производной $\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial e}$ будет зависеть только от направления вектора $\vec{e}$.

***Замечание* 2.** Если направление вектора $\vec{e}$ совпадает с положительным направлением оси OX, то есть $\vec{e}\,(1, 0, 0)$, то производная по направлению этого вектора в точке M_0 равна частной производной функции $u\,(x, y, z)$ по переменной x: $\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial e} = \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial x}$.

Репозиторий ВГУ

Аналогично, если направление вектора $\vec{e}$ совпадает с положительным направлением оси *OУ*, то $\frac{\partial u(M_0)}{\partial e} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}$;

если направление вектора $\vec{e}$ совпадает с положительным направлением оси *OZ*, то $\frac{\partial u(M_0)}{\partial e} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}$.

***Замечание* 3.** Подобно тому, как частные производные u'_x, u'_y и u'_z характеризуют скорость изменения функции *u* в направлении осей координат, так и производная по направлению вектора $\vec{e}$ будет являться скоростью изменения функции *u* (*x*, *y*, *z*) в точке M_0 по направлению вектора $\vec{e}$. Абсолютная величина производной $\frac{\partial u(M_0)}{\partial e}$ определяет величину скорости, а знак производной – характер изменения функции *u* (ее возрастание или убывание).

Вектор $\vec{g}(M) = \frac{\partial u(M)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u(M)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u(M)}{\partial z}\vec{k}$ называется ***градиентом скалярного поля*** *u* = *u* (*x*, *y*, *z*).

Обозначение: grad *u* (*M*) = $\vec{g}(M)$.

Следовательно,

$$\text{grad } u(M) = \frac{\partial u(M)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u(M)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u(M)}{\partial z}\vec{k}. \qquad (4.2)$$

Координаты вектора grad *u* зависят от выбора точки *M* (*x*, *y*, *z*) и изменяются с изменением координат этой точки.

Учитывая формулы (4.1) и (4.2), получим

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial e} = \text{grad } u(M_0) \cdot \vec{e}, \qquad (4.3)$$

где $grad\ u(M_0) \cdot \vec{e}$ – скалярное произведение векторов grad $u(M_0)$ и $\vec{e}$.

Так как скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно найти по формуле: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$, где φ – угол между этими векторами, а $|\vec{e}|$ = 1, получим $\frac{\partial u(M_0)}{\partial e} = |\text{grad } u(M_0)| \cdot \cos\varphi$.

Отсюда сразу следует, что производная по направлению достигает наибольшего значения, когда $\cos\varphi = 1$, то есть при $\varphi = 0$. Это наибольшее значение равно |grad *u*|.

Итак, grad $u(M_0)$ – это вектор, указывающий направление наибольшего роста скалярного поля *u* (*x*, *y*, *z*), а |grad *u*| равен значению

Репозиторий ВГУ

производной скалярного поля u в данном направлении. Ясно, что в противоположном направлении поле u будет быстрее всего убывать.

Замечание. Направление градиента скалярного поля $u\ (x, y, z)$ в каждой точке совпадает с направлением вектора нормали к поверхности уровня скалярного поля, проходящей через эту точку.

Укажем теперь некоторые свойства градиента функции, часто облегчающие его вычисление:

1) $\operatorname{grad}(u_1+u_2) = \operatorname{grad} u_1 + \operatorname{grad} u_2$,

2) $\operatorname{grad}(Cu) = C\cdot\operatorname{grad} u$, где C – постоянная,

3) $\operatorname{grad}(u_1u_2) = u_2\cdot \operatorname{grad} u_1 + u_1\cdot\operatorname{grad} u_2$,

4) $\operatorname{grad} f(u(x, y, z)) = \dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\operatorname{grad} u$.

Пример 2. 1) Найти производную поля $u = x^2y - 3xyz + xz^2y^2$ в точке $M(1, 2, -1)$ по направлению вектора $\vec{e}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. 2) Установить характер изменения поля в данной точке (возрастает оно или убывает). 3) Найти величину и направление наибольшего роста функции в точке M.

Решение. 1) Найдем частные производные функции u в точке $M(1, 2, -1)$.

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x} = (2xy - 3yz + z^2y^2)_M = 14,$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x} = (x^2 - 3xz + 2x\,z^2y)_M = 8,$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x} = (-3xy + 2xzy^2)_M = -14.$$

Вектор $\vec{e}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ – единичный. Следовательно, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\gamma = \frac{1}{2}$. Тогда по формуле (4.2) получим

$$\frac{\partial u(M)}{\partial e} = 14\cdot\frac{1}{2} + 8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 14\cdot\frac{1}{2} = 4\sqrt{2}.$$

2) Так как $\dfrac{\partial u(M)}{\partial e} > 0$, то поле $u(M)$ возрастает в данном направлении.

