Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»
Кафедра геометрии и математического анализа

Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова, С.В. Шерегов

С Б О Р Н И К ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ А Н А Л И З У.

Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2013

УДК 517.2 (075.8)
ББК 22.161.11я73
С90

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 9 от 20.06.2013 г.

Авторы: доценты кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидаты физико-математических наук **Т.Л.Сурин, Ж.В. Иванова,** старший преподаватель кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова **С.В. Шерегов**

Р е ц е н з е н т:
доцент кафедры геометрии и математического анализа
ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук
С.А. Шлапаков

Сурин, Т.Л.

С90 Сборник практических заданий по математическому анализу. Дифференциальное исчисление функции одной переменной / Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова, С.В. Шерегов. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2013. – 51 с.

Данное издание предназначено для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов первого курса математического факультета, обучающихся по специальностям «Математика и информатика», «Прикладная математика», «Прикладная информатика». Пособие содержит разбор наиболее типичных примеров, демонстрирующих применение на практике результатов теории, вопросы по теоретическому материалу, задания для аудиторной и домашней работы, задания для самостоятельной работы.

УДК 517.2 (075.8)
ББК 22.161.11я73

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

Данное издание предназначено для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов первого курса математического факультета, обучающихся по специальностям «Математика и информатика», «Прикладная математика», «Прикладная информатика».

Основное назначение задачника-практикума – помочь студентам математических специальностей в освоении курса математического анализа. По этой дисциплине существует ряд хороших задачников, список которых приведен в конце пособия. Однако, из–за слишком большого объема в них зачастую трудно ориентироваться и выбрать нужный материал для подготовки к экзамену. Кроме того, имеющиеся сборники задач не дают возможности индивидуализировать процесс обучения, поскольку не содержат достаточного количества однотипных задач.

Пособие охватывает вопросы математического анализа, относящиеся к «Дифференциальному исчислению функции одной переменной». Весь материал разбит на 12 параграфов, что в среднем соответствует количеству часов, предусмотренных учебной программой на проведение практических занятий по данной теме. Каждый параграф состоит из 3 пунктов. В пункте I – «Контрольные вопросы и задания» – содержатся вопросы по теоретическому материалу. Цель этого раздела – помочь студенту самостоятельно разобраться в теоретическом материале, выделить наиболее важные места, без которых невозможно осмысленное решение задач. В пункте II – «Примеры решения задач» – разобраны наиболее типичные примеры, демонстрирующие применение на практике результатов теории. Эти два пункта студенты должны разобрать самостоятельно при подготовке к практическому занятию по данной теме. В пункте III – «Задачи и упражнения для практических занятий» – приведены задания для аудиторной и домашней работы.

В конце практического пособия приведен список задач для индивидуальной работы студентов. Данный список охватывает все разделы пособия и состоит из типичных задач, предлагаемых на экзамене.

Материал, приведенный в пособии, соответствует учебным программам по математическому анализу по вышеперечисленным специальностям.

Пособие может быть полезно для студентов других специальностей, изучающих высшую математику.

ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Что называется приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0?
2. Дайте определение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.
3. Каков геометрический смысл производной? Дайте определение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0,\ f(x_0))$ и напишите уравнение касательной.
4. Каков физический смысл производной функции $y = f(x)$ в точке x_0?
5. Что такое односторонние производные функции в точке? Какова связь между односторонними производными и производной функции в точке? Приведите пример функции, у которой существуют односторонние производные в некоторой точке, но не существует производной в этой точке.
6. Когда говорят, что функция имеет в точке x_0 бесконечную производную?

II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** *Исходя из определения, найти производную функции* $y = x(x^2 - 1)$.

Решение. Найдем приращение $\Delta f(x)$ функции при переходе из точки x в точку $x + \Delta x$. Так как $f(x) = x(x^2 - 1)$, то $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)((x + \Delta x)^2 - 1)$. Тогда $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 - \Delta x + (\Delta x)^3$.

Составим отношение

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3 - \Delta x}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x - 1 + \Delta x^2.$$

По определению:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x - 1 + \Delta x^2) = 3x^2 - 1.$$

***Пример* 2.** *Составить уравнение касательной к графику функции* $y = x \cdot \ln x$, *которая параллельна прямой* $y = x - \dfrac{1}{2}$.

Решение. Угловые коэффициенты параллельных прямых равны. У данной прямой $k = 1$, следовательно, угловой коэффициент искомой касательной тоже равен 1. Из геометрического смысла производной следует, что $k = y'(x_0)$, где x_0 – абсцисса точки касания. Итак,

$y'(x_0) = 1$. Но $y'(x_0) = \ln(x_0) + 1$, откуда $\ln(x_0) + 1 = 1$, $\ln(x_0) = 0$. Решая уравнение, получим $x_0 = 1$. Тогда $y_0 = y(1) = 0$.

Зная точку касания $M_0(1, 0)$ и угловой коэффициент касательной, запишем уравнение касательной по формуле

$$y - y_0 = k(x - x_0), \quad \text{т.е.} \quad y = x - 1.$$

Пример 3. *Определить среднюю скорость движения тела за промежуток времени* $2 \le t \le 2 + \Delta t$, *если закон движения задан формулой* $s = t^2 - t + 1$, *где* t – *время* (*в секундах*), s – *расстояние* (*в метрах*). *Подсчитать среднюю скорость для*: *а*) $\Delta t = 0{,}01$ *сек*; *б*) $\Delta t = 0{,}001$ *сек*; *в*) $\Delta t = 0{,}0001$ *сек*. *Найти мгновенную скорость в момент времени* $t_0 = 2$.

Решение. Известно, что $\upsilon_{ср} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, $\upsilon_{мгн} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

Учитывая, что

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) = ((t + \Delta t)^2 - (t + \Delta t) + 1)) - (t^2 - t + 1) =$$
$$= 2t\Delta t + (\Delta t)^2 - \Delta t = (2t - 1)\Delta t + (\Delta t)^2,$$

получим:

$$\upsilon_{ср} = \frac{(2t - 1)\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = 2t - 1 + \Delta t.$$

Результаты расчётов занесём в таблицу

t	Δt	$2t - 1$	$\upsilon_{ср}$
2	0,1	3	3,1
2	0,01	3	3,01
2	0,001	3	3,001
2	0,0001	3	3,0001

Из рассмотрения таблицы видно, что при $t = 2$ со стремлением Δt к 0 средняя скорость $\upsilon_{ср}$ стремится к скорости равной $\upsilon_{мгн} = \lim\limits_{\Delta t \to 0}(2t - 1 + \Delta t) = (2t - 1)\big|_{t=2} = 3$ м/сек.

Пример 4. *Количество радиоактивного вещества в момент времени t выражается формулой* $m = M\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, *где* T – *период полураспада*, а M – *первоначальное количество вещества* (*количество вещества в момент времени* $t = 0$). *Найти мгновенную скорость распада вещества в момент времени* t_0.

Решение. Найдём среднюю скорость распада за промежуток времени $[t_0; t_0 + \Delta t]$. В момент времени t_0 количество вещества было $m_0 = M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0}{T}}$, а в момент времени $t_0 + \Delta t$ стало $m = M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0+\Delta t}{T}}$. Поэтому за промежуток времени $[t_0; t_0 + \Delta t]$ количество вещества изменилось на

$$\Delta m = M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0+\Delta t}{T}} - M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0}{T}}$$

(отметим, что $\Delta m<0$, так как количество радиоактивного вещества уменьшается). Средняя скорость распада за промежуток времени $[t_0; t_0 + \Delta t]$ равна:

$$\upsilon_{ср} = \frac{\Delta m}{\Delta t} = M\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0+\Delta t}{T}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0}{T}}}{\Delta t} = M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0}{T}}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\Delta t}{T}} - 1}{\Delta t}.$$

Поэтому мгновенная скорость распада выражается формулой

$$\upsilon_{мгн} = \lim_{\Delta t\to 0}\upsilon_{ср} = \lim_{\Delta t\to 0} M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0}{T}}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\Delta t}{T}} - 1}{\Delta t}.$$

Так как $M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0}{T}}$ не зависит от Δt, то это выражение можно вынести за знак предела:

$$\upsilon_{мгн} = M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0}{T}}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\Delta t}{T}} - 1}{\Delta t} = M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0}{T}}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{e^{\frac{\Delta t}{T}\ln\frac{1}{2}} - 1}{\Delta t} =$$

$$= -\frac{M\ln 2}{T}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0}{T}} = -\frac{m_0\ln 2}{T}.$$

III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Напишите выражение $\Delta\, y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, если:

а) $f(x) = x^2 + 3x$, $x_0 = 3$; *б*) $f(x) = \arcsin x$, $x_0 = \frac{1}{2}$;

в) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 3$; *г*) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{3\pi}{2}$.

2. Пользуясь определением производной, найдите производную функции:

а) $y = 3x - 2$ в точке $x_0 = 2$; *б*) $y = x^2$ в точке $x_0 = 3$;

в) $y = 3x^2 - 4x + 5$ в точке $x_0 = 1$; *г*) $y = x^3 - 5x$ в точке x_0;

д) $y = \sqrt{x}$ в точке $x_0 = 9$; *е*) $y = \sin 2x$ в точке x_0.

3. Дана функция $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Найти производную этой функции в точке $x_0 = 0$.

4. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если

а) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$; *б*) $f(x) = x^2 + 3x$, $x_0 = 1$;

в) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$; *г*) $f(x) = arctgx$, $x_0 = 1$.

5. Найти угол наклона касательной к параболе $y = x^2 - 2x + 5$ в точках: *а*) $x = 0{,}5$; *б*) $x = 1$; *в*) $x = 1{,}5$.

6. В каких точках касательная к параболе $y = -x^2 + 2x - 3$ наклонена к оси Ox под углом: *а*) $0°$; *б*) $30°$; *в*) $45°$?

7. В какой точке касательная к кривой $y = \ln x$ параллельна прямой: *а*) $y = x + 2$; *б*) $y = 2x - 5$.

8. Найти точки, в которых касательные к кривым $y = x^3 - x - 1$ и $y = 3x^2 - 4x + 1$ параллельны.

9. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(2;\ -1)$ и касающейся кривой $y = x^2 - 4$.

10. Тело движется прямолинейно по закону $s = 1 + 3t + 4t^2$. Определить его скорость в момент времени $t = 2$.

11. Расстояние *s*, пройденное телом за *t сек* определяется по формуле $s = t^3 + 3t^2 - 1$. Найти скорость и ускорение при $t = 4$.

ТЕХНИКА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Выведите формулы для вычисления производных суммы, разности, произведения и частного двух функций.
2. Сформулируйте теорему о производной обратной функции.
3. Сформулируйте теорему о производной сложной функции.
4. В каком случае пользуются логарифмической производной?

II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** *Продифференцировать данные функции*:

а) $y=\dfrac{3}{(x+5)^2}-\sqrt[3]{2x^3+5x+1}$;   *б*) $y=\sin^4 5x\cdot\operatorname{arctg}(2x^3)$;

с) $y=\dfrac{e^{\operatorname{tg}4x}}{(5x\text{-}8)^3}$.

