Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра геометрии и математического анализа

Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

***Методические рекомендации
к практическим занятиям***

*Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2022*

УДК 517.2(076.5)
ББК 22.161.11я73
С90

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 2 от 05.01.2022.

Авторы: доценты кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидаты физико-математических наук, доценты **Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова**

Рецензент:
заведующий кафедрой математики и информационных технологий УО «ВГТУ», кандидат физико-математических наук, доцент *Т.В. Никонова*

Сурин, Т.Л.

С90 Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной : методические рекомендации к практическим занятиям / Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2022. – 48 с.

Данное издание предназначено для проведения практических занятий по дисциплинам: «Дифференциальное исчисление», «Дифференциальное и интегральное исчисление» и «Математический анализ» и организации самостоятельной работы студентов первого курса факультета МиИТ, обучающихся по специальностям «Математика и информатика», «Прикладная математика», «Прикладная информатика». Издание содержит разбор наиболее типичных примеров, демонстрирующих применение на практике результатов теории, задания для аудиторной и домашней работы.

УДК 517.2(076.5)
ББК 22.161.11я73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данное издание предназначено для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы по курсу «Дифференциальное и интегральное исчисление» студентов факультета МиИТ, обучающихся по специальности «Прикладная математика». Оно также может быть использовано при проведении практических занятий по математическому анализу у студентов первого курса специальности «Прикладная информатика» и по дисциплине «Дифференциальное исчисление» у студентов специальности «Математика и информатика».

Основное назначение методических рекомендаций – помочь студентам математических специальностей в освоении курса математического анализа. По этой дисциплине существует ряд хороших задачников, список которых приведен в конце пособия. Однако, из-за слишком большого объема в них зачастую трудно ориентироваться и выбрать нужный материал для подготовки к экзамену. Кроме того, имеющиеся сборники задач не дают возможности индивидуализировать процесс обучения, поскольку не содержат достаточного количества однотипных задач.

Издание охватывает вопросы математического анализа, относящиеся к темам: «Применение дифференциального исчисления функции одной переменной», «Неопределенный интеграл» и «Определенный интеграл». Для студентов специальностей «Математика и информатика» и «Прикладная информатика» дополнительно приведен раздел «Несобственный интеграл», который не рассматривается в курсе «Дифференциальное и интегральное исчисление» для специальности «Прикладная математика». Каждый раздел состоит из 2 пунктов. В пункте I – «Примеры решения задач» – разобраны наиболее типичные примеры, демонстрирующие применение на практике результатов теории. Этот пункт студенты должны разобрать самостоятельно при подготовке к практическому занятию по данной теме. В пункте II – «Задачи и упражнения для практических занятий» – приведены задания для аудиторной и домашней работы.

Материал, приведенный в методических рекомендациях, соответствует учебным программам дисциплин: «Дифференциальное исчисление», «Дифференциальное и интегральное исчисление» и «Математический анализ» для вышеперечисленных специальностей.

Предлагаемое издание может быть полезно для студентов других специальностей, изучающих высшую математику.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

I. Примеры решения задач

***Пример* 1.** *Показать, что уравнение* $x^3 + 6x - 5 = 0$ *имеет только один действительный корень.*

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 + 6x - 5$. Данная функция непрерывна и дифференцируема на всей числовой прямой. При этом $f(1) = 2$, $f(-1) = -12$. Следовательно, по первой теореме Коши для непрерывных функций, на отрезке $[-1, 1]$ существует точка ξ, такая что $f(\xi) = 0$. Значит, уравнение $x^3 + 6x - 5 = 0$ имеет, по крайней мере, один действительный корень.

Докажем, что этот корень единственный. Предположим, что уравнение имеет два корня c_1 и c_2, тогда $f(c_1) = f(c_2) = 0$, и, по теореме Ролля, между точками c_1 и c_2 нашлась бы такая точка c, что $f'(c) = 0$. Однако производная функции $f'(x) = 3x^2 + 6 > 0$ при любых действительных значениях x. Наше предположение не верно, следовательно, уравнение имеет не более одного действительного корня.

***Пример* 2.** *Определить значение с из теоремы Лагранжа для функции* $y = x^3 + 3x^2 + 6$ *на отрезке* $[1, 2]$.

Решение. Функция непрерывна и дифференцируема на отрезке $[1, 2]$. Следовательно, по теореме Лагранжа для данной функции существует точка $c \in [1, 2]$, в которой справедливо равенство:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

В данном случае: $f(b) = f(2) = 26$, $f(a) = f(1) = 10$,
$f'(x) = 3x^2 + 6x$, $f'(c) = 3c^2 + 6c$.

Подставив найденные значения в формулу Лагранжа, получим:

$$3c^2 + 6c = 26 - 10 \text{ или } 3c^2 + 6c - 16 = 0.$$

Найдем корни этого уравнения: $c_1 = \dfrac{-3 + \sqrt{57}}{3}$; $c_2 = \dfrac{-3 - \sqrt{57}}{3}$.

Очевидно, что c_2 не принадлежит отрезку $[1, 2]$. Значит $c = \dfrac{-3 + \sqrt{57}}{3}$.

***Пример* 3.** *Разложить функцию* $y = \operatorname{tg} x$ *по формуле Маклорена до члена с* x^3 *включительно. Записать остаточный член в форме Лагранжа.*

Решение. Формула Маклорена для функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $(0 < \theta < 1)$ – остаточный член в форме Лагранжа. Найдём производную функции $y = \operatorname{tg} x$ до четвертого порядка включительно.

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad y'' = 2\cos^{-3} x \cdot \sin x = \frac{2\sin x}{\cos^3 x};$$

$$y''' = \frac{2\cos^2 x + 6\sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{2 + 4\sin^2 x}{\cos^4 x}; \quad y^{IV} = \frac{8\sin x(2 + \sin x)}{\cos^5 x}.$$

Отсюда получаем:

$$F(0) = 0, \qquad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 2, \quad f^{IV}(\theta x) = \frac{8\sin\theta x(2 + \sin\theta x)}{\cos^5\theta x}.$$

Тогда, по формуле Маклорена $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + R_4(x)$,

где $R_4(x) = \dfrac{8\sin\theta x(2 + \sin\theta x)}{4!\cos^5\theta x}x^4 = \dfrac{\sin\theta x(2 + \sin\theta x)}{3\cos^5\theta x}x^4$.