3) Как сказано выше, производная поля $u(M)$ в точке M будет наибольшей в направлении вектора

Репозиторий ВГУ

$$\text{grad}\, u(M) = \frac{\partial u(M)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u(M)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u(M)}{\partial z}\vec{k},$$

т.е. вектора grad $u(M)$ = (14, 8, –14). Длина этого вектора и есть наибольшее значение производной по направлению в точке M. Следовательно, $\left.\frac{\partial u(M)}{\partial e}\right|_{\max} = |\text{grad}\, u(M)| = \sqrt{14^2 + 8^2 + (-14)^2} = 2\sqrt{114}$.

4.3. Векторные поля. Векторные линии

Рассмотрим некоторую область D в пространстве.

Определение* 4.4.** *Если в каждой точке M области D задан определенный вектор* $\vec{p}(M, t)$, *то будем говорить, что в этой области задано* ***нестационарное векторное поле.

Если вектор $\vec{p}$ не зависит от времени t, то поле называется ***стационарным.***

Мы будем рассматривать стационарные векторные поля.

Если в пространстве задана декартова система координат, то $M \in D$ имеет координаты (x, y, z), значит, и вектор $\vec{p}(M)$ можно задать следующим образом:

$$\vec{p}(M) = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\,\vec{j} + R(x, y, z)\,\vec{k}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что функции $P(x, y, z)$, $Q(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, $R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными.

Рассмотрим некоторые примеры векторных полей.

1. Поле скоростей текущей жидкости. Пусть некоторая область пространства заполнена несжимаемой жидкостью, которая перемещается под воздействием постоянной во времени силы. Тогда каждой точке M данной области ставится в соответствие вектор скорости $\vec{v}(M)$. Следовательно, в рассматриваемой области задано векторное поле $\vec{v}(M)$.

2. Поле тяготения. Пусть в некоторой точке пространства помещена материальная точка M_0 массой m_0, тогда вокруг этой точки создается поле тяготения или гравитационное поле, действие которого состоит в том, что на каждую материальную точку M массой m, находящуюся на расстоянии r от точки M_0, действует сила тяготения $\vec{F}(M) = \gamma\frac{m \cdot m_0}{r^3}\vec{r}$, зависящая от положения точки M в пространстве (вектор $\vec{r} = \overline{M_0M}$)

Репозиторий ВГУ

3. Электростатическое поле. Пусть в некоторой точке M_0 пространства помещен заряд q_0, тогда на единичный заряд q, помещенный в некоторую точку M пространства, находящуюся на расстоянии r от точки M_0, действует сила $\vec{E}(M) = k\frac{q_0}{r^3}\vec{r}$, где r – расстояние между точками M_0 и M, вектор $\vec{r} = \overline{M_0M}$. Сила $\vec{E}(M)$ называется напряженностью электростатического поля.

Определение* 4.5. *Векторной или силовой линией *векторного поля* $\vec{p}(M)$ *называется линия, в каждой точке M которой вектор* $\vec{p}(M)$ *направлен по касательной к этой линии* (рис. 8).

Векторные линии в конкретных полях имеют ясный физический смысл. Так, если мы рассматриваем поле скоростей текущей жидкости, то векторные линии суть линии тока этой жидкости, то есть линии, по которым движутся частицы жидкости. В электрическом поле векторные линии суть силовые линии этого поля. Например, в поле точечного заряда такими линиями будут лучи, выходящие из заряда. Для магнитного поля векторными (силовыми) линиями будут линии выходящие из северного полюса и оканчивающиеся в южном.

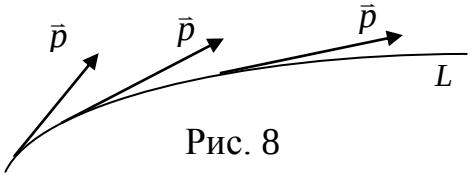

Рис. 8

Выведем уравнения векторных линий.

Пусть в некоторой области D задано векторное поле

$$\vec{p}(M) = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, y, z)\,\vec{j} + R(x, y, z)\,\vec{k}.$$

Если векторная линия поля $\vec{p}(M)$ задана с помощью векторной функции $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)$, то направляющим вектором касательной к этой линии в произвольной точке t является вектор $\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$, или вектор $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$. Но, по определению, вектор $\vec{p}(M)$ также направлен по касательной к линии $\vec{r}(t)$, значит вектора $d\vec{r}$ и $\vec{p}(M)$ параллельны. Из условия параллельности векторов следует:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}. \qquad (4.4)$$

Система дифференциальных уравнений (4.4) задает семейство векторных линий поля $\vec{p}(M)$.