Решение. *а*) Воспользуемся тем, что $(u+v)'=u'+v'$, $(f(u(x)))'=f'_u\cdot u'(x)$, а также формулой дифференцирования $(u^\alpha)'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$. Тогда

$$y'=\left(\frac{3}{(x+5)^2}\right)'+(\sqrt[3]{2x^3+5x+1})'=(3(x+5)^{-2})'+((2x^3+5x+1)^{1/3})'=$$

$$=-6(x+5)^{-3}(x+5)'+\frac{1}{3}(2x^3+5x+1)^{-2/3}(2x^3+5x+1)'=$$

$$=-\frac{6}{(x+5)^3}+\frac{6x^2+5}{3\sqrt[3]{(2x^3+5x+1)^2}}.$$

б) Воспользуемся формулой дифференцирования произведения $(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$.

$$y'=(\sin^4 5x\cdot\operatorname{arctg}2x^3)'=(\sin^4 5x)'\cdot\operatorname{arctg}2x^3+\sin^4 5x\cdot(\operatorname{arctg}2x^3)'=$$

$$=4\sin^3 5x\cdot(\sin 5x)'\cdot\operatorname{arctg}2x^3+\sin^4 5x\cdot\frac{1}{1+4x^6}\cdot(2x^3)'=$$

$$=20\sin^3 5x\cdot\cos 5x\cdot\operatorname{arctg}2x^3+\frac{6x^2\cdot\sin^4 5x}{1+4x^6}.$$

с) Так как $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, то

$$y' = \left(\frac{e^{\mathrm{tg}\,4x}}{(5x\ -8)^3}\right)' = \frac{(e^{\mathrm{tg}\,4x})'(5x-8)^3 - e^{\mathrm{tg}\,4x}((5x-8)^3)'}{(5x-8)^6} =$$

$$= \frac{e^{\mathrm{tg}\,4x}\cdot\frac{1}{\cos^2 4x}\cdot 4(5x-8)^3 - e^{\mathrm{tg}\,4x}\cdot 3(5x-8)^2\cdot 5}{(5x-8)^6} = \frac{e^{\mathrm{tg}\,4x}\left(\frac{4(5x-8)}{\cos^2 4x}-15\right)}{(5x-8)^4}.$$

***Пример* 2.** *Найти производную функции*

$$y = (\sin x)^x \qquad (1).$$

Решение. Прологарифмируем равенство (1):

$$\ln y = x\ln(\sin x).$$

Дифференцируем обе части полученного равенства:

$$(\ln y)' = \ln(\sin x) + x\frac{\cos x}{\sin x},$$

откуда $\frac{y'}{y} = \ln(\sin x) + x\frac{\cos x}{\sin x}$. Тогда $y' = (\sin x)^x\left(\ln(\sin x) + x\frac{\cos x}{\sin x}\right)$.

III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

Пользуясь общими правилами дифференцирования, найти производные данных функций:

1. $y = x^3 + 5x^2 + \frac{1}{x} + \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$;
2. $y = \frac{1+x^2}{1-x^3}$;
3. $y = x^2(x + 3\sqrt{x})$;
4. $y = \frac{x-5x^3}{6x\sqrt{x}+1}$;
5. $y = \sqrt[3]{x^2}\sin x \ln x$;
6. $y = e^{2x}(\sin x + \cos x)$;
7. $y = \sin^5 x$;
8. $y = \ln^5 x$;
9. $y = \arcsin^5 x$;
10. $y = \sin x^3$;
11. $y = \sin^3 2x$;
12. $y = \cos x^2 \ln^2(1+x)$;
13. $y = \ln(x + \sqrt{x^2+4})$;
14. $y = \ln(\ln(\ln x))$;
15. $y = \sqrt{\sin^2 3x + 1}$;
16. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$;
17. $y = \frac{tg\ x^2}{\sqrt{x^3+1}}$;
18. $y = \sin^3 x^3 - e^{x^2}\cos x$;
19. $y = \ln^3 \sin^2(5x+1)$;
20. $y = e^{arctg^3\sqrt{x+4}}$;

21. $y = \ln \dfrac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}$;

22. $y = (x^2+1)^{2x}$;

23. $y = (\sin x)^{\frac{1}{x}}$;

24. $y = (x+1)^{\frac{1}{\sin x}}$;

25. $y = x^{\sin x}$;

26. $y = x^{x^x}$;

27. $y = \arccos^3(2x^5+7)\cdot \mathrm{ctg} 7x^4$;

28. $y = 10^{\cos 3x}\cdot \mathrm{arcctg}(5x^3-2x+1)$;

29. $y = 4^{-x^2}\cdot \ln^5(6x^3+2)$;

30. $y = \dfrac{e^{\arccos^3(x+2)}}{\sqrt{3x^2+5x}}$.

31. $y = \dfrac{\sqrt[3]{2x^2-3x+1}}{tg^2(2x^5-3)}$;

32. $y = \dfrac{e^{\sin^2 3x}}{\sqrt{5x^2+x-6}}$;

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Дайте определение дифференцируемости функции в точке.
2. Что такое дифференциал функции в точке? От каких аргументов он зависит?
3. Каков геометрический смысл дифференциала?
4. Каков физический смысл дифференциала?
5. Что понимается под инвариантностью формы первого дифференциала?
6. Как используются дифференциалы при приближенных вычислениях?

II. *Примеры решения задач*

Пример 1. *Доказать, что функция* $y = x^3 + 2x$ *дифференцируема на всей числовой оси.*

Решение. Возьмём произвольную точку x и вычислим приращение функции в этой точке.

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^3 + 2(x+\Delta x) - (x^3+2x) =$$
$$= x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 2x + 2\Delta x - x^3 - 2x =$$
$$= (3x^2+2)\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 .$$

Функция $\alpha(x,\Delta x) = 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$ при фиксированном x является бесконечно малой высшего порядка малости чем Δx, при $\Delta x \to 0$. Функция $(3x^2+2)\Delta x$ линейна относительно Δx. Следовательно, $\Delta y = A\Delta x + \alpha(x,\Delta x)$, а это и означает, что функция $y = x^3 + 2x$ дифференцируема при любом действительном x и $dy = (3x^2+2)\Delta x$.

***Пример* 2.** *Найти приращение и дифференциал функции* $y = x^2 + 2x$ *в точке* $x = 2$ *при* $\Delta x = 0{,}1$ *и* $\Delta x = 0{,}01$. *Найти абсолютную и относительную погрешности, которые мы допускаем при замене приращения функции её дифференциалом.*

Решение. Найдем приращение функции
$\Delta y = f(2 + \Delta x) - f(2) = (2 + \Delta x)^2 + 2(2 + \Delta x) - 2^2 - 4 = 6\Delta x + (\Delta x)^2$.

Так как дифференциал есть главная линейная часть приращения функции, то $dy = 6\Delta x$.

Если $\Delta x = 0{,}1$, то $\Delta y = 6 \cdot 0{,}1 + (0{,}1)^2 = 0{,}61$. Значит, $dy = 6 \cdot 0{,}1 = 0{,}6$. Абсолютная погрешность $\Delta = |\Delta y - dy| = 0{,}1$, а относительная погрешность $\delta = \left|\frac{\Delta}{\Delta y}\right| \cdot 100\% = \frac{0{,}1}{0{,}61} \cdot 100\% \approx 16\%$.

Если $\Delta x = 0{,}01$, то $\Delta y = 6 \cdot 0{,}01 + (0{,}01)^2 = 0{,}0601$. Значит, $dy = 6 \cdot 0{,}01 = 0{,}06$. Абсолютная погрешность $\Delta = |\Delta y - dy| = 0{,}0001$. Относительная погрешность $\delta = \frac{0{,}0001}{0{,}0601} \cdot 100\% \approx 0{,}17\%$.

***Пример* 3.** *Найти дифференциал функции* $y = \cos(\ln x)$.

Решение. Дифференциал функции равен: $dy = y'dx$. Значит,
$$dy = (\cos(\ln x))'dx = -\sin(\ln x) \cdot (\ln x)'\,dx = -\frac{\sin(\ln x)}{x}dx.$$

***Пример* 4.** *Заменяя приращение функции её дифференциалом, найти приближённое значение* $\sqrt{0{,}98}$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = \sqrt{1+x}$. Так как $y(0) = 1$, $y(-0{,}02) = \sqrt{0{,}98}$, $y' = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$, $y'(0) = \frac{1}{2}$, то, воспользовавшись формулой $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$, получаем
$$\sqrt{0{,}98} = f(-0{,}02) \approx f(0) + f'(0)(-0{,}02) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99.$$

III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Доказать, что функции: *а*) $y = 2x^2 - x + 3$; б) $y = x^3 - x + 1$ дифференцируемы на всей числовой оси.

2. Доказать, что функция $y = \sqrt{x-2}$ не дифференцируема в точке $x = 2$.

3. Найти приращения и дифференциалы данных функций в точке $x = 1$ при $\Delta x = 0{,}1$ и $\Delta x = 0{,}01$. Найти абсолютную и относительную

погрешности, которые мы допускаем при замене приращения функции её дифференциалом:

а) $f(x) = 3x + 5$;; *б*) $f(x) = x^2 - 3x$;

в) $f(x) = 3x^2 - 1$; *г*) $f(x) = x^3 - x$.

4. Найти дифференциалы следующих функций:

а) $y = \dfrac{x+1}{2\sqrt{x}}$; *б*) $y = \sin 3x + \sqrt[3]{2x+1}$;

в) $y = (x^2 + x + 3)\ \mathrm{tg}^2 x$; *г*) $y = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x^3+2}$;

д) $y = \ln(\sin^3(\pi - x)$; *е*) $y = 3^{\frac{1}{x}}$;

ж) $y = 5^{\sqrt{\sin x^2}}$; *з*) $y = (\sin x)^x$;

и) $y = x^{\cos x}$; *к*) $y = (\mathrm{tg}\, x)^{\ln x}$.

5. Пользуясь понятием дифференциала, найти приближённое значение функции $y = x^3 + 3x^5 - 2x^2 - 3x + 5$ при $x = 1{,}001$.

6. Вычислить приближённые значения:

а) $\sqrt[3]{27{,}01}$; б) sin 29°; в) cos 151°; г) arcsin 0,501; д) tg 45°4′.

ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Дайте определение второй производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.
2. Дайте определение n-ой производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.
3. Выведите формулу Лейбница.
4. Выведите формулы для *n*-ых производных функций x^α, e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$, $(1 + x)^\alpha$.
5. Дайте определение второго дифференциала функции $y = f(x)$ в точке x_0.
6. Дайте определение дифференциала *n*-го порядка функции $y = f(x)$ в точке x_0.
7. Докажите справедливость формулы $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$ в случае, если *x*-независимая переменная. Справедлива ли данная формула, если *x*-функция некоторой переменной t_0. Выведите в этом случае формулу для $d^2 y$.

II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** *Найти* $y'''\left(\frac{\pi}{6}\right)$, *если* $y = 5 - 4\cos^2 x$.

Решение. Последовательно находим:

$$y' = 8\cos x \cdot \sin x = 4\sin 2x.$$

$$y'' = 8\cos 2x.$$

$$y''' = -16\sin 2x.$$

Тогда: $y'''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -16\sin\frac{\pi}{3} = -16\frac{\sqrt{3}}{2} = -8\sqrt{3}$.

***Пример* 2.** *Пользуясь формулой Лейбница, найти пятую производную от функции* $y = x^5e^{2x}$.

***Решение*:** Формула Лейбница имеет вид

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot u^{(k)} \cdot v^{(n-k)}.$$

Пусть $u = x^5$, $v = e^{2x}$, тогда $(x^5 e^{2x})^{(5)} = \sum_{k=0}^{5} C_5^k \cdot \left(x^5\right)^{(k)} \cdot \left(e^{2x}\right)^{(5-k)}$.

Найдём: $u' = 5x^4$, $u'' = 20x^3$, $u''' = 60x^2$, $u^{(4)} = 120x$, $u^{(5)} = 120$.

$$v' = 2e^{2x},\ v'' = 4e^{2x},\ v''' = 8e^{2x},\ v^{(4)} = 16e^{2x},\ v^{(5)} = 32e^{2x}.$$

Подставим в формулу Лейбница, получим

$$y^{(5)} = uv^{(5)} + 5u'v^{(4)} + 10u''v''' + 10u'''v'' + 5u^{(4)}v' + u^{(5)}v =$$

$$= 32x^5\cdot e^{2x} + 25x^4\cdot 16e^{2x} + 10\cdot 20x^3\cdot 8e^{2x} + 10\cdot 60x^2\cdot 4e^{2x} + 5\cdot 120x\cdot 2e^{2x} +$$

$$+ 120e^{2x} = e^{2x}(32x^5+400x^4+1600x^3+2400x^2+1200x+120).$$

***Пример* 3.** *Найти дифференциалы* dy *и* d^2y *от функции* $y = xe^{-2x}$ *в случае, когда*: 1) x – *независимая переменная*; 2) x – *функция от другой независимой переменной.*

Решение. 1) Пусть x – независимая переменная, тогда $dy = y'dx$,

$$dy = (xe^{-2x})'dx = (e^{-2x} - 2xe^{-2x})dx = (1-2x)e^{-2x}dx;$$

$$d^2y = y''dx^2;$$

$$y'' = ((1-2x)e^{-2x})' = -2e^{-2x} - 2(1-2x)e^{-2x} = (4x-4)e^{-2x};$$

$$d^2y = (4x-4)e^{-2x}dx^2.$$

2. Пусть x – функция от другой независимой переменной. Тогда

$$dy = y'dx = (1-2x)e^{-2x}dx.$$

В данном случае под dx мы понимаем не приращение независимой переменной x, а дифференциал функции x.

$$d^2y = d(dy) = d((1-2x)e^{-2x}dx) = d((1-2x)e^{-2x})dx +$$
$$+(1-2x)e^{-2x}d(dx) = (4x-4)e^{-2x}dx^2 + (1-2x)e^{-2x}d^2x.$$

III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Найти производную второго порядка:

а) $y = x^2 + 13x + 1$; *б*) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$;

в) $y = \cos^2 x$; *г*) $y = \mathrm{arctg}\,(x + \sqrt{x^2+1})$.