***Пример* 4.** *Разложить по формуле Маклорена функцию* $f(x) = \ln(5 - 4x)$.

Решение. Воспользуемся известным разложением:

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + 0(x^n).$$

Тогда $\ln(5 - 4x) = \ln 5 + \ln(1 - \frac{4}{5}x) =$

$$= \ln 5 - \frac{4}{5}x + \frac{4^2}{5^2}\frac{x^2}{2} - \frac{4^3}{5^3}\frac{x^3}{3} + \frac{4^4}{5^4}\frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n 4^n x^n}{5^n n} + 0(x^n).$$

***Пример* 5.** *Вычислить число e с точностью до* 10^{-6}.

Решение. Воспользуемся формулой

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x).$$

Запишем $R_n(x)$ в форме Лагранжа: $R_{n+1}(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$, $(0 < \theta < 1)$.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + R_{n+1}(1). \quad |R_{n+1}(1)| \le \frac{e}{(n+1)!}.$$

Если взять $n = 9$, то $\dfrac{e}{10!} < \dfrac{3}{3\cdot 10^6} = 10^{-6}$. Тогда

$$e \approx 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{720\cdot 7} + \frac{1}{720\cdot 56} + \frac{1}{720\cdot 56\cdot 9} \approx 2{,}718282.$$

II. Задачи и упражнения для практических занятий

1. В формуле Лагранжа определить значение c на отрезке [0; 2] для функций:

1) $y = x^2$; 2) $y = 5x^3 + 2x$; 3) $y = \dfrac{1}{x^2+3}$; 4) $y = \sqrt[3]{x+1}$.

2. Определить значение c в формуле Коши для функций:

1) $f(x) = x^3$ и $g(x) = x^2 + 1$, заданных на отрезке [1; 2];

2) $f(x) = \sin x$ и $g(x) = 1 + \cos x$, заданных на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$.

3. Доказать, что уравнения

1) $x^5 + 3x - 6 = 0$; 2) $x^3 + 5x + 2 = 0$; 3) $x^5 - 2x^4 - x^2 - 5 = 0$

имеют единственный корень на всей числовой оси.

4. Разложить многочлен $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x + 3$ по степеням $x + 1$.

5. Разложить многочлен $f(x) = x^5$ по степеням $x - 1$.

6. Разложить функцию $f(x)$ по формуле Маклорена до члена указанного порядка включительно:

1) $f(x) = e^{2x-x^2}$ до члена с x^4; 2) $f(x) = \sqrt[3]{\sin x}$ до члена с x^4;

3) $f(x) = \sqrt{1-x+2x^2}$ до члена с x^3.

7. Пользуясь известными разложениями, разложить по формуле Маклорена функции:

1) $f(x) = \sin^2 x$; 2) $f(x) = e^{-x^2}$; 3) $f(x) = \ln(3 + x)$; 4) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

8. С помощью формулы Тейлора найдите приближенные значения:

1) $\sqrt[3]{9}$ с точностью до 10^{-3}; 2) $\sqrt[4]{90}$ с точностью до 10^{-4};

3) $\sin 10^0$ с точностью до 10^{-3}; 4) $\cos 1^0$ с точностью до 10^{-5};

5) ln1,1 с точностью до 10^{-3}; 6) $e^{0,1}$ с точностью до 10^{-4}.

ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

I. *Примеры решения задач*

Пример. *Найти пределы, раскрыв неопределенности, используя правило Лопиталя*:

$$а)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2};\quad б)\ \lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{tgx}-\frac{1}{x}\right);\quad в)\ \lim_{x\to1}(1-x)\cdot tg\frac{\pi x}{2};\quad г)\ \lim_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}.$$

Решение.

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty;$$

$$б)\ \lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{tgx}-\frac{1}{x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to+0}\frac{x-tgx}{xtgx}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{(x-tgx)'}{(xtgx)'}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{1-\frac{1}{\cos^2 x}}{tgx+\frac{x}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\cos^2 x-1}{\sin x\cdot\cos x+x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{-2\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x+1}=\frac{0}{2}=0.$$

$$в)\ \lim_{x\to1}(1-x)\cdot tg\frac{\pi x}{2}=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{ctg\frac{\pi x}{2}}=(\frac{0}{0})=\lim_{x\to1}\frac{(1-x)'}{(ctg\frac{\pi x}{2})'}=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{-1}{-\frac{1}{\sin^2(\frac{\pi x}{2})}\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1}\sin^2(\frac{\pi x}{2})=\frac{2}{\pi}\cdot1=\frac{2}{\pi}$$

г) Рассмотрим функцию $y=x^{\frac{1}{1-x}}$. Пусть $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}=a.$ Прологарифмируем обе части данного равенства:

$$\ln a=\ln\left(\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}\right)=\lim_{x\to1}\ln x^{\frac{1}{1-x}}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{1-x}\ln x=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}=\lim_{x\to1}\frac{(\ln x)'}{(1-x)'}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-1.$$

Тогда $\ln a=-1$, следовательно, $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}=e^{-1}.$

II. Задачи и упражнения для практических занятий

Найти пределы, используя правило Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^5-x^3-2}{5x^4-x^3-4}$; 2. $\lim\limits_{x\to2}\frac{\ln(x^2-3)}{3x^2-5x-2}$; 3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{3x-\sin 2x}{x^3}$;

4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos 3x}{x^2}$; 5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{\mathrm{tg}^2 x}$; 6. $\lim\limits_{x\to1-0}\frac{\mathrm{arctg}\,(x-1)}{\sqrt{2x^2-x-1}}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln \mathrm{tg}x}{\mathrm{ctg}2x}$; 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln \sin x}{\mathrm{ctg}x}$; 9. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+0}\dfrac{\ln (x-\frac{\pi}{2})}{\mathrm{tg}x}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x\cdot\ln(\mathrm{ctg}\, x))$; 11. $\lim\limits_{x\to \infty}(x\cdot\ln(\frac{\pi}{2}\mathrm{arcctg}\, x))$;

12. $\lim\limits_{x\to \infty}(\pi-2\mathrm{arctg}\sqrt{x})\cdot\sqrt{x}$; 13. $\lim\limits_{x\to \infty}((x-1)\sin\dfrac{2}{x-1})$;

14. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x})$; 15. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{1-\cos x}-\dfrac{1}{x})$;

16. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\arcsin x})$; 17. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1})$;

18. $\lim\limits_{x\to \infty}(\dfrac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\, x)^x$; 19. $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x)^{\mathrm{tg}\, x}$; 20. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{x^2}$;

21. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{2}{\pi}\arccos x)^{\frac{1}{x}}$; 22. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-0}(\mathrm{tg}\, x)^{\cos x}$; 23. $\lim\limits_{x\to \infty}(3x^2+3^x)^{\frac{1}{x}}$.

ПРОМЕЖУТКИ МОНОТОННОСТИ ФУНКЦИИ. ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА

I. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** *Найти промежутки монотонности функции* $f(x) = 2x - x^2$.

Решение. Область определения функции – вся числовая прямая. $f'(x) = 2 - 2x = 2(1 - x)$. $f'(x) = 0$ при $x = 1$.