Пример 3. Найти векторные линии поля

$$\vec{p}(M) = (y + z)\vec{i} - x\vec{j} - x\vec{k}$$

Репозиторий ВГУ

Решение. Составим систему $\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{-x}$. Ее можно записать в виде $\begin{cases} \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{-x}, \\ \frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{-x}. \end{cases}$ Из первого уравнения системы имеем $dy = dz$, т.е. $y = z + C_1$.

Рассмотрим второе уравнение $\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{-x}$, или $-xdx = y\,dy + zdy$. Учитывая первое уравнение системы, получим: $xdx + y\,dy + zdz = 0$. Общий интеграл этого уравнения: $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$.

Значит векторные линии поля $\vec{p}\,(M)$ определяются системой уравнений $\begin{cases} y = z + C_1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = C_2 \end{cases}$ и являются линиями пересечения плоскостей $y = z + C_1$ и сфер $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$.

Определение* 4.6.** *Часть пространства, ограниченная поверхностью Ф, называется* ***векторной трубкой, *если в каждой точке поверхности Ф вектор нормали к поверхности направлен перпендикулярно векторной линии векторного поля* $\vec{p}\,(M)$.

Векторная трубка – часть пространства, состоящая из целых векторных линий, каждая из которых или целиком лежит внутри векторной трубки или целиком находится вне ее.

4.4. Поток векторного поля

Рассмотрим некоторую область D в пространстве. Пусть в этой области задано векторное поле $\vec{p}\,(M)$

$$\vec{p}\,(M) = P\,(x, y, z)\,\vec{i} + Q\,(x, y, z)\,\vec{j} + R\,(x, y, z)\,\vec{k}\,.$$

Возьмем в этом поле некоторую поверхность Φ и выберем на ней сторону, определенную единичным вектором нормали $\vec{n}$.

Определние* 4.7. *Потоком векторного поля $\vec{p}\,(M)$ *через поверхность Ф в сторону, определяемую вектором нормали* $\vec{n}$ *называется интеграл*

$$\Pi = \iint\limits_{\Phi} \vec{p}(M) \cdot \vec{n}\, dS\,. \qquad (4.5)$$

Если в пространстве задана декартова система координат, то вектор $\vec{n}$ имеет координаты $(\cos X, \cos Y, \cos Z)$, вектор $\vec{p}\,(M) = (P\,(x, y, z), Q\,(x, y, z)\,, R\,(x, y, z)\,)$, тогда

Репозиторий ВГУ

$$\Pi = \iint\limits_{\Phi} (P\cos X + Q\cos Y + R\cos Z)dS$$

или

$$\Pi = \iint\limits_{\Phi} Pdydz + Qdxdz + R\,dxdy\,. \qquad (4.6)$$

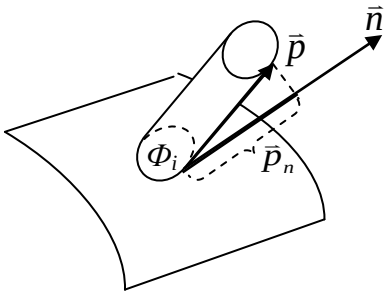

Рис 8.

Физический смысл этой величины раскроем на следующем примере. Надо найти объем жидкости постоянной плотности, протекающей через поверхность Φ в единицу времени. Разобьем поверхность Φ на достаточно малые части Φ_i площадью dS_i. В некоторой точке $M_i \in \Phi$, вектор нормали к поверхности в сторону тока жидкости есть вектор $\vec{n}\,(M_i)$. Пусть вектор $\vec{p}\,(M)$ – вектор скорости текущей жидкости в произвольной точке $M \in \Phi_i$. Если часть Φ_i достаточно мала, то ее можно рассматривать, как часть плоскости с вектором нормали $\vec{n}\,(M_i)$, а вектор $\vec{p}\,(M)$ считать постоянным и равным $\vec{p}\,(M_i)$. Через площадку Φ_i за единицу времени протечет количество жидкости, которое заполнит собой цилиндр с основанием Φ_i, образующей $|\vec{p}\,(M_i)|$ и высотой $\vec{p}_n\,(M_i)$, где $\vec{p}_n\,(M_i)$ – проекция вектора $\vec{p}\,(M_i)$ на $\vec{n}\,(M_i)$. Объем этого цилиндра равен $\vec{p}_n\,(M_i)\,dS_i = \vec{p}\,(M_i)\cdot\vec{n}\,(M_i)\,dS_i$. Тогда объем жидкости, протекающей через площадку Φ_i за единицу времени, равна $V_i \approx \vec{p}\,(M_i)\cdot\vec{n}\,(M_i)\,dS_i$. Для всей поверхности Φ получим:

$$V = \iint\limits_{S} \vec{p}(M)\cdot\vec{n}\,dS\,.$$

Рассмотрим поток векторного поля через замкнутую поверхность в направлении внешнего вектора нормали. При этом, если $\Pi > 0$, то объем вытекающей жидкости больше, чем объем втекающей, если $\Pi < 0$, то наоборот, втекает жидкости больше чем вытекает. В первом случае внутри поверхности существуют источники векторного поля, во втором – стоки.