2. Найти производные указанного порядка:

а) $(e^{-x^2})^{(3)}$ *б*) $(x^2\cos 3x)^{(15)}$;

в) $(e^{kx})^{(5)}$; *г*) $(x\,e^{5x})^{(10)}$;

д) $(x^2\sin 2x)^{(10)}$; *е*) $\left(\sqrt{x+1}\right)^{(10)}$.

ж) $\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)^{(6)}$.

3. Найдите $y^{(n)}$, если:

а) $y = \sqrt{2x-3}$; *б*) $y = x^3 + 2x + e^{2x}$;

в) $y = \sin^2 x$; *г*) $y = \ln(3x-1)$;

д) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

4. Определить, удовлетворяет ли функция $y = y(x)$ заданному уравнению:

функция	уравнение
а) $y = 1 + \cos(e^x) + \sin(e^x)$;	$y'' - y' + e^{2x}y = 0$;
б) $y = e^{10\arcsin x}$;	$(1-x^2)y'' - xy' - 100y = 0$;
в) $y = C_1\cos x + C_2\sin x$;	$y'' + y = 0$.

5. Даны функции:

а) $y = \sqrt[3]{x^2+5}$; *в*) $y = \sin^3 2x$;

б) $y = \sqrt{\ln^2 x - 4}$; *г*) $y = \arcsin(3x+2)$.

Найти d^2y, считая, что x – независимая переменная.

6. Даны функции:

а) $y = \ln\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$; *в*) $y = (x+1)e^{-3x}$;

б) $y = \sin x^2$; *г*) $y = x^2 \sin x$.

Найти d^2y при условии, что: 1) x – независимая переменная; 2) x – функция от другой переменной.

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ НЕЯВНО

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Что такое параметрическое задание функции?
2. При каких условиях функция, заданная параметрически, имеет производную?
3. Как найти производную функции, заданной параметрически?
4. Как вычислить вторую производную функции, заданной параметрически?
5. В каком случае уравнением $F(x, y) = 0$ неявно задается некоторая функция?
6. Как найти первую и вторую производные функции, заданной неявно?

II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** *Найти первую и вторую производные функции* $y = f(x)$ *, если эта функция задана параметрически системой уравнений* $\begin{cases} x = 5t^3 + t, \\ y = 4t^2 - 1. \end{cases}$

Решение. Учитывая, что производная функции, заданной параметрически, находится по формуле: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, получаем

$$y'_x = \frac{8t}{15t^2} = \frac{8}{15t};$$

$$y''_{x^2} = \left(\frac{8}{15t}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = -\frac{8}{15t^2} \cdot \frac{1}{15t^2} = -\frac{8}{225t^4}.$$

***Пример* 2.** *Найти* y' *и* y''*, если* $x^4y^2 + y^3 = 3x^2$.

Решение. Продифференцируем обе части равенства, полагая, что $y = y(x)$. Получаем

$$4x^3y^2 + 2x^4y\,y' + 3y^2\,y' = 6x. \qquad (1)$$

Выражаем y': $y' = \dfrac{6x-4x^3y^2}{2x^4y+3y^2}$.

Продифференцируем обе части равенства (1):

$$12x^2y^2 + 8x^3y\,y' + 8x^3y\,y' + 2x^4(\,y'\,)^2 + 2x^4y\,y'' + 6y\,(y')^2 + 3y^2\,y'' = 6.$$

Из полученного равенства выражаем y'':

$$y'' = \frac{6-12x^2y^2}{2x^4y+3y^2} - \frac{(2x^4+6y)(6x-4x^3y^2)^2}{(2x^4y+3y^2)^3} - \frac{32x^4y(3-2x^2y^2)}{(2x^4y+3y^2)^2}.$$

III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Найти y'_x, y''_{xx} для функций $y = y\,(x)$, заданных параметрически:

а) $\begin{cases} x=\sin^2 t, \\ y=\cos^2 t, \end{cases}$ $0< t <\dfrac{\pi}{2}$; *б*) $\begin{cases} x=e^t, \\ y=t^3, \end{cases}$ $-\infty< t <+\infty$;

в) $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases}$ $0 < t < \pi$; *г*) $\begin{cases} x=e^t, \\ y=e^{2t}, \end{cases}$ $-\infty < t < +\infty$;

д) $\begin{cases} x=a\,\mathrm{ch}\,t, \\ y=b\,\mathrm{sh}\,t, \end{cases}$ $-\infty< t <+\infty$; *е*) $\begin{cases} x=a\,(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases}$ $0 < t < 2\pi$.

2. Найти x'_y для функций $x = x\,(y)$, заданных параметрически уравнениями: а) $x = t + 2t^2 + t^3$, $y = -2 + 3t - t^3$, $1 < t <+\infty$;
б) $x = e^t\cdot(t^3 - 2t^2 + 3t - 4)$, $y = e^t\cdot(t^3 - 2t^2 + 4t - 4)$, $1 < t < +\infty$.

3. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функций $y = y\,(x)$, заданных параметрически в точке (x_0, y_0):

а) $x = (t^2 + 1)e^t$, $y = t^2e^{2t}$, (1, 0); б) $x = \dfrac{2t-t^2}{t-1}$, $y = \dfrac{t^2}{t-1}$. (0, 4)

4. Найти $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ для функций, заданных параметрически:

а) $x = a\cos t$, $y = a$ cosn t; *б*) $x = a\,\mathrm{ch}\,t$, $y = a\,\mathrm{sh}\,t$;
в) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$; *г*) $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}\sin t$.

5. Доказать, что функции $y = y(x)$, заданные параметрически, удовлетворяют заданным уравнениям :

а) $x =\dfrac{1}{t^2}(\ln t + C)$, $y = (\ln t + C) + \dfrac{1}{t}$, $y = 2y'x + \dfrac{1}{y'}$;

б) $x = \ln t - \arcsin t + C$, $y = t + \sqrt{1-t^2}$, $y = y' + \sqrt{1-(y')^2}$;

в) $x = t^3 + t$, $y = \dfrac{3}{4}t^4 + \dfrac{1}{2}t^2 + 1$, $y''(1 + 3y'^2) = 1$;

г) $x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t,\ -\frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4}$, $(x - y)^2 y'' = 2(xy' - y)$.

6. Для функций $y = y\,(x)$, заданных неявно, найти y' и y'':

а) $x^2 + y^2 = a^2$; *б*) $x^2 - y^2 = a^2$; *в*) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

г) $y^2 = 2px$; *д*) $y^2 = e^{x^2 - y^2}$; *е*) $e^{x-y} = x + y$.

7. Написать уравнение касательной к кривой, заданной параметрически или неявно, в данной точке:

а) $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$, в точке $x = 0$ $(y > -3)$;

б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точке $(x_0; y_0)$;

в) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$, в точке $(a\,(\frac{\pi}{2} - 1), a)$;

г) $x = te^t,\ y = te^{-t}$, $(t > -1)$, в точке $t = t_0$.

8. Найти точки, в которых касательные к графику функции $y = f\,(x)$, заданной параметрически или неявно:

а) $x = \frac{t^3}{1+t^2}$, $y = \frac{t^3 - 2t^2}{1+t^2}$; *б*) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$;

в) $x^2 + 2y^2 + 4x - 4y = 0,\ y > 1$; *г*) $2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$, параллельны оси абсцисс :

9. Написать уравнение касательной и нормали к кривой:

а) $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$, в точке $M\,(-1, 3)$;

б) $y^4 - 4x^4 - 6xy = 0$, в точке М (1, 2);

в) $x = t^2,\ y = t^3$, в точке $M\,(4, 8)$;

г) $x = t\cos t,\ y = t\sin t$, в точке М $(\pi\frac{\sqrt{2}}{8}, \pi\frac{\sqrt{2}}{8})$.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Дайте определение экстремума функции.
2. Сформулируйте теорему Ферма.
3. Сформулируйте теорему Ролля. Останется ли теорема справедлива, если опустить одно из её условий? Приведите примеры.
4. Сформулируйте теорему Лагранжа.

5. Сформулируйте теорему Коши. Как получить теорему Лагранжа из теоремы Коши?
6. Что такое многочлен Тейлора?
7. Запишите остаточный член формулы Тейлора:
8. а) в форме Пеано; б) в форме Лагранжа; в) в форме Коши.
9. Запишите формулу Маклорена для функции $f(x)$ и остаточные члены этой формулы в формах Пеано, Лагранжа и Коши.
10. Напишите основные разложения и остаточные члены этих разложений.

II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** *Показать, что уравнение* $x^3+6x-5=0$ *имеет только один вещественный корень.*

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=x^3+6x-5$. Она непрерывна на и имеет производную $f'(x)=3x^2+6$ или $f'(x)=3(x^2+2)$. Очевидно, что $f'(x)>0$ при любых вещественных значениях x. Следовательно, уравнение имеет не более одного вещественного корня. Действительно, если бы уравнение имело два корня c_1 и c_2 ,то $f(c_1)=f(c_2)=0$, и, по теореме Ролля, между c_1 и c_2 нашлась бы такая точка c, что . Последнее невозможно. Существование корня следует из того, что $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

***Пример* 2.** *Определить значение с из теоремы о среднем для функции* $y=x^3+3x^2+6$ *на отрезке* [1, 2].

Решение. Воспользуемся формулой Лагранжа:

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

В данном случае: $f(b)=f(2)=26$, $f(a)=f(1)=10$, $f'(x)=3x^2+6x$, $f'(c)=3c^2+6c$.

Подставив найденные значения в формулу Лагранжа, получим:

$$3c^2+6c=26-10 \quad \text{или} \quad 3c^2+6c-16=0.$$

Найдем корни этого уравнения:

$$c_1=\frac{-6+2\sqrt{57}}{6}=\frac{-3+\sqrt{57}}{3}; \qquad c_2=\frac{-3-\sqrt{57}}{3}.$$

Очевидно, что c_2 не принадлежит отрезку [1, 2]. Значит, $c=\dfrac{-3+\sqrt{57}}{3}$.

***Пример* 3.** *Разложить функцию* $y=\operatorname{tg} x$ *по формуле Маклорена до члена с* x^3 *включительно.*

Решение. Найдём производную функции $y = \text{tg}\, x$ до третьего порядка включительно.

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}; \qquad y'' = 2\cos^{-3} x \cdot \sin x;$$

$$y''' = 6\cos^{-4} x \cdot \sin^2 x + 2\cos^{-2} x.$$

Отсюда получаем: $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 2$. Тогда, по формуле Маклорена $\text{tg}\, x = x + \dfrac{x^3}{3} + 0\,(x^3)$.

Пример 4. *Разложить по формуле Маклорена функцию* $f(x) = \ln(5 - 4x)$.

Решение. Воспользуемся известным разложением:

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + 0\,(x^n).$$

Тогда $\ln(1 - x) = -\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k} + 0\,(x^n)$. Значит $\ln(5 - 4x) = \ln 5 + {}$
$+ \ln(1 - \frac{4}{5}x) = \ln 5 - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{4}{5}\right)^k x^k + 0\,(x^n)$.

Пример 5. *Вычислить число е с точностью до* 10^{-6}.

Решение. Воспользуемся формулой

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x).$$

Запишем $R_n(x)$ в форме Лагранжа: $R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$, $(0 < \theta < 1)$.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + R_n(1). \qquad |R_n(1)| \le \frac{e}{(n+1)!}.$$

Если взять $n = 9$, то $\dfrac{e}{10!} < \dfrac{3}{3 \cdot 10^6} = 10^{-6}$. Тогда

$$e \approx 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{720 \cdot 7} + \frac{1}{720 \cdot 56} + \frac{1}{720 \cdot 56 \cdot 9} \approx 2{,}718282.$$

II. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. В формуле Лагранжа определить значение c на отрезке $[0; 2]$ для функций:

а) $y = x^2$; *б*) $y = 5x^3 + 2x$; *в*) $y = \dfrac{1}{x^2 + 3}$; *г*) $y = \sqrt[3]{x+1}$.