$f'(x) > 0$ при $x < 1$, $f'(x) < 0$ при $x \ge 1$,

следовательно, функция возрастает на интервале $(-\infty, 1)$ и убывает на интервале $(1, +\infty)$.

***Пример* 2.** *Доказать неравенство* $\mathrm{tg}\, x > x + \dfrac{x^3}{3}$ *при* $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Решение.

На промежутке $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ рассмотрим функцию $f(x) = \mathrm{tg}\, x - x - \dfrac{x^3}{3}$.

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 - x^2 = \mathrm{tg}^2 x - x^2 = (\mathrm{tg}\, x - x)(\mathrm{tg}\, x + x),$$

$f'(x) > 0$ при $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, так как на этом промежутке $x > 0$, $\operatorname{tg} x > 0$ и $\operatorname{tg} x > x$ (справедливость данного неравенства доказать самостоятельно). На основании теоремы о монотонности функции, можно утверждать, что $f(x)$ монотонно возрастает на $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Так как $f(0) = 0$, то для $x > 0$ будет $f(x) > 0$, т.е. $\operatorname{tg} x - x - \dfrac{x^3}{3} > 0$ или $\operatorname{tg} x > x + \dfrac{x^3}{3}$.

***Пример* 3.** *Найти точки экстремума функции* $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + 6x$.

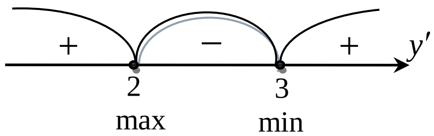

Рис. 1

Решение. Находим производную $y' = x^2 - 5x + 6$. Приравниваем её к нулю: $x^2 - 5x + 6 = 0$. Корни уравнения: $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$ будут критическими точками. Точек, в которых производная не существует, нет. Проверим достаточные условия экстремума. Воспользуемся первым достаточным условием. Изобразим координатную ось и нанесём на неё точки $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$ (см. рисунок 1). Поскольку при переходе через точку $x_1 = 2$ знак производной меняется с «+» на «–», то $x_1 = 2$ – точка максимума. При переходе через точку $x_2 = 3$ знак производной меняется с «-» на «+», следовательно, $x_2 = 3$ – точка минимума. Найдём значения функции в точках экстремума: $f(3) = 4\dfrac{1}{2}$, $f(3) = 4\dfrac{2}{3}$.

Замечание. Можно исследовать критические точки данной функции, воспользовавшись вторым достаточным условием экстремума.

Найдем вторую производную функции $y'' = 2x - 5$. $y''(2) = -1 < 0$, значит, $x = 2$ – точка максимума; $y''(3) = 1 > 0$, значит, $x = 3$ – точка минимума.

***Пример* 4.** *Исследовать на экстремум функцию* $y = x^{\frac{2}{3}}$.

Решение. Область определения функции – вся числовая прямая.

Производная $y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ не существует в точке $x = 0$, но функция непрерывна в этой точке, $x = 0$ – критическая точка. При переходе через точку $x = 0$ производная меняет знак с «–» на «+», значит, $x = 0$ – точка минимума. Значения функции в точке экстремума: $f(0) = 0$.

***Пример* 5**. *Найти наибольшее и наименьшее значение функции* $y = x^4 - 2x^2 + 3$ *на отрезке* [0, 2].

Решение. Найдём производную: $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$ Решим уравнение: $4x(x^2 - 1) = 0$. Корни уравнения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ и $x_3 = -1$ Точка $x_3 = -1$ не принадлежит отрезку [0,2]. Находим значения функции в точке $x_2 = 1$ и на концах отрезка. $y(0) = 3$, $y(1) = 2$, $y(2) = 11$. Сравниваем найденные значения, заключаем, что $y = 2$ является наименьшим, а $y = 11$ является наибольшим значениями функции на указанном отрезке.

***Пример* 6.** *Вписать в полукруг радиуса R прямоугольник наибольшей площади.*

Решение. Впишем в полукруг прямоугольник, одна из сторон которого равна $2x$. Тогда вторая сторона равна $\sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in (0, R)$. Задача свелась к нахождению наибольшего значения функции $f(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$. Находим критические точки функции $f(x)$. Вычислим производную: $f'(x) = f'(x) = \dfrac{2(R^2 - 2x^2)}{\sqrt{R^2 - x^2}}$. Производная равна нулю в точках $x_{1,2} = \pm\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ и не существует в точках $x_{3,4} = \pm R$. Из этих точек только $x_1 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ принадлежит интервалу $(0, R)$. Эта точка и доставляет наибольшее значение функции $f(x)$, т.к. на концах интервала $f(x) = 0$. Искомый прямоугольник имеет размеры: $a = R\sqrt{2}$, $b = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

II. Задачи и упражнения для практических занятий

1. Найти интервалы возрастания и убывания функций:

1) $y = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 7$; 2) $y = 8x^3 - x^4$; 3) $y = (x - 1)^3(2x + 3)^2$;

4) $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$; 5) $y = \sqrt{8x^2 - x^4}$; 6) $y = (x - 1)\sqrt{x}$;

7) $y = xe^{-3x}$; 8) $y = \dfrac{e^{2x}}{x}$; 9) $y = x^2 \ln x$;

10) $y = x^2 - 10\ln x$; 11) $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$; 12) $y = x + 2\sin x$.

2. Найти максимумы и минимумы (экстремумы) функций:

1) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - x^4$; 2) $y = x^2(x - 4)$; 3) $y = (x - 1)\sqrt{x}$;

4) $y = \dfrac{x}{8} + \dfrac{1}{(x - 2)^4}$; 5) $y = x \cdot \sqrt{2 - x^2}$; 6) $y = \dfrac{e^{2x}}{x^2}$;

7) $y = -xe^{1 - 2x^2}$; 8) $y = \ln x + \dfrac{1}{x}$; 9) $y = 8\ln x + \dfrac{1}{x^2}$;

10) $y = \sin x + \cos x$; 11) $y = \cos 2x - 2\sin x$.

3. Доказать неравенства:

1) $\sin x \le x$, при $x \ge 0$; 2) $\operatorname{tg} x > x$ при $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

4. Доказать, что уравнение $e^x = 1 - x$ имеет только один корень. Решить это уравнение.

5. Найти значения параметра a, при котором уравнения

1) $2x^3 - 6x^2 - 18x + a = 0$; 2) $x^9 - 12x^6 - a = 0$

имеют *а*) один, *б*) два, *в*) три корня.