4.5. Дивергенция векторного поля

Пусть замкнутая поверхность Φ ограничивает некоторую область D в пространстве, содержащую точку M. Объем области D равен V. Рассмотрим векторное поле $\vec{p}(M)$, определенное в области D и

Репозиторий ВГУ

на ее границе Φ. Вычислим поток вектора $\vec{p}(M)$ через поверхность Φ и найдем отношение этого потока к объему V:

$$\frac{\iint\limits_{\Phi} \vec{p}(M)\cdot\vec{n}\,dS}{V}$$

В поле скоростей жидкости это отношение определяет количество жидкости, вытекающей в единицу времени из области, ограниченной поверхностью Φ, отнесенное к единице объема, то есть, как говорят, среднюю объемную мощность источника (если поток через внешнюю сторону поверхности Φ меньше нуля, то соответственно говорят о мощности стока и о количестве втекающей в область жидкости).

Будем стягивать поверхность Φ в точку M и рассмотрим предел:

$$\lim_{V\to 0}\frac{\iint\limits_{\Phi} \vec{p}(M)\cdot\vec{n}\,dS}{V} \qquad (4.7)$$

Если этот предел положителен, то точка M называется ***источником***, а если отрицателен, то ***стоком*** векторного поля. Сама величина предела характеризует мощность источника или стока.

Определение* 4.8. *Дивергенцией *векторного поля* $\vec{p}(M)$ *в точке M называется предел* (4.7).

Дивергенцию поля обозначают символом div $\vec{p}(M)$.

Таким образом,

$$\operatorname{div}\vec{p}(M) = \lim_{V\to 0}\frac{\iint\limits_{\Phi} \vec{p}(M)\cdot\vec{n}\,dS}{V}, \qquad (4.8)$$

где предел вычисляется при условии, что поверхность Φ стягивается в точку M.

Пусть в пространстве введена декартова система координат. Тогда имеет место следующая теорема.

***Теорема* 4.1.** Пусть в некоторой области D пространства определено дифференцируемое векторное поле $\vec{p}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Тогда дивергенцию поля $\vec{p}(M)$ в произвольной точке M можно найти по формуле

$$\operatorname{div}\vec{p}(M) = \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z}. \qquad (4.9)$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $M \in D$. Тогда, по теореме Остроградского-Гаусса, поток векторного поля через

Репозиторий ВГУ

внешнюю сторону любой замкнутой поверхности, окружающей точку M, находится по формуле

$$\int_{\Phi} \vec{p}\,(M)\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz\,,$$

где (V) – тело, ограниченное поверхностью Φ, объем которого равен V.

Тогда по теореме о среднем, существует такая точка $N \in (V)$, что тройной интеграл, стоящий в правой части равенства, равен произведению объема V на значение подынтегральной функции в точке N:

$$\iiint_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \left(\frac{\partial P(N)}{\partial x}+\frac{\partial Q(N)}{\partial y}+\frac{\partial R(N)}{\partial z}\right)\cdot V\,.$$

При этом, если поверхность Φ стягивается в точку M и $V \to 0$, то $N \to M$. Тогда, по определению дивергенции векторного поля, получаем

$$\operatorname{div}\ \vec{p}(M) = \lim_{V\to 0}\frac{\iint\limits_{\Phi}\vec{p}(M)\cdot\vec{n}\,dS}{V} = \lim_{N\to M}\left(\frac{\partial P(N)}{\partial x}+\frac{\partial Q(N)}{\partial y}+\frac{\partial R(N)}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial P(M)}{\partial x}+\frac{\partial Q(M)}{\partial y}+\frac{\partial R(M)}{\partial z}\,.\blacksquare$$

Пользуясь формулой (4.9), теорему Остроградского-Гаусса можно сформулировать в векторной форме следующим образом.