2. Определить значение c в формуле Коши для функций:

а) $f(x) = x^3$ и $g(x) = x^2 + 1$, заданных на отрезке [1; 2];

б) $f(x) = \sin x$ и $g(x) = 1 + \cos x$, заданных на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$.

3. Доказать, что уравнения

а) $x^5 + 3x - 6 = 0$; *б*) $x^3 + 5x + 2 = 0$; *в*) $x^5 - 2x^4 - x^2 - 5 = 0$

имеют единственный корень на всей числовой оси.

4. Разложить многочлен $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x + 3$ по степеням $x + 1$.

5. Разложить многочлен $f(x) = x^5$ по степеням $x - 1$.

6. Разложить функцию $f(x)$ по формуле Маклорена до члена указанного порядка включительно:

а) $f(x) = e^{2x - x^2}$ до члена с x^4; б) $f(x) = \sqrt[3]{\sin x}$ до члена с x^4;

в) $f(x) = \sqrt{1 - x + 2x^2}$ до члена с x^3.

7. Пользуясь известными разложениями, разложить по формуле Маклорена функции:

а) $f(x) = \sin^2 x$; б) $f(x) = e^{-x^2}$;

в) $f(x) = \ln(3 + x)$; *г*) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$.

8. С помощью формулы Тейлора найдите приближенные значения:

а) $\sqrt[3]{9}$ с точностью до 10^{-3}; *б*) $\sqrt[4]{90}$ с точностью до 10^{-4};

в) $\sin 10^0$ с точностью до 10^{-3}; *г*) $\sin 1^0$ с точностью до 10^{-5};

д) $\ln 1{,}1$ с точностью до 10^{-3}; *е*) $e^{0{,}1}$ с точностью до 10^{-4};

в) $\sin 10^0$ с точностью до 10^{-3}; *г*) $\sin 1^0$ с точностью до 10^{-5};

ж) $\cos 18^0$ с точностью до 10^{-4}.

ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. При раскрытии каких неопределённых выражений пользуются правилом Лопиталя?
2. Сформулируйте правило Лопиталя раскрытия неопределённостей типа: *а*) $\frac{0}{0}$ при $x \to a$; *б*) $\frac{0}{0}$ при $x \to +\infty$: *в*) $\frac{\infty}{\infty}$ при $x \to a$; *г*) $\frac{\infty}{\infty}$ при $x \to +\infty$.
3. Каким образом, пользуясь правилом Лопиталя, можно раскрыть неопределённости типа $(0 \cdot \infty)$ и $(\infty - \infty)$?

4. Как раскрыть неопределённые выражении вида (1^{∞}); (0^{0}); (∞^{0})?
5. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям 1°–3° теоремы Лопиталя и пусть не существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Следует ли отсюда, что не существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$? Рассмотрите примеры:

$$а)\ \lim_{x\to a}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x};\qquad б)\ \lim_{x\to a}\frac{x+\sin x}{2x+\sin x}.$$

II. *Примеры решения задач*

Пример. *Найти пределы, раскрыв неопределенности, используя правило Лопиталя*:

$$а)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2};\quad б)\ \lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{tgx}-\frac{1}{x}\right);\quad в)\ \lim_{x\to1}(1-x)\cdot tg\frac{\pi x}{2};\quad г)\ \lim_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}.$$

Решение.

$$а)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty;$$

$$б)\ \lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{tgx}-\frac{1}{x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to+0}\frac{x-tgx}{xtgx}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{(x-tgx)'}{(xtgx)'}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{1-\dfrac{1}{\cos^2x}}{tgx+\dfrac{x}{\cos^2x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\cos^2x-1}{\sin x\cdot\cos x+x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{-2\sin x\cdot\cos x}{\cos^2x-\sin^2x+1}=\frac{0}{2}=0.$$

$$в)\ \lim_{x\to1}(1-x)\cdot tg\frac{\pi x}{2}=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{ctg\dfrac{\pi x}{2}}=(\frac{0}{0})=\lim_{x\to1}\frac{(1-x)'}{(ctg\dfrac{\pi x}{2})'}=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{-1}{-\dfrac{1}{\sin^2(\frac{\pi x}{2})}\cdot\dfrac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1}\sin^2(\frac{\pi x}{2})=\frac{2}{\pi}\cdot1=\frac{2}{\pi}$$

г) Рассмотрим функцию $y=x^{\frac{1}{1-x}}$. Прологарифмируем обе части данного равенства: $\ln y=\ln x^{\frac{1}{1-x}}=\dfrac{1}{1-x}\ln x$ и перейдем к пределу при $x\to1$. Получим:

$$\lim_{x\to 1}\ln y=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\ln x=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(1-x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-1.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=e^{-1}$.

III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

Найти пределы, используя правило Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^5-x^3-2}{5x^4-x^3-4}$;

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x^2-3)}{3x^2-5x-2}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\sin 2x}{x^3}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 3x}{x^2}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{\text{tg}^2 x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln \text{tg}x}{\text{ctg}2x}$;

7. $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{\text{arctg}(x-1)}{\sqrt{2x^2-x-1}}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin x}{\text{ctg}x}$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^x}{1-\cos x}$;

10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\dfrac{\ln\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\text{tg}x}$;

11. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x\cdot\ln(\text{ctg}\,x))$;

12. $\lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot\ln(\frac{\pi}{2}\,\text{arcctg}\,x))$;

13. $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi-2\,\text{arctg}\sqrt{x})\cdot\sqrt{x}$;

14. $\lim\limits_{x\to\infty}((x-1)\sin\dfrac{2}{x-1})$;

15. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x})$;

16. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{1-\cos x}-\dfrac{1}{x})$;

17. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\arcsin x})$;

18. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1})$;

19. $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{2}{\pi}\,\text{arctg}\,x)^x$;

20. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{2}{\pi}\arccos x)^{\frac{1}{x}}$;

21. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{x^2}$;

22. $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x)^{\text{tg}\,x}$

23. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\text{tg}\,x)^{\cos x}$;

24. $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^2+3^x)^{\frac{1}{x}}$.

ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Дайте определение монотонно возрастающей и монотонно убывающей функции в точке.
2. Сформулируйте достаточное условие возрастания функции в точке.
3. Дайте понятие монотонности функции на промежутке.
4. Какое условие является достаточным для строгой монотонности функции?

II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** *Найти промежутки монотонности функции* $f(x) = 2x - x^2$.

Решение. $f'(x) = 2 - 2x = 2(1 - x)$. Так как $f'(x) > 0$ при $x < 1$, то функция возрастает на интервале $(-\infty, 1)$ и убывает на интервале $(1, +\infty)$, так как на этом интервале $f'(x) < 0$.

***Пример* 2.** Доказать *неравенство* $\operatorname{tg} x > x + \dfrac{x^3}{3}$ *при* $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Решение. На промежутке $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ рассмотрим функцию

$$f(x) = \operatorname{tg} x - x - \frac{x^3}{3}.$$

Производная этой функции:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 - x^2 = \operatorname{tg}^2 x - x^2 = (\operatorname{tg} x - x)(\operatorname{tg} x + x)$$

будет положительной на промежутке $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, так как на этом промежутке $x > 0$, $\operatorname{tg} x > 0$ и $\operatorname{tg} x > x$. На основании теоремы о монотонности функции можно утверждать, что $f(x)$ на $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ монотонно возрастает.

Так как $f(0) = 0$, то для $x > 0$ будет $f(x) > 0$, т.е. $\operatorname{tg} x - x - \dfrac{x^3}{3} > 0$ или $\operatorname{tg} x > x + \dfrac{x^3}{3}$.

III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Найти интервалы возрастания и убывания функций:

а) $f(x) = 4x^3 – 21x^2 + 18x + 7$; *б*) $f(x) = 8x^3 – x^4$;

в) $f(x) = (x – 1)^3(2x + 3)^2$; *г*) $f(x) = xe^{-3x}$;

д) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$; *е*) $f(x) = x^2 – 10\ln x$;

ж) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$; *з*) $f(x) = \dfrac{x^3}{3-x^2}$;

и) $f(x) = x^2 \ln x$; *к*) $f(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}$;

л) $f(x) = x + 2\sin x$.

2. Доказать следующие неравенства:

а) $e^x > 1 + x$ при $x \geq 0$; б) $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$ при $x > 0$;

в) $\sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$ при $x > 0$; *г*) $2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x}$ при $x > 1$;

д) $\ln(1 + x) \leq x$ при $x \geq 0$.

ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Дайте определение локального экстремума функции.
2. Какие точки называются точками, подозрительными на экстремум?
3. Сформулируйте теорему, выражающую необходимое условие экстремума.
4. Сформулируйте теоремы, выражающие достаточные условия экстремума.
5. Как найти наибольшее и наименьшее значения дифференцируемой функции, заданной на отрезке $[a, b]$?

II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** *Найти точки экстремума функции*

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x.$$

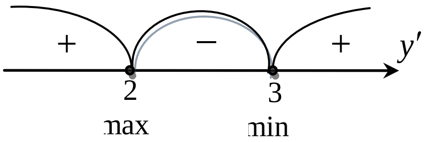

Рис. 1.

Решение. Находим производную $y' = x^2 - 5x + 6$. Приравниваем её к нулю: $x^2 - 5x + 6 = 0$. Корни уравнения: $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$ будут стационарными точками. Точек, в которых производная не существует, нет. Проверим достаточные условия экстремума. Воспользуемся первым достаточным условием. Изобразим координатную ось и нанесём на неё точки $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$ (см. рисунок 1). Поскольку при переходе через точку $x_1 = 2$ знак производной меняется с «+» на «–», то $x_1 = 2$ – точка максимума. . При переходе через точку $x_2 = 3$ знак производной меняется с «-» на «+», следовательно, $x_2 = 3$ – точка минимума. Найдём значения функции в точках экстремума: $f(3) = 4\frac{1}{2}$, $f(3) = 4\frac{2}{3}$.

***Пример* 2.** *Исследовать на экстремум функцию* $y = x^{\frac{2}{3}}$.

Решение. Находим производную: $y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. Производная не существует в точке $x = 0$. При переходе через точку $x = 0$ производная меняет знак с «–» на «+», значит, $x = 0$ – точка минимума. Найдём значения функции в точке экстремума: $f(0) = 0$.

***Пример* 3.** *Исследовать на экстремум функцию*

$$y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 14.$$

воспользовавшись вторым достаточным условием экстремума.

Решение. Находим точки, подозрительные на экстремум. Так как $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36$, то критические точки: $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. $f''(x) = 12x - 30$. $f''(2) = -6 < 0$, значит, $x = 2$ – точка максимума. $f''(3) = 6 > 0$, значит, точка $x = 3$ – точка минимума. Найдём значения функции в точках экстремума: $f(2) = 14$, $f(3) = 13$.

***Пример* 4**. *Найти наибольшее и наименьшее значение функции* $y = x^4 - 2x^2 + 3$ *на отрезке* $[0, 2]$.

Решение. Найдём производную: $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$ Решим уравнение: $4x(x^2 - 1) = 0$. Корни уравнения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ и $x_3 = -1$ Точка $x_3 = -1$ не принадлежит отрезку $[0,2]$. Находим значения функции в точке $x_2 = 1$ и на концах отрезка. $y(0) = 3$, $y(1) = 2$, $y(2) = 11$. Сравниваем найденные значения, заключаем, что $y = 2$ является наименьшим, а $y = 11$ является наибольшим значениями функции на указанном отрезке.

***Пример* 5.** *Вписать в полукруг радиуса R прямоугольник наибольшей площади.*

Решение. Впишем в полукруг прямоугольник, одна из сторон которого равна $2x$. Тогда вторая сторона равна $\sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in (0, R)$. Задача свелась к нахождению наибольшего значения функции $f(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$. Находим критические точки функции $f(x)$. Вычислим производную: $f'(x) =$ $f'(x) = \dfrac{2(R^2 - 2x^2)}{\sqrt{R^2 - x^2}}$. Производная равна нулю в точках $x_{1,2} = \pm\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ и не существует в точках $x_{3,4} = \pm R$. Из этих точек только $x_1 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ принадлежит интервалу $(0, R)$. Эта точка и доставляет наибольшее значение функции $f(x)$, т.к. на концах интервала $f(x) = 0$. Искомый прямоугольник имеет размеры: $a = R\sqrt{2},\ b = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Найти максимум и минимум (экстремумы) функций:

а) $y = x^2 - 6x + 3$;

б) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - x^4$;

в) $y = x^2(x - 4)$;

г) $y = x + \dfrac{1}{x}$;

д) $y = \dfrac{14}{x^4 - 8x^2 + 2}$;

е) $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$;

ж) $y = \sin x + \cos x$;

з) $y = \cos 2x - 2\sin x$;

и) $y = x^2e^{-x}$;

к) $y = e^x + e^{-x}$;

л) $y = x\ln x$;

м) $y = \ln x + \dfrac{1}{x}$.