6. Найти наименьшее и наибольшее значения функции на указанных отрезках:

1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$; на отрезке $[1, 5]$;

2) $y = x \ln x$ на отрезке $[e^{-2}, 1]$;

3) $y = x\, e^x$ на отрезке $[-2, 1]$;

4) $y = (x + 1)\, e^x$ на отрезке $[-2, 0]$;

5) $y = \cos 2x + 2x$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

7. Выяснить, существует ли наименьшее и наибольшее значения функций на указанных промежутках:

1) $y = x^2$ при $x \in (0, 1]$; 2) $y = \cos x$ при $x \in (0, \dfrac{\pi}{2}]$;

3) $y = \dfrac{1}{x}$ при $x \in (0, 4]$; 4) $y = \sin 2x - x$ при $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

8. Найти наибольший объём цилиндра, периметр осевого сечения которого равен a.

9. Судно B находится на расстоянии 75 км к востоку от судна A, идёт на запад со скоростью 12 км/ч; судно же A идёт к югу со скоростью 9 км/ч. В какой момент суда будут наиболее близки друг к другу?

10. Найти такое наибольшее число, чтобы разность между ним и его кубом была наибольшей.

11. В данный шар вписать конус с наибольшей боковой поверхностью.

ВЫПУКЛОСТЬ И ВОГНУТОСТЬ ФУНКЦИИ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

I. Примеры решения задач

***Пример* 1**. *Найти интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба графиков функций*: 1) $y = 2x^4 - 3x^2 + x - 1$; 2) $y = \sqrt[3]{(x-2)^4(1-x)^3}$.

Решение. 1) Область определения функции – вся числовая прямая. Находим первую и вторую производные:

$$y' = 8x^3 - 6x + 1; \quad y'' = 24x - 6.$$

Решим уравнение: $24x - 6 = 0$, или $x^2 = \frac{1}{4}$, тогда $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Строим числовую прямую и отмечаем на ней точки x_1 и x_2, а также знаки второй производной функции (см. рисунок 2)

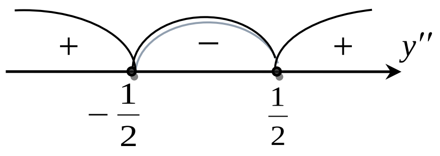

Рис. 2

Так как $y'' > 0$ на интервалах $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$, то на этих интервалах функция вогнута, так как $y'' < 0$ на интервале $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, то функция выпукла на данном отрезке. Точки $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_2 = \frac{1}{2}$ являются точками перегиба графика функции.

2) Область определения функции – вся числовая прямая. Находим y' и y'':

$$y' = ((1-x)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}})' = -\frac{1}{3}(1-x)^{-\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3}(4-3x)(x-2)^{-\frac{1}{3}}(1-x)^{-\frac{2}{3}}.$$

$$y'' = \frac{1}{3}(-3(x-2)^{-\frac{1}{3}}(1-x)^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}(4-3x)(x-2)^{-\frac{4}{3}}(1-x)^{-\frac{2}{3}} +$$

$$+ \frac{2}{3}(4-3x)(x-2)^{-\frac{1}{3}}(1-x)^{-\frac{5}{3}}) = \frac{2}{9\sqrt[3]{(x-2)^4(1-x)^3}}.$$

Очевидно, y'' в ноль не обращается. В точках $x = 2$ и $x = 1$ y'' не существует, но функция непрерывна, следовательно, эти точки могут быть точками перегиба. Отмечаем полученные точки на числовой прямой и находим знаки второй производной функции на полученных интервалах (см. рисунок 3)

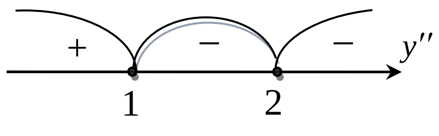

Рис. 3

Исходя из знаков второй производной делаем вывод, что на интервале (–∞, –1) функция вогнутая, а на интервалах (1, 2) и (2, +∞) функция выпуклая. Точка $x = 1$ является точкой перегиба. В точке $x = 2$ направление выпуклости функции не изменяется.

II. Задачи и упражнения для практических занятий

1. Исследовать функцию на выпуклость (вогнутость) и найти точки перегиба:

1) $y = x^5 - 10x^2 + 2x + 6$; 2) $y = x^4 - 6x^2 + 2$; 3) $y = \frac{x}{1+x^2}$;

4) $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$; 5) $y = \ln(x^2 - 1)$; 6) $y = x^2 \ln x$;

7) $y = x$ arctg x; 8) $y = e^{2x - x^2}$ 9) $y = e^{arctgx}$

10) $y = e^{\sin x} (-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2})$.

АСИМПТОТЫ ФУНКЦИИ

I. Примеры решения задач

Пример. *Найти асимптоты графиков функций*:

а) $y = \frac{x^3}{3 - x^2}$; *б*) $y = 2x + \text{arctg}\, \frac{x}{2}$.

Решение. а) Функция $y = \frac{x^3}{3 - x^2}$ определена и непрерывна всюду, кроме $x_1 = -\sqrt{3}$ и $x_2 = \sqrt{3}$.

Определим, есть ли у функции вертикальные асимптоты. *Прямая x = a является вертикальной асимптотой функции, если хотя бы один из односторонних пределов функции в точке а равен бесконечности*. Так как $\lim\limits_{x \to -\sqrt{3} - 0} \frac{x^3}{3 - x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\sqrt{3} + 0} \frac{x^3}{3 - x^2} = -\infty$, то прямая $x = -\sqrt{3}$ является вертикальной асимптотой графика функции. Так как $\lim\limits_{x \to \sqrt{3} - 0} \frac{x^3}{3 - x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \sqrt{3} + 0} \frac{x^3}{3 - x^2} = -\infty$, то прямая $x = \sqrt{3}$ также является вертикальной асимптотой графика функции.

Будем теперь искать наклонные асимптоты в виде прямых $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x(3 - x^2)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{3x - x^3} = -1,$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{3 - x^2} + x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{3x}{3 - x^2} = 0.$$

Следовательно, прямая $y = -x$ является наклонной асимптотой графика функции $y = \dfrac{x^3}{3-x^2}$.

б) Функция $y = 2x + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$ определена и непрерывна на всей числовой прямой, следовательно, у неё нет вертикальных асимптот.

Будем искать наклонные асимптоты в виде прямых $y = kx + b$, где $k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{x}\right) = 2$ (учитываем, что $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2} = -\dfrac{\pi}{2}$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2}$, поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{x} = 0$). При нахождении коэффициента b необходимо рассматривать два случая $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$. Поэтому получаем два значения для коэффициента b:

$$b_1 = \lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to-\infty}\left(2x+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-2x\right) = \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$b_2 = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to+\infty}\left(2x+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Следовательно, график функции $y = 2x + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$ имеет две наклонные асимптоты $y = 2x - \dfrac{\pi}{2}$ (при $x\to-\infty$) и $y = 2x + \dfrac{\pi}{2}$ (при $x\to+\infty$).