***Теорема* 4.2.** *Поток дифференцируемого векторного поля* $\vec{p}(M)$ *через замкнутую поверхность Ф равен тройному интегралу по области, ограниченной этой поверхностью от дивергенции векторного поля* $\vec{p}(M)$

$$\Pi = \iint_{\Phi}\vec{p}(M)\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_{V}\operatorname{div}\ \vec{p}(M)\,dV\,. \qquad (4.10)$$

Векторная форма теоремы Остроградского выражает в поле текущей жидкости тот очевидный факт, что поток жидкости через поверхность равен суммарной мощности всех источников и стоков, расположенных в области, ограниченной данной поверхностью, то есть количеству жидкости, возникающей в рассматриваемой области за единицу времени Если, в частности, дивергенция во всех точках равна нулю, то равен нулю и поток через любую замкнутую поверхность.

Репозиторий ВГУ

Пример 4. Найти поток векторного поля $\vec{p}(M) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ через внешнюю сторону тетраэдра *ABCO*, если *A* (1, 0, 0), *B* (0, 1, 0), *O* (0, 0, 1), *C* (0, 0, 0).

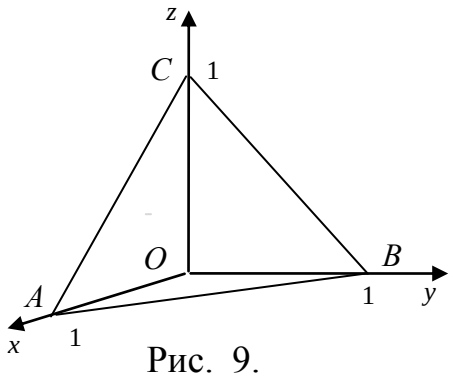

Рис. 9.

Решение. Так как тетраэдр является замкнутой поверхностью, то поток вектора $\vec{p}(M)$ можно найти по формуле (4.10):

$$\Pi = \iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{p}(M)\, dV,$$

где тройной интеграл находится по области (*V*), ограниченной плоскостями $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $x + y + z = 1$.

Найдем дивергенцию поля $\vec{p}(M)$:

$$\operatorname{div} \vec{p}\,(M) = \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z} = 2x + 2y + 2z.$$

Тогда

$$\Pi = \iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{p}(M)\, dV = \iiint\limits_V (2x + 2y + 2z)\, dV =$$

$$= 2\iint\limits_D dxdy \int\limits_0^{1-x-y} (x + y + z)dz = 2\iint\limits_D \left((x + y)z + \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_0^{1-x-y} dxdy =$$

$$= 2\iint\limits_D \frac{1}{2}(1 - (x + y)^2)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1 - (x + y)^2)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(y - \frac{(x + y)^3}{3} \right)\Bigg|_0^{1-x} dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{2}{3} - x + \frac{x^3}{3} \right) dx = \left(\frac{2}{3}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

4.6. Соленоидальные поля

Определение* 4.9.** *Векторное поле* $\vec{p}(M)$, *дивергенция которого тождественно равна нулю называется* ***соленоидальным или трубчатым.

Примером соленоидального поля может служить поле скоростей несжимаемой жидкости при отсутствии источников и стоков.

Свойства соленоидальных полей.

1. Рассмотрим область *D*, которая является объемно односвязной. Пусть в области *D* определено соленоидальное векторное поле $\vec{p}(M)$. Тогда, так как во всех точках $M \in D$ дивергенция поля $\vec{p}(M)$ равна нулю, то по формуле Остроградского-Гаусса, поток векторного поля через внешнюю сторону любой замкнутой поверхности тоже равен нулю.

Репозиторий ВГУ

2. Для соленоидальных полей имеет место так называемый ***закон интенсивности векторной трубки***, состоящий в следующем.

Рассмотрим часть такой трубки, ограниченную сечениями S_1 и S_2. Эти сечения вместе с боковой поверхностью векторной трубки Φ_0 образуют замкнутую поверхность Φ. Тогда для потока векторного поля через внешнюю сторону поверхности Ф выполняется равенство:

$$\Pi = \iint_{\Phi} \vec{p}(M) \cdot \vec{n}\, dS = 0$$

или

$$\Pi = \iint_{\Phi_0} \vec{p}(M) \cdot \vec{n}\, dS + \iint_{S_1} \vec{p}(M) \cdot \vec{n}\, dS + \iint_{S_2} \vec{p}(M) \cdot \vec{n}\, dS .$$

Первое слагаемое равно нулю, так как по определению векторной трубки на поверхности Φ_0 вектор нормали $\vec{n}$ перпендикулярен вектору $\vec{p}(M)$. Тогда, если на сечении S_1 поменяем направление вектора нормали, получим:

$$\iint_{S_1} \vec{p}(M) \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{S_2} \vec{p}(M) \cdot \vec{n}\, dS . \qquad (4.11)$$

Таким образом, поток векторного поля $\vec{p}(M)$ через любое сечение векторной трубки имеет одно и то же значение.