2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции на указанных отрезках:

а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$; на отрезке $[1, 5]$;
б) $y = x\ln x$ на отрезке $[e^{-2}, 1]$;
в) $y = x\,e^x$ на отрезке $[-2, 1]$;
г) $y = (x + 1)\,e^x$ на отрезке $[-2, 0]$;
д) $y = \cos 2x + 2x$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

3. Выяснить, существует ли наименьшее и наибольшее значения функций на указанных промежутках:

а) $y = x^2$ на полуинтервале (0, 1];

б) $y = \cos x$ на полуинтервале (0, $\frac{\pi}{2}$];

в) $y = \frac{1}{x}$ на полуинтервале (0, 4];

г) $y = E(x)$ на отрезке [–2, 1];

д) $y = \sin 2x - x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Найти наибольший объём цилиндра, периметр осевого сечения которого равен *а*.

5. Судно *В* находится на расстоянии 75 км к востоку от судна *А*, идёт на запад со скоростью 12 км/ч ; судно же *А* идёт к югу со скоростью 9 км/ч. В какой момент суда будут наиболее близки друг к другу?

6. Найти такое наибольшее число, чтобы разность между ним и его кубом была наибольшей.

7. В данный шар вписать конус с наибольшей боковой поверхностью.

ВЫПУКЛОСТЬ И ВОГНУТОСТЬ ФУНКЦИИ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Дайте определение выпуклости (вогнутости) графика функции в точке (на множестве).
2. Сформулируйте теорему, выражающую достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции.
3. Дайте определение точки перегиба графика функции.
4. Может ли меняться направление выпуклости графика функции при переходе через точку, не являющуюся точкой перегиба? Приведите примеры.
5. Сформулируйте необходимое условие перегиба графика функции. Покажите на примере, что это условие не является достаточным.
6. Сформулируйте достаточные условия перегиба графика функции.

II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1**. *Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции* $y = 2x^4 - 3x^2 + x - 1$.

Решение. Находим первую и вторую производные:

$$y' = 8x^3 - 6x + 1;$$

$$y'' = 24x - 6.$$

Решим уравнение: $24x - 6 = 0$, или $x^2 = \dfrac{1}{4}$, тогда $x_1 = -\dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$.

Строим числовую прямую и отмечаем на ней точки x_1 и x_2, а также знаки второй производной функции (см. рисунок 2)

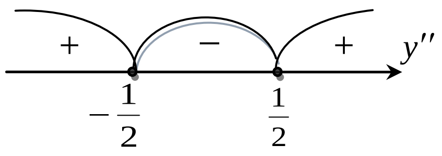

Рис. 2.

Так как $y'' > 0$ на интервалах $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$ и $\left(\dfrac{1}{2}, \infty\right)$, то на этих интервалах функция вогнута, так как $y'' < 0$ на интервале $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, то функция выпукла на данном отрезке.

Точки $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ и $x_2 = \dfrac{1}{2}$ являются точками перегиба графика функции.

Пример 2**.** *Найти точки перегиба графика функции*

$$y = \sqrt[3]{(x-2)^4(1-x)^3}\ .$$

Решение. Находим y' и y'':

$$y' = ((1-x)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}})' = -\frac{1}{3}(1-x)^{-\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}}(1-x)^{-\frac{2}{3}}(-x+2+2-2x) = \frac{1}{3}(4-3x)(x-2)^{-\frac{1}{3}}(1-x)^{-\frac{2}{3}}.$$

$$y'' = \frac{1}{3}(-3(x-2)^{-\frac{1}{3}}(1-x)^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}(4-3x)(x-2)^{-\frac{4}{3}}(1-x)^{-\frac{2}{3}} +$$

$$+\frac{2}{3}(4-3x)(x-2)^{-\frac{1}{3}}(1-x)^{-\frac{5}{3}}) = \frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{4}{3}}(1-x)^{-\frac{5}{3}} \times$$

$$\times(-3(x-2)(1-x) - \frac{1}{3}(4-3x)(1-x) + \frac{2}{3}(4-3x)(x-2) =$$

$$= \frac{2}{9\sqrt[3]{(x-2)^4(1-x)^3}}\ .$$

Очевидно, y'' в ноль не обращается. В точках $x = 2$ и $x = 1$ y'' не существует. Отмечаем полученные точки на числовой прямой и находим знаки второй производной функции на полученных интервалах (см. рисунок 3).

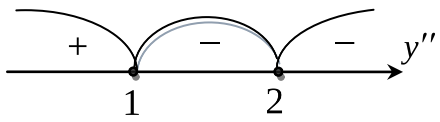

Рис. 3.

Исходя из знаков второй производной делаем вывод, что на интервале $(-\infty, -1)$ функция вогнутая, а на интервалах $(1, 2)$ и $(2, +\infty)$ функция выпуклая. Точка $x = 1$ является точкой перегиба. В точке $x = 2$ направление выпуклости функции не изменяется.

III. ***Задачи и упражнения для практических занятий***

1. Исследовать функцию на выпуклость (вогнутость) и найти точки перегиба:

а) $y = x^2 + 3x^4$; *б*) $y = \ln(x^2 - 1)$;

в) $y = x^4 - 6x^2 + 2$; *г*) $y = x^5 - 10x^2 + 2x + 6$;

д) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$; *е*) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$;

ж) $y = x \operatorname{arctg} x$; *з*) $y = e^{\sin x}\ (-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2})$;

и) $y = \ln(1 + x^3)$; *к*) $y = e^{arctgx}$.

2. Найти точки перегиба графика функции:

а) $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2$; *б*) $y = (x^2 - 1)^3$; *в*) $y = 4x^2 + \dfrac{1}{x}$;

г) $y = x^3 e^{-x}$; *д*) $y = x^2 \ln x$; *е*) $y = e^{2x - x^2}$.

АСИМПТОТЫ ФУНКЦИИ

I. ***Контрольные вопросы и задания***

1. Дайте определение асимптоты функции.
2. В каком случае у функции существует вертикальная асимптота и как её найти?
3. Приведите пример вертикальной асимптоты графика функции.
4. Сформулируйте определение и приведите пример наклонной асимптоты графика функции при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$).
5. Сформулируйте теорему, выражающую необходимые и достаточные условия существования наклонной асимптоты графика функции.
6. Если у функции есть наклонная асимптота при $x \to +\infty$, то следует ли из этого, что у неё будет наклонная асимптота при $x \to -\infty$?
7. Всегда ли наклонная асимптота при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ совпадают?

II. *Примеры решения задач*

Пример. *Найти асимптоты графиков функций*:

а) $y = \dfrac{x^3}{3-x^2}$;   *б*) $y = 2x + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$.

Решение. а) Функция $y = \dfrac{x^3}{3-x^2}$ определена и непрерывна всюду, кроме $x_1 = -\sqrt{3}$ и $x_2 = \sqrt{3}$

Так как $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}-0}\dfrac{x^3}{3-x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}+0}\dfrac{x^3}{3-x^2} = -\infty$, то прямая $x = -\sqrt{3}$ является вертикальной асимптотой графика функции. Так как $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}-0}\dfrac{x^3}{3-x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}+0}\dfrac{x^3}{3-x^2} = -\infty$, то прямая $x = \sqrt{3}$ также является вертикальной асимптотой графика функции.

Будем теперь искать наклонные асимптоты в виде прямых $y = kx + b$, где $k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x(3-x^2)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{3x-x^3} = -1$,

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{3x}{3-x^2} = 0.$$

Следовательно, прямая $y = -x$ является наклонной асимптотой графика функции $y = \dfrac{x^3}{3-x^2}$.

б) Функция $y = 2x + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$ определена и непрерывна на всей числовой прямой, следовательно, у неё нет вертикальных асимптот. Будет искать наклонные асимптоты в виде прямых $y = kx + b$, где

$k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{x} = 2$ (учитываем, что $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2} = -\dfrac{\pi}{2}$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2}$, поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{x} = 0$). При нахождении коэффициента b необходимо рассматривать два случая $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$. Поэтому получаем два значения для коэффициента b:

$$b_1 = \lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to-\infty}\left(2x+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-2x\right) = \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$b_2 = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to+\infty}\left(2x+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, график функции $y = 2x + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$ имеет две наклонные асимптоты $y = 2x - \dfrac{\pi}{2}$ (при $x \to -\infty$) и $y = 2x + \dfrac{\pi}{2}$ (при $x \to +\infty$).

III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

Найти асимптоты графиков функций:

1. $y = \dfrac{x+1}{9-x^2}$;
2. $y = \dfrac{x^2+3x}{x^2+1}$;
3. $y = \sqrt{\dfrac{x-5}{x+5}}$;
4. $y = \dfrac{\ln x}{x}$;
5. $y = \dfrac{x^3+3}{x^2}$;
6. $y = \dfrac{x^2-x-3}{x+3}$;
7. $y = \sqrt[3]{x^3-3x}$;
8. $y = x - 3\ln x$;
9. $y = xe^{\frac{1}{x}}$;
10. $y = 2x - \arccos\dfrac{1}{x}$;
11. $y = 2x + \dfrac{\ln x}{x}$;
12. $y = e^{-\frac{2}{x}}$;
13. $y = \log_2(9-x^2)$;
14. $y = \dfrac{2-x}{5-x^2}$;
15. $y = e^{\frac{1}{x}} - x$;
16. $y = \dfrac{\cos x}{x}$;
17. $y = x + \dfrac{\sin x}{5x}$;
18. $y = \dfrac{x^4}{x^3-8}$;
19. $y = x \cdot 3^{\frac{1}{x^2}}$;
20. $y = \left|e^x - 1\right|$.

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Приведите схему построения графика функции $y = f(x)$.
2. Пусть функция задана на полупрямой или всей числовой прямой, но у неё нет наклонных асимптот. Что необходимо сделать, чтобы определить поведение функции на бесконечности?
3. Каким образом используется чётность, нечётность, периодичность функции при построении графика функции и исследовании функции?

II. *Примеры решения задач*

Пример. *Провести полное исследование и построить график функции*: *а*) $f(x) = \dfrac{4x^3 - x^4}{5}$; *б*) $f(x) = \ln\dfrac{x}{x+5} - 1$.

Решение. *а*) 1. Функция $f(x)=\dfrac{4x^3-x^4}{5}=\dfrac{4}{5}x^3-\dfrac{1}{5}x^4$ является многочленом. Как и любой многочлен степени выше нулевой, она определена на всей оси *Ox*, непрерывна, асимптот не имеет, не является периодической.

2. Так как $f(x)\neq f(-x)$ и $f(x)\neq -f(-x)$, то $f(x)$ не является ни четной, ни нечетной.

3. Находим $y'=\dfrac{4}{5}x^2(3-x)$, $y''=\dfrac{12}{5}x(2-x)$.

4. Исследуем $f(x)$ на монотонность и экстремум. Критическими точками $f(x)$ являются точки $x_1=0$, $x_2=3$. Проверим, есть ли смена знака y' при переходе через эти точки:

x	$(-\infty, 0)$	0	(0, 3)	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	+	0	-
$f(x)$	↗		↗	*max*	↘

Итак, $M_1\left(3,\dfrac{27}{5}\right)$ – точка максимума. В точке $x=0$ экстремума нет, но будем помнить, что здесь $y'(0)=0$, поэтому касательная к графику параллельна оси Ox.

5. Исследуем $f(x)$ на выпуклость, вогнутость и точки перегиба. Критических точек у $f''(x)$ две: $x_1=0$, $x_2=2$.

X	$(-\infty,0)$	0	(0,2)	2	$(2,+\infty)$
$f''(x)$	–	0	+	0	–
$f(x)$	$\cap$	*перегиб*	$\cup$	*перегиб*	$\cap$

$M_2(0, 0)$ – точка перегиба с выпуклости на вогнутость; $M_3\left(2,\dfrac{16}{5}\right)$ – точка перегиба с вогнутости на выпуклость.