II. Задачи и упражнения для практических занятий

Найти асимптоты графиков функций:

1. $y=\dfrac{x+1}{9-x^2}$;	2. $y=\dfrac{x^2+3x}{x^2+1}$;	3. $y=\sqrt{\dfrac{x-5}{x+5}}$;
4. $y=\dfrac{\ln x}{x}$;	5. $y=\dfrac{x^3+3}{x^2}$;	6. $y=\dfrac{x^2-x-3}{x+3}$;
7. $y=\dfrac{2-x}{5-x^2}$;	8. $y=x-3\ln x$;	9. $y=2x+\dfrac{\ln x}{x}$;
10. $y=2x-\arccos\dfrac{1}{x}$;	11. $y=xe^{\frac{1}{x}}$;	12. $y= x\cdot 3^{\frac{1}{x^2}}$;
16. $y=\dfrac{\cos x}{x}$;	17. $y=x+\dfrac{\sin x}{5x}$;	18. $y=\dfrac{x^4}{x^3-8}$.

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

I. Примеры решения задач

Пример. *Провести полное исследование и построить график функции*: *а*) $f(x) = \dfrac{4x^3 - x^4}{5}$; *б*) $f(x) = \ln\dfrac{x}{x+5} - 1$.

Решение. *а*) Функция $f(x) = \dfrac{4x^3 - x^4}{5} = \dfrac{4}{5}x^3 - \dfrac{1}{5}x^4$ является многочленом. Как и любой многочлен, она определена на всей оси *Ox*, непрерывна, асимптот не имеет, не является периодической.

1. Так как $f(x) \neq f(-x)$ и $f(x) \neq -f(-x)$, то $f(x)$ не является ни четной, ни нечетной.

2. Находим $y' = \dfrac{4}{5}x^2(3-x)$, $y'' = \dfrac{12}{5}x(2-x)$.

3. Исследуем $f(x)$ на монотонность и экстремум. Критическими точками $f(x)$ являются точки $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Проверим, есть ли смена знака производной функции при переходе через эти точки. Для этого запишем все данные в таблицу:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$	*max*	$\searrow$

Итак, $M_1\left(3, \dfrac{27}{5}\right)$ – точка максимума. В точке $x = 0$ экстремума нет, но будем помнить, что здесь $y'(0) = 0$, поэтому касательная к графику параллельна оси Ox.

4. Исследуем $f(x)$ на выпуклость, вогнутость и точки перегиба. Критических точек у $f''(x)$ две: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f''(x)$	–	0	+	0	–
$f(x)$	$\cap$	*перегиб*	$\cup$	*перегиб*	$\cap$

$M_2(0, 0)$ – точка перегиба с выпуклости на вогнутость; $M_3\left(2, \dfrac{16}{5}\right)$ – точка перегиба с вогнутости на выпуклость.

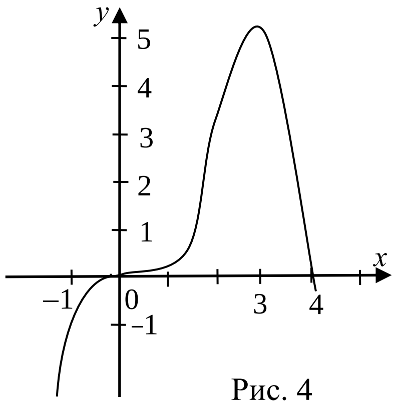

Рис. 4

6. Найдем точки пересечения с координатными осями. При $x = 0$ имеем $y = 0$, это точка $M_2(0, 0)$. При $y = 0$ имеем $4x^3 - x^4 = 0$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Получаем точку $M_4(4, 0)$.

7. Возьмем дополнительную точку, например $M_5(-1, -1)$.

8. Выберем масштаб и строим график функции (рисунок 4).

б) $f(x) = \ln\dfrac{x}{x+5} - 1$.

Решение. 1. Область определения функции находится из неравенства $\dfrac{x}{x+5} > 0$, решая которое, получим $D(f(x)) = (-\infty, -5) \cup (0, +\infty)$.

2. Так как область определения не симметрична относительно начала координат, то $f(x)$ не может быть ни четной, ни нечетной, ни периодической, поэтому исследование будем проводить во всей области существования.

3. Так функция элементарная, то она непрерывна на интервалах $(-\infty, -5)$ и $(0, +\infty)$. В точках $x = -5$ и $x = 0$:

$$\lim_{x \to -5-0}\left(\ln\frac{x}{x+5} - 1\right) = +\infty, \quad \lim_{x \to +0}\left(\ln\frac{x}{x+5} - 1\right) = -\infty .$$

Таким образом, прямые $x = -5$ и $x = 0$ являются вертикальными асимптотами графика функции.

Найдем наклонные асимптоты по формуле $y = kx + b$.

Так как $\lim\limits_{x \to \infty} \ln\dfrac{x}{x-5} = \ln \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x-5} = \ln 1 = 0$, то

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln\dfrac{x}{x-5} - 1}{x} = 0 .$$

$$b = \lim_{x \to \infty}(f(x) - kx) = \lim_{x \to \infty}\left(\ln\frac{x}{x-5} - 1\right) = -1.$$

Следовательно, прямая $y = -1$ является наклонной (горизонтальной) асимптотой графика при $x \to \pm\infty$.

4. Найдем первую и вторую производные функции:

$$f'(x) = \frac{5}{x(x+5)}, \quad f''(x) = -\frac{5(2x+5)}{x^2(x+5)^2} .$$

5. Проведем исследование функции на монотонность и экстремум. Первая производная функции не равна нулю. Точки $x_1 = 0$ и $x_2 = -5$, в которых $f'(x)$ не определена, не принадлежат области определения функции. Таким образом, критических точек функция не имеет. Следовательно, экстремумов нет.

На интервалах $(-\infty, -5)$ и $(0,+\infty)$ $f'(x)>0$, здесь функция $f(x) = \ln\dfrac{x}{x-5} - 1$ возрастает.

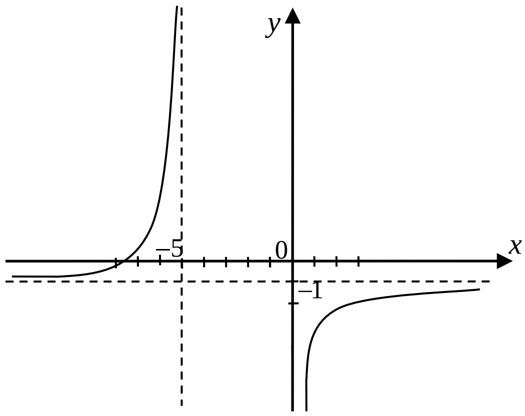

Рис. 5

6. Проведем исследование на выпуклость, вогнутость и точки перегиба. $f''(x)$ равна нулю в точке $x_1 = \dfrac{5}{2}$, не существует в точках $x_2 = 0$ и $x_3 = -5$. Ни одна из них не принадлежит области определения функции, поэтому точек перегиба нет. На интервале $(-\infty, -5)$ $f''(x) > 0$, здесь функция $f(x)$ вогнута. На интервале $(0, +\infty)$ $f''(x) < 0$, здесь функция $f(x)$ выпукла.