В случае поля скоростей несжимаемой жидкости равенство (4.11) означает, что через каждое сечение векторной трубки за единицу времени проникает одно и то же количество жидкости.

4.7. Циркуляция и ротор векторного поля

Рассмотрим векторное поле $\vec{p}(M) = (P, Q, R)$, определенное в некоторой области D Тогда интеграл

$$\int_l Pdx + Qdy + Rdz = \int_l \vec{p}(M) \cdot \vec{\tau} dl , \qquad (4.12)$$

взятый по некоторой гладкой или кусочно гладкой кривой l, с направляющим вектором $\vec{\tau}$, лежащей в этой области называется ***линейным интегралом*** вектора $\vec{p}(M)$ вдоль кривой l.

Если поле $\vec{p}(M)$ есть силовое поле, то линейный интеграл равен работе векторного поля по перемещению точки вдоль кривой l.

В случае замкнутой кривой, интеграл (4.12) называется ***циркуляцией векторного поля*** $\vec{p}(M)$.

Рассмотрим некоторую поверхность Φ, ограниченную замкнутым контуром l. Выберем на поверхности определенную сторону, т.е. укажем на поверхности непрерывное поле единичных нормалей

Репозиторий ВГУ

$\vec{n}(\cos X,\ \cos Y,\ \cos Z)$. Предположим, что контур l ориентирован положительно относительно выбранной стороны поверхности. Тогда по формуле Стокса (3.11):

$$\oint_l Pdx + Qdy + Rdz = \oint_l \vec{p}(M)\cdot\vec{\tau}dl =$$

$$= \iint_{\Phi} ((\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\cdot\cos X + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\cdot\cos Y + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\cdot\cos Z)dS .$$

***Определение* 4.10.** *Вектор с координатами*

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \qquad (4.13)$$

называется ***ротором векторного поля*** $\vec{p}(M)$ *и обозначается символом* $\mathrm{rot}\,\vec{p}(M)$**.**

Таким образом, векторная форма записи формулы Стокса имеет вид:

$$\oint_l \vec{p}(M)\cdot\vec{\tau}dl = \iint_{\Phi} \mathrm{rot}\ \vec{p}(M)\cdot\vec{n}dS . \qquad (4.14)$$

Следовательно, поток ротора векторного поля $\vec{p}(M)$ через поверхность Φ в сторону, определенную вектором нормали $\vec{n}$, равен циркуляции этого векторного поля по границе этой поверхности.

Введем определение ротора векторного поля, не зависящее от выбора системы координат. Рассмотрим произвольную точку $M \in D$. Зададим с помощью некоторого вектора $\vec{n}$ направление в этой точке и рассмотрим плоскость перпендикулярную этому вектору. На плоскости построим контур l, окружающий точку M. Обозначим через S площадь области Φ, ограниченной данным контуром. Воспользуемся формулой (4.14), разделив обе части равенства на площадь S:

$$\frac{\oint_l \vec{p}(M)\cdot\vec{\tau}dl}{S} = \frac{\iint_{\Phi} \mathrm{rot}\ \vec{p}(M)\cdot\vec{n}dS}{S} .$$

Применим к поверхностному интегралу, стоящему в данном равенстве теорему о среднем, получим

$$\mathrm{rot}\,\vec{p}(N)\cdot\vec{n} = \frac{\oint_l \vec{p}(M)\cdot\vec{\tau}dl}{S} ,$$

где точка N – некоторая точка принадлежащая площадке Φ. Будем стягивать площадку Φ в точку M так, чтобы направление вектора нормали оставалось одним и тем же. Учитывая, что

Репозиторий ВГУ

$\operatorname{rot}\vec{p}(N)\cdot\vec{n} = (\operatorname{rot}\vec{p}(N))_n$ – проекция вектора $\operatorname{rot}\vec{p}(N)$ на вектор $\vec{n}$, и перейдя к пределу при $M \to N$, получим

$$(\operatorname{rot}\vec{p}(M))_{\vec{n}} = \lim_{S\to 0}\frac{\oint\limits_l \vec{p}(M)\cdot\vec{\tau}dl}{S}\ . \qquad (4.15)$$

Циркуляция вектора $\vec{p}(M)$ вдоль контура l не зависит от выбора системы координат, а, следовательно, от выбора системы координат не зависит и проекция $\operatorname{rot}\vec{p}(M)$ на направление нормали $\vec{n}$. Но направление вектора $\vec{n}$ мы можем выбрать произвольно, поэтому проекция вектора $\operatorname{rot}\vec{p}(M)$ на любое направление, а следовательно, и сам вектор не зависят от выбора системы координат.

Физический смысл ротора.