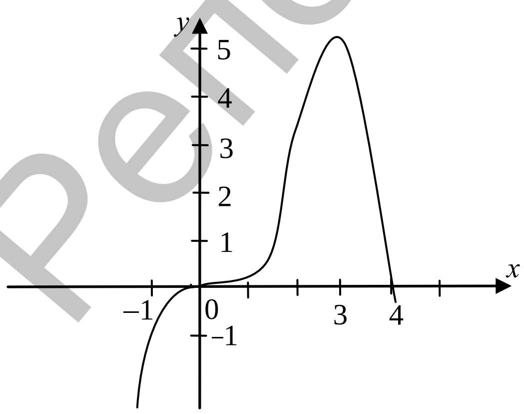

Рис. 4.

6. Найдем точки пересечения с координатными осями. При $x=0$ имеем $y=0$, это точка $M_2(0, 0)$. При $y=0$ имеем $4x^3-x^4=0$, откуда $x_1=0$, $x_2=4$. Получаем точку $M_4(4, 0)$.

7. На интервале $(-\infty,0)$ не нашлось ни одной характеристической точки графика. Поэтому возьмем дополнительную точку, например $M_5(-1, -1)$.

8. Выберем масштаб и строим график функции (рисунок 4).

б) $f(x)=\ln\frac{x}{x+5}-1$.

Решение. Исследование функции будем проводить, придерживаясь следующей схемы:

1. Найдем область определения функции $D(f(x))$. Она определяется системами $\begin{cases}x>0,\\x+5>0;\end{cases}$ и $\begin{cases}x<0,\\x+5<0.\end{cases}$

Итак, $D(f(x))=(-\infty,-5)\cup(0,+\infty)$.

2. Уже из $D(f(x))$ видно, что $f(x)$ не может быть ни четной, ни нечетной, ни периодической, поэтому исследование будем проводить во всей области существования.

3. Исследуем $f(x)$ на непрерывность и на вертикальные асимптоты. На $(-\infty,-5)\cup(0,+\infty)$ $f(x)$ непрерывна как элементарная. Изучим поведение функции при $x\to-5-0$ и $x\to+0$. $\lim\limits_{x\to-5-0}\left(\ln\frac{x}{x+5}-1\right)=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to+0}\left(\ln\frac{x}{x+5}-1\right)=-\infty$.

Таким образом, прямые $x=-5$ и $x=0$ являются вертикальными асимптотами графика функции.

4. Найдем наклонные асимптоты по формуле $y=kx+b$.

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x-5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x'}{(x-5)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1}=1$, то

$$\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x}{x-5}=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-5}\right)=\ln 1=0.$$

Поэтому $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x}{x-5}-1}{x}=0$.

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\ln\frac{x}{x-5}-1\right)=-1.$$

Следовательно, прямая $y=-1$ является наклонной (горизонтальной) асимптотой графика при $x\to\pm\infty$.

5. Найдем первую и вторую производные функции:

$$f'(x)=\frac{5}{x(x+5)},\qquad f''(x)=-\frac{5(2x+5)}{x^2(x+5)^2}.$$

6. Проведем исследование функции на монотонность и экстремум.

Первая производная функции не равна нулю. Точки $x_1=0$ и $x_2=-5$, в которых $f'(x)$ не определена, не принадлежат области определения функции. Таким образом, критических точек функция не имеет. Следовательно, экстремумов нет.

На интервалах $(-\infty, -5)$ и $(0,+\infty)$ $f'(x)>0$, здесь функция $f(x) = \ln\dfrac{x}{x-5} - 1$ возрастает.

7. Проведем исследование на выпуклость, вогнутость и точки перегиба. $f''(x)$ равна нулю в точке $x_1 = \dfrac{5}{2}$, не существует в точках $x_2 = 0$ и $x_3 = -5$. Ни одна из них не принадлежит области определения функции, поэтому точек перегиба нет. На интервале $(-\infty, -5)$ $f''(x) > 0$, здесь функция $f(x)$ вогнута. На интервале $(0, +\infty)$ $f''(x) < 0$, здесь функция $f(x)$ выпукла.

8. Найдем точки пересечения графика с осями координат.

Точка $x = 0$ не принадлежит области определения функции, следовательно функция не пересекается с осью Oy. Пусть $y = 0$, тогда решая уравнение $\ln\dfrac{x}{x-5} - 1 = 0$ получим $\dfrac{x}{x-5} = e$.

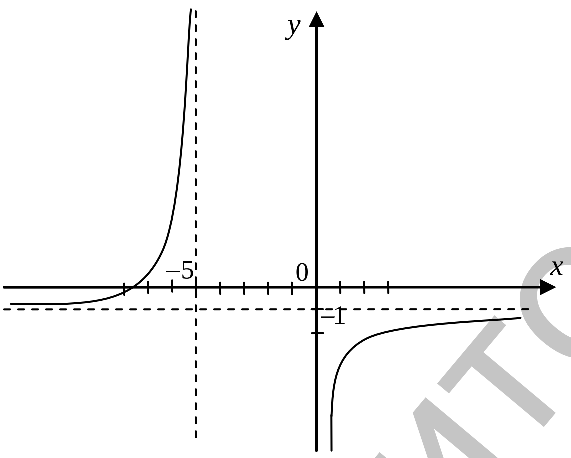

Рис. 5.

Найдем x:

$$x = \frac{5e}{1-e} = -\frac{5e}{e-1} \approx -7{,}9.$$

Точка $M_1\left(-\dfrac{5e}{e-1}, 0\right)$ – точка пересечения с осью Ox.

9. Найдем дополнительную точку в правой части графика.

Пусть $y = -2$, тогда $\ln\dfrac{x}{x-5} - 1 = -2$, $x = \dfrac{5}{e-5} \approx 2{,}9$, получим точку $M_2\left(\dfrac{5}{e-1}, -2\right)$.

9. Выберем подходящий масштаб, построим график функции (рисунок 5).

III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Постройте графики функций:

1) $y = 2x^4 - x^2 + 1$; 2) $y = x^5 - x^3 - 2x$;
3) $y = (x + 1)(x - 2)^2$; 4) $y = x(x + 1)^3$;

5) $y = \dfrac{1}{x(x+1)}$;

6) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$;

7) $y = e^{x^2 - 2x}$;

8) $y = 2x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$;

9) $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$;

10) $y = \dfrac{1 - x^2}{4 - x^2}$;

11) $y = x \ln x$;

12) $y = \ln(e + \dfrac{1}{x})$;

13) $y = x - \ln(x + 1)$;

14) $y = \ln(x - \dfrac{1}{x})$;

15) $y = e^{\frac{1}{x}}$;

16) $y = x^3 e^{x^2 - 2x}$;

17) $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$;

18) $y = x^3 e^{-4x}$;

19) $y = \sin x + \cos x$;

20) $y = \sin^2 x + \cos x$;;

21) $y = \sin x + \dfrac{1}{2} \sin 2x$;

22) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$.

2. Постройте кривые, заданные уравнениями:

а) $y^2 = 8x^2 - x^4$;

б) $y^2 = x^3 + 1$; $y^2 = x^3 + 1$;

в) $y^2 = x(x - 1)^2$;

г) $y^2 = x^4(x + 1)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. ***Исходя из определения, найти производную функции***:

вариант		вариант	
1.	$\sin(2x)$	14.	$\ln(7x-1)$
2.	x^3-2x+1	15.	$\sin \dfrac{x}{6}$
3.	$\cos \dfrac{x}{2}$	16.	$\cos(8x+2)$
4.	$\dfrac{3}{2x - 1}$	17.	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
5.	$\ln(2x)$	18.	$\sin(5x)$

6.	$\sin\frac{x}{3}$	19.	x^3+4x-2
7.	$\cos(5x)$	20.	$\frac{1}{(2x-3)^2}$
8.	$(3-x)^2$	21.	$\frac{5}{x-1}$
9.	$\frac{1}{(x-1)^2}$	22.	$\cos\frac{x-1}{3}$
10.	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	23.	$(4-2x)^2$
11.	$2x^3-x^2+3$	24.	$\sin(3x-2)$
12.	$\frac{4}{(2x+1)^2}$	25.	$2(x-4)^2$
13.	$\frac{1}{\sqrt{x+3}}$	26.	$\ln(3x+4)$

2. ***Составить уравнение касательной к графику функции*** $f(x)$

вариант	которая параллельна данной прямой	вариант	в точке с данной абсциссой
1.	$f(x)=\ln\frac{x-1}{x^2}$, $y=0$	14.	$f(x)=x^2-7x+3$, $x=4$
2.	$f(x)=\ln(x^2-2x)$, $y=\frac{3}{4}x+1$	15.	$f(x)=2x^2-5x+1$, $x=3$
3.	$f(x)=\text{arctg}\sqrt{x}$, $y=\frac{1}{4}x-2$	16.	$f(x)=x^3+3x+2$, $x=2$
4.	$f(x)=x^2-2x$, $y=\frac{3-x}{2}$	17.	$f(x)=3x^2+6x-3$, $x=1{,}5$
5.	$f(x)=\text{tg}\,x$, $2x-y+3=0$	18.	$f(x)=x^3+x^2+1$, $x=1$
6.	$f(x)=x^4-2x^2+3$, $y=5$	19.	$f(x)=3x^2-5x-4$, $x=2{,}3$
7.	$f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+1$, $x+y+3=0$	20.	$f(x)=2x^3+3x^2-x$, $x=2$

8.	$f(x)=\arcsin x,\ 2x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}=0$	21.	$f(x)=2x^2-6x+1,\ x=2{,}4$
9.	$f(x)=\dfrac{2x}{x-1},\ 2x+y=5$	22.	$f(x)=x^3-2x^2+1,\ x=2$
10.	$f(x)=\dfrac{x-1}{x+1},\ x-2y+10=0$	23.	$f(x)=3x^3+2x^2,\ x=1$
11.	$f(x)=x^3-2x^2+1,\ y=x+4$	24.	$f(x)=x^3-2x+3,\ x=3$
12.	$f(x)=\ln(2x^2+x),\ y-2x=3$	25.	$f(x)=x^2+5x-1,\ x=1{,}2$
13.	$f(x)=x^2+x-3,\ y=1-\dfrac{2}{3}x$	26.	$f(x)=3x^2-x-5,\ x=2$

3. ***Вычислить приближенное значение α, используя дифференциал***:

вариант		вариант	
1.	$\alpha=(2{,}87)^5$	14.	$\alpha=\sqrt[5]{64}$
2.	$\alpha=\sqrt[3]{8{,}213}$	15.	$\alpha=\sqrt[3]{26{,}19}$
3.	$\alpha=\lg 99{,}9$	16.	$\alpha=\sqrt[4]{16{,}64}$
4.	$\alpha=(1{,}91)^4$	17.	$\alpha=\sqrt{8{,}76}$
5.	$\alpha=\sqrt[4]{15{,}99}$	18.	$\alpha=(4{,}01)^{1{,}5}$
6.	$\alpha=\mathrm{tg}\ 46^0$	19.	$\alpha=\cos 151^0$
7.	$\alpha=(3{,}908)^3$	20.	$\alpha=\cos 61^0$
8.	$\alpha=\mathrm{ctg}\ 44^0$	21.	$\alpha=\mathrm{arctg}\ 1{,}05$

9.	$\alpha=\sqrt{16{,}032}$	22..	$\alpha=\ln(e^2+0{,}2)$
10.	$\alpha=(3{,}018)^4$	23.	$\alpha=e^{0{,}25}$
11.	$\alpha=\sqrt{9{,}02}$	24.	$\alpha=\sqrt[4]{18{,}2}$
12.	$\alpha=(2{,}27)^4$	25.	$\alpha=\cos 31^0$
13.	$\alpha=\sqrt[3]{12{,}487}$	26.	$\alpha=\mathrm{tg}\ 62^0$

4. ***Продифференцировать данные функции***:

вари-ант				
1.	*a*	$y=\sqrt[3]{3x^4+2x-5}+\dfrac{4}{(x-2)^5}$	*b*	$y=\sin^3 2x\cdot\cos 8x^5$
	c	$y=\dfrac{e^{\arccos^3 x}}{\sqrt{x+5}}$	*d*	$y=(\mathrm{cth}3x)^{\arcsin x}$
2.	*a*	$y=\sqrt[3]{(x-3)^4}-\dfrac{3}{2x^3-3x+1}$	*b*	$y=\cos^5 3x\cdot\mathrm{tg}(4x+1)^3$
	c	$y=\dfrac{(x-4)^2}{e^{\mathrm{arcctg}x}}$	*d*	$y=(\cos(x+2))^{\ln x}$
3.	*a*	$y=\sqrt{(x-4)^5}+\dfrac{5}{(2x^2+4x-1)^2}$	*b*	$y=\mathrm{tg}^4 x\cdot\arcsin 4x^5$
	c	$y=\dfrac{e^{-x^3}}{\sqrt{x^2+5x-1}}$	*d*	$y=(\sin 3x)^{\arccos x}$
4.	*a*	$y=\sqrt[5]{7x^2-3x+5}-\dfrac{5}{(x-1)^3}$	*b*	$y=\arcsin^3 2x\cdot\mathrm{ctg}7x^4$
	c	$y=\dfrac{e^{-\mathrm{ctg}5x}}{(3x^2-4x+2)}$	*d*	$y=(\mathrm{th}5x)^{\arcsin(x+1)}$
5.	*a*	$y=\sqrt[4]{3x^2-x+5}-\dfrac{3}{(x-5)^4}$	*b*	$y=\mathrm{ctg}3x\cdot\arccos 3x^2$
	c	$y=\dfrac{\sqrt{7x^3-5x+2}}{e^{\cos x}}$	*d*	$y=(\mathrm{sh}(x+2))^{\arcsin 2x}$

6.	*a*	$y=\sqrt{3x^4-2x^3+x}-\dfrac{4}{(x+2)^3}$	*b*	$y=\arccos^2 4x\times$ $\times\ln(x-3)$
	c	$y=\dfrac{e^{\operatorname{tg}3x}}{\sqrt{3x^2-x+4}}$	*d*	$y=(\cos 5x)^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$
7.	*a*	$y=\sqrt[3]{(x-7)^5}+\dfrac{5}{4x^2+3x-5}$	*b*	$y=\ln^5 x\cdot\operatorname{arctg}7x^4$
	c	$y=\dfrac{e^{\sin x}}{(x-5)^7}$	*d*	$y=(\sqrt{3x+2})^{\operatorname{arcctg}3x}$
8.	*a*	$y=\sqrt[5]{(x+4)^6}-\dfrac{2}{2x^2-3x+7}$	*b*	$y=\operatorname{arctg}^3 4x\cdot 3^{\sin x}$
	c	$y=\dfrac{\sqrt[3]{2x^2-3x+1}}{e^{-x}}$	*d*	$y=(\ln(x+3))^{\sin\sqrt{x}}$
9.	*a*	$y=\dfrac{3}{(x-4)^7}-\sqrt{5x^2-4x+3}$	*b*	$y=2^{\cos x}\cdot\operatorname{arcctg}5x^3$
	c	$y=\dfrac{\sqrt{x^3+4x-5}}{e^{x^3}}$	*d*	$y=(\log_2(x+4))^{\operatorname{ctg}7x}$
10.	*a*	$y=\sqrt[3]{4x^2-3x-4}-\dfrac{2}{(x-3)^5}$	*b*	$y=4^{-x}\cdot\ln^5(x+2)$
	c	$y=\dfrac{e^{\operatorname{ctg}5x}}{(x+4)^3}$	*d*	$y=(\operatorname{sh}3x)^{\operatorname{arctg}(x+2)}$
11.	*a*	$y=\dfrac{7}{(x-1)^3}+\sqrt{8x-3+x^2}$	*b*	$y=3^{tgx}\cdot\arcsin 7x^4$
	c	$y=\dfrac{\sqrt{3+2x-x^2}}{e^x}$	*d*	$y=(\operatorname{ch}3x)^{\operatorname{ctg}1/x}$
12.	*a*	$y=\sqrt[5]{3x^2+4x-5}-\dfrac{4}{(x-4)^4}$	*b*	$y=5^{x^2}\cdot\arccos 2x^5$
	c	$y=\dfrac{e^{3x}}{\sqrt{3x^2-4x-7}}$	*d*	$y=(\arcsin 5x)^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$
13.	*a*	$y=\dfrac{7}{(x-1)^3}+\sqrt{8x-3+x^2}$	*b*	$y=\sin^4 3x\cdot\operatorname{arctg}2x^3$
	c	$y=\dfrac{e^{-\sin 2x}}{(x+5)^4}$	*d*	$y=(\arccos 5x)^{\ln x}$
14.	*a*	$y=\dfrac{3}{(x+2)^5}-\sqrt[7]{5x-7x^2-3}$	*b*	$y=\cos^3 4x\cdot\operatorname{arcctg}\sqrt{x}$
	c	$y=\dfrac{e^{\cos 5x}}{\sqrt{x^2-5x-2}}$	*d*	$y=(\operatorname{arctg}2x)^{\sin x}$

15.	*a*	$y=\sqrt[4]{(x-1)^5}-\dfrac{4}{7x^2-3x+2}$	*b*	$y=\mathrm{tg}^3 2x\cdot\arcsin x^5$
	c	$y=\dfrac{(2x+5)^3}{e^{\mathrm{tg}x}}$	*d*	$y=(\ln(x+7))^{\mathrm{ctg}\,2x}$
16.	*a*	$y=\sqrt[5]{(x-2)^6}-\dfrac{3}{7x^3-x^2-4}$	*b*	$y=\mathrm{ctg}^7 x\cdot\arccos 2x^3$
	c	$y=\dfrac{e^{-\mathrm{tg}3x}}{4x^2-3x+5}$	*d*	$y=(\mathrm{ctg}(7x+4))^{\sqrt{x+3}}$
17.	*a*	$y=\dfrac{3}{(x+4)^2}-\sqrt[3]{4+3x-x^4}$	*b*	$y=e^{-\sin x}\mathrm{tg}7x^6$
	c	$y=\dfrac{e^{-\sin 4x}}{(2x-5)^6}$	*d*	$y=(\mathrm{th}\sqrt{x+1})^{\mathrm{arctg}\,2x}$
18.	*a*	$y=\dfrac{2}{(x-1)^3}-\dfrac{8}{6x^2+3x-7}$	*b*	$y=e^{\cos x}\mathrm{ctg}8x^3$
	c	$y=\dfrac{3x^2-5x+10}{e^{-x^4}}$	*d*	$y=\left(\mathrm{cth}\dfrac{1}{x}\right)^{\arcsin 7x}$
19.	*a*	$y=\sqrt{1+5x-2x^2}+\dfrac{3}{(x-3)^4}$	*b*	$y=\cos^5 x\cdot\arccos 4x$
	c	$y=\dfrac{e^{-x}}{(2x^2-x+4)^2}$	*d*	$y=(\cos(x+5))^{\arcsin 3x}$
20.	*a*	$y=\sqrt[3]{5+4x-x^2}-\dfrac{5}{(x+1)^3}$	*b*	$y=\sin^3 7x\cdot\mathrm{arcctg}5x^2$
	c	$y=\dfrac{e^{4x}}{(3x+5)^3}$	*d*	$y=(\sqrt{x+5})^{\arccos 3x}$
21.	*a*	$y=\dfrac{2}{(x+1)^5}+\sqrt{5x-1+x^2}$	*b*	$y=e^{\cos x}\mathrm{ctg}3x^4$
	c	$y=\dfrac{4x^2-2x+7}{e^{-x^2}}$	*d*	$y=(\log_2(x+6))^{\mathrm{tg}3x}$
22.	*a*	$y=\sqrt[3]{(x-1)^4}-\dfrac{1}{3x^3+x-2}$	*b*	$y=3^{x^2}\cdot\arcsin 2x^3$
	c	$y=\dfrac{(3x-4)^3}{e^{\mathrm{ctg}x}}$	*d*	$y=(\mathrm{th}(3x+4))^{\arcsin 5x}$
23.	*a*	$y=\sqrt[4]{(x-2)^5}-\dfrac{2}{x^2-3x+6}$	*b*	$y=\sin^3 3x\cdot\cos 5x^4$

	c	$y=\dfrac{e^{\sin 3x}}{\sqrt{2x^2+3x-2}}$	*d*	$y=(\cos 5x)^{\arcsin(x+3)}$
24.	*a*	$y=\dfrac{3}{(x+3)^3}+\dfrac{5}{4x^2-3x-2}$	*b*	$y=\mathrm{tg}^2 3x\cdot\arcsin x^2$
	c	$y=\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+3x-5}}{e^x}$	*d*	$y=(\arccos(4x+1))^{\ln 2x}$
25.	*a*	$y=\sqrt[5]{x^2+6x-3}-\dfrac{3}{(x-2)^4}$	*b*	$y=\arccos 5x\cdot\cos^3 x$
	c	$y=\dfrac{\sqrt{3x^3-2x+7}}{e^{\cos x}}$	*d*	$y=(\mathrm{ch}\,(3x+7))^{\arccos 4x}$
26.	*a*	$y=\dfrac{2}{(x-3)^6}-\sqrt{3x^2-5x+7}$	*b*	$y=\ln(x+2)\times$ $\times\arccos^2 5x$
	c	$y=\dfrac{e^{4x}}{\sqrt{2x^2-4x+5}}$	*d*	$y=(\cos(4x+5))^{\sqrt{x-3}}$

5. ***Найти*** y' ***и*** y'':

вариант	a	b
1.	$y^2=8x$	$\begin{cases} x=(2t+3)\cos t \\ y=3t^3 \end{cases}$
2.	$x^2/5+y^2/7=1$	$\begin{cases} x=2\cos^2 t \\ y=3\sin^2 t \end{cases}$
3.	$y=x+\mathrm{arctg}\, y$	$\begin{cases} x=6\cos^3 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$
4.	$x^2/5+y^2/3=1$	$\begin{cases} x=1/(t+2) \\ y=(t/(t+2))^2 \end{cases}$
5.	$y^2=25x-4$	$\begin{cases} x=e^{-2t} \\ y=e^{4t} \end{cases}$
6.	$\mathrm{arcctg}\, y=4x+5y$	$\begin{cases} x=\sqrt{t} \\ y=\sqrt[5]{t} \end{cases}$
7.	$y^2-x=\cos y$	$\begin{cases} x=2t/(1+t^3) \\ y=t^2/(1+t^2) \end{cases}$

8.	$3x+\sin y=5y$	$\begin{cases} x=\sqrt{t^2-1} \\ y=(t+1)/\sqrt{t^2-1} \end{cases}$
9.	$\operatorname{tg} y=3x+5y$	$\begin{cases} x=4t+2t^2 \\ y=5t^3-3t^2 \end{cases}$
10.	$xy=\operatorname{ctg} y$	$\begin{cases} x=(\ln t)/t \\ y=t\ln t \end{cases}$
11.	$y=e^y+4x$	$\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \end{cases}$
12.	$\ln y-y/x=7$	$\begin{cases} x=t^4 \\ y=\ln t \end{cases}$
13.	$y^2+x^2=\sin y$	$\begin{cases} x=5\cos t \\ y=4\sin t \end{cases}$
14.	$e^y=4x-7y$	$\begin{cases} x=5\cos^2 t \\ y=3\sin^2 t \end{cases}$
15.	$4\sin^2(x+y)=x$	$\begin{cases} x=\operatorname{arctg} t \\ y=\ln(1+t^2) \end{cases}$
16.	$\sin y=7x+3y$	$\begin{cases} x=\arcsin t \\ y=\sqrt{1-t^2} \end{cases}$
17.	$\operatorname{tg} y=4y-5x$	$\begin{cases} x=3(t-\sin t) \\ y=3(1-\cos t) \end{cases}$
18.	$y=7x-\operatorname{ctg} y$	$\begin{cases} x=3(\sin t-t\cos t) \\ y=3(\cos t+t\sin t) \end{cases}$
19.	$xy-6=\cos y$	$\begin{cases} x=\sin 2t \\ y=\cos^2 t \end{cases}$
20.	$3y=7+xy^3$	$\begin{cases} x=e^{3t} \\ y=e^{-3t} \end{cases}$
21.	$(2-x)y^2=x^3$	$\begin{cases} x=e^{-t} \\ y=t^3 \end{cases}$
22.	$\ln y+xy=1$	$\begin{cases} x=t+2t^2 \\ y=-t^3+3t-2 \end{cases}$

23.	$y = \mathrm{ctg}\, y - 3x$	$\begin{cases} x = t^2 + 6t + 5 \\ y = t^3 - 5 \end{cases}$
24.	$x^2/7 + y^2/2 = 1$	$\begin{cases} x = 2\sin^2 t \\ y = 5\cos^2 t \end{cases}$
25.	$y^2 - y = 3x$	$\begin{cases} x = \sqrt[3]{t-1} \\ y = \sqrt{t+2} \end{cases}$
26.	$y - x = \sin^2 y$	$\begin{cases} x = (1-3t)\sin t \\ y = 2t^3 \end{cases}$