7. Найдем точки пересечения графика с осями координат. Точка $x = 0$ не принадлежит области определения функции, следовательно, функция не пересекается с осью Oy. Пусть $y = 0$, тогда решая уравнение $\ln\dfrac{x}{x-5} - 1 = 0$ получим $\dfrac{x}{x-5} = e$. Найдем x: $x = \dfrac{5e}{1-e} = -\dfrac{5e}{e-1} \approx -7{,}9$. Точка $M_1\left(-\dfrac{5e}{e-1}, 0\right)$ – точка пересечения с осью Ox.

8. Выберем подходящий масштаб, построим график функции (рисунок 5).

II. Задачи и упражнения для практических занятий

Постройте графики функций:

1. $y = 2x^4 - x^2 + 1$;	2. $y = x^5 - x^3 - 2x$;	4. $y = x(x + 1)^3$;
3. $y = (x + 1)(x - 2)^2$;	5. $y = \dfrac{1}{x(x+1)}$;	6. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$;
7. $y = 2x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$;	8. $y = \dfrac{1-x^2}{4-x^2}$;	9) $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$;
10. $y = x - \ln(x + 1)$;	11. $y = x \ln x$;	12) $y = \ln(x - \dfrac{1}{x})$;
13. $y = e^{\frac{1}{x}}$;	15. $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$;	16. $y = x^3 e^{x^2 - 2x}$;
17. $y = \sin x + \cos x$;	19. $y = \sin^2 x + \cos x$;	20. $y = \mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{x}$.

ПЕРВООБРАЗНАЯ. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

I. Примеры решения задач

***Пример* 1.** *Найти интегралы*:

а) $\int \frac{x^3-\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^4}}{x}dx$; *б)* $\int 2^x\cdot 3^{2x}dx$; *в)* $\int \cos^2\frac{x}{2}dx$.

Решение. *а)* $\int \frac{x^3-\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^4}}{x}dx=\int\frac{x^3}{x}dx-\int\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x}dx-2\int\frac{x^{\frac{4}{3}}}{x}dx=$

$$=\int x^2dx-\int x^{-\frac{1}{2}}dx-2\int x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{x^3}{3}-2x^{\frac{1}{2}}-2\cdot\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C==\frac{x^3}{3}-2\sqrt{x}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^4}+C.$$

б) $\int 2^x\cdot 3^{2x}dx=\int 2^x\cdot 9^x dx=\int 18^x dx=\frac{18^x}{\ln 18}+C$.

в) $\int\cos^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1+\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int dx+\int\cos x dx\right)=\frac{1}{2}(x+\sin x)+C$.

II. Задачи и упражнения для практических занятий

Найти интегралы:

1. $\int\left(x^2+x+1+\frac{1}{x}\right)dx$;
2. $\int\left(x^3-1\right)^2dx$;
3. $\int\sqrt[3]{x\sqrt{x}}dx$;
4. $\int\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)^2dx$;
5. $\int\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$;
6. $\int\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)^3}{x}dx$;
7. $\int\frac{2\cdot 5^x+5\cdot 2^x}{2^x}dx$;
8. $\int\frac{dx}{\sqrt{5-5x^2}}$;
9. $\int\frac{dx}{3x^2+12}$;
10. $\int\frac{dx}{5x^2-20}$;
11. $\int\left(2\sin\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}\right)^2dx$;
12. $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$;
13. $\int\operatorname{ctg}^2 x dx$;
14. $\int\frac{1+2x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx$;
15. $\int 2^{3\log_2\sqrt{x}}dx$;
16. $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+8}}$;
17. $\int\frac{dx}{\sin^2 x-\cos^2 x}$;
18. $\int\frac{dx}{x^4+x^2}$;
19. $\int x^3(\arcsin x+\arccos x)dx$.

МЕТОД ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

I. Примеры решения задач

***Пример* 1.** *С помощью формулы*

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F\,(ax+b)dx\,, \qquad (1)$$

где F (*x*) *– первообразная функции f* (*x*)*, найти интегралы*:

а) $\int \sin 2x dx$; *б*) $\int (1-3x)^{10}\, dx$; *в*) $\int e^{\frac{x}{2}-1}\, dx$.

Решение. *а*) Так как первообразной функции sin *x* является функция – cos *x*, то по формуле (1) $\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C.$

б) Первообразной функции x^{10} является функция $\frac{x^{11}}{11}$, следовательно, $\int (1-3x)^{10}\, dx = -\frac{1}{3}\frac{(1-3x)^{11}}{11} = -\frac{(1-3x)^{11}}{33} + C$.

в) Аналогично, $\int e^{\frac{x}{2}-1}\, dx = 2e^{\frac{x}{2}-1} + C.$

***Пример* 2.** *С помощью внесения функции под знак дифференциала вычислить интегралы*:

а) $\int \frac{xdx}{4+x^2}$; *б*) $\int \frac{dx}{x\ln x}$; *в*) $\int \sqrt{\cos^3 x}\sin x dx$.

Решение. *а*) $\int \frac{xdx}{4+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d\ x^2}{4+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(4+x^2\right)}{4+x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|4+x^2\right| + C$.

б) Так как $\frac{dx}{x} = d\ln x$, то $\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{d\ln x}{\ln x} = \ln|\ln x| + C$.

в) $\int \sqrt{\cos^3 x}\sin x dx = -\int \cos^{\frac{3}{2}} x d\left(\cos x\right) = -\frac{2}{5}\cos^{\frac{5}{2}} x + C =$

$= -\frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x} + C$.

Пример* 3.** *Применяя метод интегрирования по частям,** *вычислить интегралы*: *а*) $\int \left(3x+2\right)\cos 2x dx$; *б*) $\int \sqrt{a^2+x^2}\, dx$.