1. Рассмотрим вращение некоторого твердого тела (V) вокруг неподвижной точки O. Введем произвольную декартову систему координат O_{xyz}. Тогда в произвольный момент времени t поле $\vec{v}$ скоростей точек данного тела определяется формулой $\vec{v} = [\vec{\omega}\cdot\vec{r}]$, где $\vec{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$– мгновенная угловая скорость произвольной точки $M \in (V)$, а $\vec{r}\,(x, y, z)$ – радиус-вектор, соединяющий точку O с данной точкой M. Найдем координаты вектора $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_y z - \omega_z y)\vec{i} + (\omega_z x - \omega z)\vec{j} + (\omega_x y - \omega_y x)\vec{k}\ .$$

Тогда

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \omega_y z - \omega_z y & \omega_z x - \omega_x z & \omega_x y - \omega_y x \end{vmatrix} = 2\omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_y\vec{k} = 2\vec{\omega}.$$

2. Рассмотрим векторное поле $\vec{p}(M) = -y\omega\vec{i} + x\omega\vec{j} + 0\vec{k}$. Это поле можно рассматривать как поле скоростей, отвечающее вращению всего пространства вокруг оси OZ с угловой скоростью $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$. Очевидно, что $\operatorname{rot}\vec{p}(M) = 2\omega\vec{k}$. Таким образом, ротор векторного поля $\vec{p}(M)$ направлен по оси вращения, а по величине равен удвоенной угловой скорости.

Ротор векторного поля является характеристикой вращательной компоненты этого поля. Это нашло отражение в названии: rot – сокращенное английское слово «rotation» – вращение.

Пример 5. Найти циркуляцию векторного поля

Репозиторий ВГУ

$$\vec{p}(M) = (z^2 - x^2)\ \vec{i}\ + (x^2 - y^2)\ \vec{j}\ + (y^2 - z^2)\ \vec{k}$$

по контуру $x^2 + y^2 + z^2 = 8$, $x^2 + y^2 = z^2$ $(z > 0)$, «пробегаемому» по ходу часовой стрелки с точки зрения наблюдателя, находящегося в начале координат.

Решение. Циркуляция векторного поля $\vec{p}(M)$ равна криволинейному интегралу:

$$C = \oint_{\Gamma} (z^2 - x^2)dx + (x^2 - y^2)dy + (y^2 - z^2)dz$$

Контур интегрирования Γ – окружность $x^2 + y^2 = 4$, лежащая в плоскости $z = 2$, полученная в результате пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ с конусом $x^2 + y^2 = z^2$ (рисунок 10). Воспользуемся формулой Стокса (4.14). В качестве поверхности, по которой будем находить поверхностный интеграл, выберем верхнюю сторону круга $x^2 + y^2 \le 4$, лежащего в плоскости $z = 2$. Единичный вектор нормали $\vec{n}$ к выбранной стороне поверхности равен направляющему вектору оси Oz, т.е. $\vec{n} = \vec{k}(0, 0, 1)$.

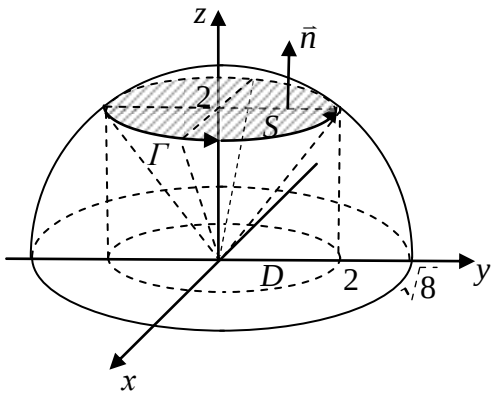

Рис. 10

Найдем ротор векторного поля

$$\text{rot}\ \vec{p}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} =$$

$$= \left(\frac{\partial(y^2 - z^2)}{\partial y} - \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial(z^2 - x^2)}{\partial z} - \frac{\partial(y^2 - z^2)}{\partial x}\right)\vec{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(z^2 - x^2)}{\partial y}\right)\vec{k} = 2y\vec{i} + 2z\vec{j} + 2x\vec{k}.$$

Найдем скалярное произведение векторов rot $\vec{p}(M)$ и $\vec{k}$ rot $\vec{p}(M) \cdot \vec{k} = 2x$. Тогда по формуле (4.14) имеем

$$C = \oint_{\Gamma} (z^2 - x^2)dx + (x^2 - y^2)dy + (y^2 - z^2)dz = \iint_S 2xdS = \iint_D 2xdxdy,$$

где D – круг $x^2 + y^2 = 4$, лежащий в плоскости XOY. Перейдем в данном интеграле к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $0 \le \rho \le 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Получим

Репозиторий ВГУ

$$C = \iint\limits_D 2xdxdy = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^2 \cos\varphi \, d\rho = 2\int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^2 \cos\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{16}{3}\int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi = \frac{16}{3} \sin\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{16}{3} \sin\varphi\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

4.8. Потенциальные векторные поля

Пусть в области D определено некоторое скалярное поле $u\,(M)$, тогда в каждой точке области B определено и векторное поле

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Определение* 4.11.** *Векторное поле* $\vec{p}(M)$ *называется* ***потенциальным*, если существует такое скалярное поле* $u\,(M)$, что $\operatorname{grad} u = \vec{p}(M)$.