6. ***Для данной функции*** y ***и аргумента*** x_0 ***вычислить*** $y'''(x_0)$:

вариант		вариант	
1.	$y = \sin^2 x, \quad x_0 = \pi/2$	14.	$y = \arcsin x, \quad x_0 = 0$
2.	$y = \mathrm{arctg} x, \quad x_0 = 1$	15.	$y = (5x-4)^5, \quad x_0 = 2$
3.	$y = \ln(2 + x^2), \quad x_0 = 0$	16.	$y = x\sin x, \quad x_0 = \pi/2$
4.	$y = e^x \cos x, \quad x_0 = 0$	17.	$y = x^2 \ln x, \quad x_0 = 1/3$
5.	$y = e^x \sin 2x, \quad x_0 = 0$	18.	$y = x\sin 2x, \quad x_0 = -\pi/4$
6.	$y = e^{-x}\cos x, \quad x_0 = 0$	19.	$y = x\cos 2x, \quad x_0 = \pi/12$
7.	$y = \sin 2x, \quad x_0 = \pi$	20.	$y = x^4 \ln x, \quad x_0 = 1$
8.	$y = (2x+1)^5, \quad x_0 = 1$	21.	$y = x + \mathrm{arctg} x, \quad x_0 = 1$
9.	$y = \ln(1+x), \quad x_0 = 2$	22.	$y = \cos^2 x, \quad x_0 = \pi/4$
10.	$y = \frac{1}{2}x^2 e^x, \quad x_0 = 0$	23.	$y = \ln(x^2 - 4), \quad x_0 = 3$
11.	$y = e^{-x}\cos 3x, \quad x_0 = 0$	24.	$y = \ln(2x^2 - 3), \quad x_0 = 1$
12.	$y = (2-3x)^4, \quad x_0 = 1$	25.	$y = x\ln(x+3), \quad x_0 = -2$

13.	$y = \cos 4x, \quad x_0 = \pi/8$	26.	$y = 3x^2 e^{2x}, \quad x_0 = 0$

7. ***Решить задачу***:

1) В равнобедренный треугольник с основанием 20 см и высотой 8 см вписан прямоугольник, одна из сторон которого лежит на основании треугольника. Какова должна быть высота прямоугольника, чтобы он имел наибольшую площадь?

2) Найти на оси Ох точку, сумма расстояний от которой до точек $M_1(1, 2)$ и $M_2(4, 3)$ имеет наименьшее значение.

3) В эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вписать прямоугольник наибольшей площади.

4) В данный конус вписать цилиндр наибольшего объема.

5) Построить прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием, который при заданной поверхности имел бы наибольший объем.

6) В данный шар вписать конус наибольшего объема.

7) В данный шар вписать цилиндр с наибольшей боковой поверхностью.

8) Проволоку длиной 1 согнуть в круговой сектор наибольшей площади.

9) Найти кратчайшее расстояние от точки $M_0(2,1)$ до кривой $y = 1 + \sqrt{2\ln x}$.

10) Найти размеры консервной банки объемом V с наименьшей поверхностью.

11) Найти наибольший объем конуса с данной образующей *l*.

12) Найти наименьший объем конуса, описанного около полушара радиуса *a*.

13) При каком наклоне боковых сторон равнобедренной трапеции ее площадь будет наибольшая, если меньшее основание трапеции равно *a*, а боковые стороны равны *b*.

14) Данное положительное число *a* разложить на два слагаемые так, чтобы их произведение было наибольшим.

15) Кусок проволоки данной длины *l* согнуть в виде прямоугольника так, чтобы площадь последнего была наибольшей.

16) Найти число, которое, будучи сложено со своим квадратом, дает наименьшую сумму.

17) Найти положительное число, которое, будучи сложено с обратным ему числом, дает наименьшую сумму.

18) Определить наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в круг радиуса *a*.

19) Найти наименьшее значение суммы квадратов двух положительных чисел, произведение которых постоянно и равно *a*.

20) Найти такое положительное число, чтобы разность между ним и его кубом была наибольшей.

21) Представьте число 28 в виде суммы двух слагаемых так, чтобы сумма их кубов была минимальна.

22) На графике функции $y=\dfrac{2}{x^2}$ найдите координаты точек, ближайших к началу координат.

23) Из всех прямоугольников с данным периметром *p* найдите тот, у которого диагональ наименьшая.

24) В равносторонний треугольник с периметром равным 36, вписан прямоугольник наибольшей площади. Найдите длины сторон прямоугольника.

25) Найдите наименьшее значение периметра основания прямоугольного параллелепипеда, объём которого равен 4, а одна из боковых граней является квадратом.

26) Периметр равнобедренного треугольника равен 2*p*. Каковы должны быть его стороны, чтобы объём тела, образованного вращением этого треугольника вокруг его основания, был наибольшим?

8. ***Раскрыть неопределенности с помощью правила Лопиталя***:

Вариант	*a*	*b*	*c*
1.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{\ln x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx}$
2.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos x}{\cos x-1}$	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-0}\left(tgx-\dfrac{1}{1-\sin x}\right)$	$\lim\limits_{x\to +0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{tgx}$
3.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-ctg^2x\right)$	$\lim\limits_{x\to \infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$
4.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}$	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}6\left(\dfrac{x}{ctgx}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
5.	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{ctgx}{x}\right)$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$	$\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{1}{\ln\left(e^{-x}-1\right)}$
6.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$	$\lim\limits_{x\to +0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$

7.	$\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin x(\sin x)-\sin^2 x}{x^6}$	$\lim\limits_{x\to\infty}(\pi-2arctg\,x)\ln x$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(tgx)^{ctgx}$
8.	$\lim\limits_{x\to1}\frac{2^{\ln x}-x}{\ln x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$	$\lim\limits_{x\to+0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$
9.	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{4x}-\frac{1}{2x(e^x+1)}\right)$	$\lim\limits_{x\to-1+0}\sqrt[3]{x+1}\ln^2(x+1)$.	$\lim\limits_{x\to+0}(\ln ctg\,x)^{tgx}$
10.	$\lim\limits_{x\to0}\frac{tgx-x}{x-\sin x}$	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right)$	$\lim\limits_{x\to1}\frac{2^{\ln x}-x}{\ln x}$
11.	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{tg\,x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$	$\lim\limits_{x\to+0}(\ln ctgx)^{tgx}$
12.	$\lim\limits_{x\to0}\frac{tg2x-\sin 2x}{x^3}$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tg\,x+\frac{2}{2x-\pi}\right)$	$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}$
13.	$\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}\right)$	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$
14.	$\lim\limits_{x\to0}\frac{chx-1}{1-\cos x}$	$\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{5}{x^2-x-6}\right)$	$\lim\limits_{x\to+0}(\ln ctg\,x)^{tg\,x}$
15.	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\sin 3x)}{\ln(\sin x)}$	$\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)ctg\,x$	$\lim\limits_{x\to0}(ctgx)^{\sin x}$
16.	$\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}$	$\lim\limits_{x\to1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}$	$\lim\limits_{x\to0}(ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}$
17.	$\lim\limits_{x\to0}\frac{x-arctgx}{x^3}$	$\lim\limits_{x\to0}\arcsin x\,ctg\,x$	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tg\,x}$
18.	$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(e^{x-1}-1)}{\ln x}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}x^n e^{-x}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}(x)^{\frac{1}{x}}$
19.	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x-arctg\,x}{\ln(1+x^3)}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi-2\,arc\,tg\,x)\ln x$	$\lim\limits_{x\to0}x^{\frac{3}{4+\ln x}}$
20.	$\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tg\,x-\sec x)$	$\lim\limits_{x\to0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$
21.	$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x-x}$	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$	$\lim\limits_{x\to+0}(1+x)^{\ln x}$
22.	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln tgx}{ctg2x}$	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\arcsin x}\right)$	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$

23.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{tg^2 x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$
24.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{xarctgx}-\dfrac{1}{x^2}\right)$	$\lim\limits_{x\to +0}(\arcsin x)^{tgx}$
25.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ch2x-1}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\sin x\ln ctgx$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\pi-2x)^{\cos x}$
26.	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(x^2-8)}{2x^2-5x-3}$	$\lim\limits_{x\to\infty}x^2e^{-x^3}$	$\lim\limits_{x\to\infty}(3x^2+3^x)^{\frac{1}{x}}$

9. ***Провести полное исследование и построить графики функций***:

вариант	*A*	*b*
1.	$y=x^4-2x-3$	$y=\dfrac{x-1}{x^2-2x}$
2.	$y=x^3(10-3x^2)$	$y=x^2-\ln x$
3.	$y=\left(x^2-1\right)^3$	$y=(x-1)\,e^{3x-1}$
4.	$y=(x^2-2x+3)^2$	$y=x-\sqrt[3]{x^2}$
5.	$y=\left(x^2-4\right)^3$	$y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$
6.	$y=x-2x^4-1$	$y=e^{2x-x^2}$
7.	$y=\left(x^3-1\right)^2$	$y=\dfrac{x^2-x-1}{x^2-2x}$
8.	$y=3x^3-40x^2+240x$	$y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$
9.	$y=\dfrac{x^5+x^3}{5}+3x$	$y=\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$
10.	$y=x^2(x^3-20)$	$y=(x-5)\sqrt[3]{x^2}$

11.	$y=(3x-5)^6$	$y=x^2 \operatorname{arctg} x$
12.	$y=2x^4-x^2+1$	$y=x\ln x$
13.	$y = 36\,x\,(x-1)^3$	$y = x^3 e^{-4x}$
14.	$y = 32\,x^2\,(x^2-1)^3$	$y = x^2 e^{-x}$
15.	$y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$	$y=x^2e^{-x^2}$
16.	$y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$	$y=\ln(x^2+1)$
17.	$y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$	$y=x+\sin x$
18.	$y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$	$y=\ln\cos x$
19.	$y=\dfrac{x}{x^2-1}$	$y = x\,e^{-x}$
20.	$y = x^3 - 3x^2$	$y=x\sqrt{x+3}$
21.	$y=\dfrac{1}{4}(x^3+3x^2-9x-3)$	$y=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$
22.	$y=\dfrac{x^3}{4(2-x)^2}$	$y=e^{4x-x^2}$
23.	$y=x^3-3x^2+4$	$y=x\ln^2 x$
24.	$y=\dfrac{x^2+x-1}{x^2-2x+1}$	$y=x^2\ln x$
25.	$y=(x-1)^2(x+2)$	$y=e^{1-x^2}$
26.	$y=(x+2)^2(x-1)^2$	$y=\dfrac{x}{2}-arctgx$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Учебники и учебная литература

1. Ильин В.А., Позняк Э.Т.. Основы математического анализа. – М.: Наука, 1982. – Ч. 1.
2. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов В.К. Математический анализ. – М.: Наука, 1979. – Т. 1.
3. Никольский С.М. Курс математического анализа. – М.: Наука, 1990. – Т. 1.
4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. – М.: Наука, 1989. – Т. 1.
5. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. – Физматгиз. 1960. – Т. 1.
6. Иванова Ж.В., Сурин Т.Л., Шерегов С.В. Математический анализ. Введение в анализ. Производная. – Витебск: УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2008.
7. Иванова Ж.В., Сурин Т.Л., Шерегов С.В. Математический анализ. Применение дифференциального исчисления. Интегральное исчисление функции одной переменной. – Витебск: УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2008.

Сборники задач и упражнений

8. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985.
9. Демидович Б.П Сборник задач по математическому анализу. – М.: Наука, 1990.
10. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попо, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1986. –Ч. 1.
11. Давыдов Н.А., Коровкин П.П., Никольский Б.Н. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Просвещение, 1990.
12. Индивидуальные задания по высшей математике / под ред. А.П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 2008. – Ч. 1.

Учебное издание

СУРИН Татьяна Леонидовна

ИВАНОВА Жанна Викторовна

ШЕРЕГОВ Сергей Викторович

**СБОРНИК ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

Технический редактор *Г.В. Разбоева*

Компьютерный дизайн *И.В. Волкова*

Подписано в печать 13.11.2013. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,96. Уч.-изд. л. 2,27. Тираж 95 экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
ЛИ № 02330/110 от 30.01.2013.

Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.