Решение. *а*) Применим формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла:

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (2)$$

Положим $u = 3x + 2$, $dv = \cos 2x dx$. Тогда $du = (3x + 2)' dx = 3dx$, $v = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x$. Подставив в формулу (2), получим

$$\int (3x+2)\cos 2x dx = \frac{1}{2}(3x+2)\sin 2x - \frac{3}{2}\int \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2}(3x+2)\sin 2x + \frac{3}{4}\cos 2x + C.$$

б) Для нахождения интеграла $I = \int \sqrt{a^2 + x^2} dx$ положим $u = \sqrt{a^2 + x^2}$, $dv = dx$. Тогда $du = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx$, $v = x$. Подставляя в формулу (2), получим

$$I = \int \sqrt{a^2 + x^2} dx = x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \sqrt{a^2 + x^2} dx +$$

$$+ a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| - I.$$

Отсюда $2I = x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right|$. Следовательно,

$$I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right|\right) + C.$$

II. Задачи и упражнения для практических занятий

1. Применяя формулу (1), найти следующие интегралы:

1) $\int (3x + 4)^5 dx$; 2) $\int \sqrt{(2 - 5x)} dx$; 3) $\int \frac{dx}{(3x - 2)^3}$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1 - x/3)}}$; 5) $\int \frac{dx}{1 - x}$; 6) $\int e^{\frac{x}{2}} dx$;

7) $\int 2^{1-2x} dx$; 8) $\int \cos(3x + 1) dx$; 9) $\int \sin\frac{x}{2} dx$;

10) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$; 11) $\int \frac{dx}{1 + 4x^2}$; 12) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 3x^2}}$.

2. Найдите интегралы с помощью внесения функции под знак дифференциала:

1) $\int \frac{xdx}{9 + x^4}$; 2) $\int x \cdot \sqrt[3]{1 + 2x^2} dx$; 3) $\int xe^{-2x^2} dx$;

4) $\int \frac{1 + 4\ln^3 x}{x} dx$; 5) $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1 + x^2} dx$; 6) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}} dx$;

7) $\int \operatorname{tg} 4x dx$; 8) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot \arcsin x}$; 9) $\int \left(e^{2x}-4\right)^3 e^{2x} dx$;

10) $\int \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}$; 11) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}} dx$; 12) $\int \frac{x^2 dx}{x^6+4}$.

3. Используя различные подстановки, вычислить интегралы:

1) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$; 2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$; 3) $\int x^3 \cdot \sqrt{x-1} dx$;

4) $\int \sqrt{a^2-x^2} dx$; 5) $\int e^{\sqrt{x}} dx$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

4. Вычислить интегралы методом интегрирования по частям:

1) $\int \ln x dx$; 2) $\int x \ln x dx$; 3) $\int \left(x^2+2\right) \ln x dx$;

4) $\int \frac{\ln x dx}{x^2}$; 5) $\int x \cos x dx$; 6) $\int (3x+5) \sin 2x dx$;

7) $\int \left(x^2+2\right) \cos 2x dx$; 8) $\int \arcsin x dx$; 9) $\int \operatorname{arctg} x dx$;

10) $\int x^2 \operatorname{arctg} 6x dx$; 11) $\int (x+5) e^{\frac{x}{2}} dx$; 12) $\int x^2 e^{3x} dx$;

13) $\int e^x \cos 3x dx$; 14) $\int \frac{x dx}{\sin^2 4x}$; 15) $\int \sqrt{x^2+\alpha} dx$.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

I. Примеры решения задач

***Пример* 1.** *Вычислить* $I = \int \frac{\left(2x^2+41x-91\right)dx}{(x-1)(x+3)(x-4)}$.

Решение. Так как под знаком интеграла стоит правильная рациональная дробь, то

$$\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-4} =$$

$$= \frac{A(x+3)(x-4) + B(x-1)(x-4) + C(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)(x-4)} =$$

$$= \frac{(A+B+C)x^2 + (-A-5B+2C)x - 12A + 4B - 3C}{(x-1)(x+3)(x-4)}.$$

Здесь A, B, C – некоторые постоянные, которые надо определить. Сравнивая в цепочке равенств левую и правую части, получаем

$$2x^2+41x-91 = (A+B+C)x^2 + (-A-5B+2C)x - 12A + 4B - 3C.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} A+B+C=2, \\ -A-5B+2C=41, \\ -12A+4B-3C=-91. \end{cases}$$

Решая систему, находим $A = 4$, $B = -7$, $C = 5$. Тогда

$$I=\int\left(\frac{4}{x-1}-\frac{7}{x+3}+\frac{5}{x-4}\right)dx=4\int\frac{d(x-1)}{x-1}-7\int\frac{d(x+3)}{x+3}+5\int\frac{d(x-4)}{x-4}=$$

$$=4\ln|x-1|-7\ln|x+3|+5\ln|x-4|+C=\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|+C.$$

***Пример* 2.** *Вычислить* $I=\int\frac{x^3dx}{x^2+2x+5}$.

Решение. Рациональная дробь, стоящая под знаком интеграла, является неправильной, так как степень многочлена числителя больше степени многочлена знаменателя. Поэтому, перед разложением дроби на простейшие, надо выделить в ней целую часть. Сделаем это с помощью операции деления многочлена на многочлен. Получим

$$\frac{x^3}{x^2+2x+5}=(x-2)+\frac{-x+10}{x^2+2x+5}$$

Теперь находим интеграл

$$I=\int\frac{x^3dx}{x^2+2x+5}=\int(x-2)dx+\int\frac{-x+10}{x^2+2x+5}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}-2x+\int\frac{-(x+1)+11}{(x+1)^2+4}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}-2x-\int\frac{(x+1)}{(x+1)^2+4}dx+11\int\frac{dx}{(x+1)^2+4}.$$

Обозначим интегралы в правой части соответственно I_1 и I_2. В первом интеграле сделаем подстановку $t=x+1$, тогда $dt=dx$ и

$$I_1=\int\frac{tdt}{t^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2)}{t^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+1)}{t^2+1}=\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+C_1=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+C_1.$$

$$I_2=\int\frac{dt}{t^2+4}=\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}+C_2=\frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2}+C_2.$$

$$I=\frac{x^2}{2}-2x-\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+\frac{11}{2}arctg\frac{x+1}{2}+C.$$

Здесь $C=-\frac{1}{2}C_1+11C_2$ – произвольная постоянная.

II. Задачи и упражнения для практических занятий

1. Записать дроби в виде суммы простых дробей:

а) $\dfrac{x^3+5}{(x-1)(x^2+4)}$; *б)* $\dfrac{1}{(x-1)^3(x+1)^2}$; *в)* $\dfrac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2}$;

г) $\dfrac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}$; *д)* $\dfrac{1}{x^3+1}$.