В этом случае функцию $u\,(M)$ называют **потенциалом** векторного поля $\vec{p}(M)$.

Замечание. В физике потенциалом часто называют такую функцию $u\,(M)$, что $\vec{p}(M) = -\operatorname{grad} u$.

Примеры потенциальных полей.

1. Пусть в начало координат помещена точечная масса m. Тогда на единичную массу, помещенную в точку $M\,(x, y, z)$ будет действовать сила тяготения $\vec{F}(M) = -\gamma\frac{m}{r^3}\vec{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – расстояние от точки M до начала координат, $\vec{r}\,(x, y, z)$ – радиус-вектор точки M. Скалярная функция $u = -\gamma\frac{m}{r}$ называется ньютоновским потенциалом. Найдем градиент функции u.

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} =$$

$$= \gamma\frac{mx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{i} + \gamma\frac{my}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{j} + \gamma\frac{mz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{k} = \vec{F}(M).$$

Значит, гравитационное поле, создаваемое материальной точкой массой m, является потенциальным.

2. Рассмотрим электростатическое поле, создаваемое точечным зарядом e, помещенным в начало координат. На единичный заряд, помещенный в точку $M\,(x, y, z)$, действует электрическое поле с напряженностью $\vec{E}(M) = k\frac{e}{r^3}\vec{r}$. Очевидно, что для функции $u = k\frac{e}{r}$ вы-

Репозиторий ВГУ

полняется равенство $\vec{E}(M) = -\operatorname{grad} u$. Функция $u = k\dfrac{e}{r}$ называется потенциалом электрического поля.

Рассмотрим некоторую поверхностно-односвязную область (V). Тогда справедлива теорема, аналогичная теореме 3.3

***Теорема* 4.3.** *Пусть в некоторой поверхностно-односвязной области* (V) *задано непрерывно дифференцируемое векторное поле* $\vec{p}(M) = (P, Q, R)$. *Тогда эквивалентны следующие утверждения*

1) *векторное поле* $\vec{p}(M) = (P, Q, R)$ *является потенциальным*;
2) *циркуляция векторного поля по любому замкнутому* (*возможно самопересекающемуся*) *кусочно-гладкому контуру* L, *лежащему в* (V), *равна нулю, т.е.*

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \oint_L \vec{p} \cdot \vec{\tau} dl = 0;$$

3) *выражение* $Pdx + Qdy + Rdz$ *является полным дифференциалом некоторой функции* $u(x, y, z)$, *которая является потенциалом поля* $\vec{p}(M)$. *При этом для любой кусочно-гладкой кривой* AB, *лежащей в области* (V), *имеет место равенство*:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = u(B) - u(A).$$

4) *в области* (V) $\operatorname{rot} \vec{p}(M) = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Ильин В.А., Позняк Э.Т.. Основы математического анализа. Ч.2.– М. Наука. 1980.
2. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов ВЛ. К. Математический анализ. Т.2.– М. Наука. 1979.
3. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т.2. – М. Наука, 1990.

Репозиторий ВГУ

4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.2.– М. Наука. 1989.

Дополнительная литература

5. Гусак А.А., Гусак Г.М, Справочник по высшей математике. Мн. Навука і тэхніка. 1991.
6. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. М. Высшая школа. 1986.
7. Бутузов В.Ф. Математический анализ в вопросах и задачах. М. Физматгиз. 2001.
8. Иванова Ж.В., Сурин Т.Л., Шерегов С.В. Математический анализ. Введение в анализ. Производная. Из-во УО «ВГУ им. П.М. Машерова» 2008.
9. Иванова Ж.В., Сурин Т.Л., Шерегов С.В. Математический анализ. Применение дифференциального исчисления. Интегральное исчисление функции одной преременной. Из-во УО «ВГУ им. П.М. Машерова» 2008.
10. Иванова Ж.В., Сурин Т.Л., Шерегов С.В. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функции многих переменных. Из-во УО «ВГУ им. П.М. Машерова» 2010.

Репозиторий ВГУ