2. Найти интегралы:

а) $\int\dfrac{dx}{(x+1)(x-2)}$; *б)* $\int\dfrac{xdx}{2x^2-3x+2}$; *в)* $\int\dfrac{2x^4-x^2+1}{x^3-x}dx$;

г) $\int\dfrac{x^2-3}{x^2-1}dx$; *д)* $\int\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2-4)}dx$; *е)* $\int\dfrac{x^3+5}{(x-1)(x^2+4)}dx$;

ж) $\int\dfrac{x^3+x+1}{x^4-1}dx$; *з)* $\int\dfrac{dx}{x^5-1}$; *и)* $\int\dfrac{dx}{x^4-13x^2+36}$;

к) $\int\dfrac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx$; *л)* $\int\dfrac{x(x-2)dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$); *м)* $\int\dfrac{dx}{(x^3+1)^2}$.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

I. Примеры решения задач

***Пример* 1.** *Вычислить* $I=\int\dfrac{\left(1-\sqrt{x+1}\right)dx}{\sqrt[6]{(x+1)^5}\left(1+\sqrt[3]{x+1}\right)}$.

Решение. Наименьшее общее кратное чисел 2, 3 и 6 равно 6. Поэтому полагаем $z=\sqrt[6]{x+1}$. Тогда $x+1=z^6$, $x=z^6-1$, $dx=6z^5dz$, $\sqrt{x+1}=z^3$, $\sqrt[3]{x+1}=z^2$. Таким образом,

$$I=\int\frac{1-z^3}{z^5\left(1+z^2\right)}6z^5dz\ =\ 6\int\frac{1-z^3}{z^2+1}dz.$$

Под знаком интеграла стоит неправильная рациональная дробь.

Выделим её целую часть: $\dfrac{1-z^3}{z^2+1}=-z+\dfrac{z+1}{z^2+1}$. Следовательно,

$$I=6\int\left(-z+\frac{z+1}{z^2+1}\right)dz=-6\int zdz+6\int\frac{z+1}{z^2+1}dz=-3z^2+3\int\frac{2zdz}{z^2+1}+$$

$$+6\int\frac{dz}{z^2+1}=-3z^2+3\int\frac{d\left(z^2+1\right)}{z^2+1}+6\operatorname{arctg}z=-3z^2+3\ln(z^2+1)+$$

$$+6\operatorname{arctg}z+C=-3\sqrt[3]{x+1}+3\ln(\sqrt[3]{x+1}+1)+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+1}+C.$$

***Пример* 2.** *Вычислить* $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$.

Решение. Воспользуемся подстановками Эйлера. Здесь $a<0,\ c>0$, поэтому используем подстановку $\sqrt{1+x-x^2}=tx-1$.

Отсюда выражаем переменную *x*: $x=\frac{2t+1}{t^2+1}$.

$$dx=\left(\frac{2t+1}{t^2+1}\right)' dt=-2\frac{t^2+t-1}{(t^2+1)^2}dt,\quad \sqrt{1+x-x^2}=tx-1=\frac{t^2+t-1}{t^2+1}.$$

В результате получаем $I=\int \frac{-2\frac{t^2+t-1}{(t^2+1)^2}dt}{\left(1+\frac{2t+1}{t^2+1}\right)\frac{t^2+t-1}{t^2+1}}=$

$$=-2\int \frac{dt}{1+(t+1)^2}=-2arctg(t+1)+C=-2arctg\frac{1+\sqrt{1+x-x^2}+x}{x}+C.$$

***Пример* 3.** *Вычислить* $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\int (1+x^4)^{-\frac{1}{4}}dx$. Это интеграл от биноминального дифференциала. Сделаем подстановку $1+x^{-4}=z^4$. Получаем $z=(1+x^{-4})^{\frac{1}{4}}$, $x=(z^4-1)^{-\frac{1}{4}}$, $dx=-z^3(z^4-1)^{-\frac{5}{4}}dz$.

Значит $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int \frac{z^2dz}{z^4-1}=-\frac{1}{2}\left(\int \frac{dz}{z^2-1}+\int \frac{dz}{z^2+1}\right)=$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z+C=\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C.$$

II. Задачи и упражнения для практических занятий

1. Найти интегралы:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$; 2) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$; 3) $\int \frac{x^3dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}$;

4) $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$; 5) $\int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}$; 6) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}$.

2. Вычислить интегралы с помощью выделения полного квадрата:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x-13}}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$.

3. Применяя различные подстановки, вычислить интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$; 2) $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$; 3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$;

4) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$; 5) $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx$; 6) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$.

4. Вычислить интегралы от биноминальных дифференциалов:

1) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}dx$; 2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x+5}}$; 3) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

4) $\int \frac{\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}}{\sqrt{x}}dx$; 5) $\int x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}dx$; 6) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}dx$.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

I. Примеры решения задач

***Пример* 1.** *Вычислить* $I=\int \sin^3 x\cos^{10} xdx$.

Решение. Если в подынтегральную функцию вместо $\sin x$ подставить $-\sin x$, то она изменит знак на противоположный. Поэтому воспользуемся подстановкой $z=\cos x$.

Отсюда $dz=-\sin xdx$ и $\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-z^2$. Следовательно,

$$I=-\int\left(1-z^2\right)z^{10}dz=-\int z^{10}dz+\int z^{12}dz=$$

$$=-\frac{z^{11}}{11}+\frac{z^{13}}{13}+C=-\frac{\cos^{11}x}{11}+\frac{\cos^{13}x}{13}+C.$$

***Пример* 2.** *Вычислить* $\int \frac{dx}{8\cos^2 x+2\sin^2 x}$.

Решение. Вынесем $\cos^2 x$ за скобки, получим

$$I=\int \frac{dx}{\cos^2 x(8+tg^2 x)}=\int \frac{1}{8+2\mathrm{tg}^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Применим подстановку $z = \operatorname{tg} x$. Отсюда $d\,z = d\operatorname{tg} x = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$.

Тогда

$$I = \int \frac{dz}{8+2z^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2+4} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{z}{2} + C = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{2}\right) + C.$$

***Пример* 3.** *Вычислить* $I = \int \dfrac{dx}{\sin x + \cos x}$.

Решение. Положим $z = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. Тогда $x = 2\operatorname{arctg} z$, $dx = \dfrac{2dz}{1+z^2}$.

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-z^2}{1+z^2}.$$

Значит

$$I = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2} + \frac{1-z^2}{1+z^2}} = 2\int \frac{dz}{1+2z-z^2} = 2\int \frac{dz}{2-(1-z)^2} =$$

$$= -2\int \frac{d(1-z)}{2-(1-z)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-z-\sqrt{2}}{1-z+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-\sqrt{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\sqrt{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C.$$

II. Задачи и упражнения для практических занятий

1. Найти интегралы:

1) $\int \cos^3 x \sin^2 x dx$; 2) $\int \cos^2 x \sin x dx$; 3) $\int \cos^3 x \sin^3 x dx$;

4) $\int \sin^2 x dx$; 5) $\int \cos^4 x dx$; 6) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$;

7) $\int \sin 3x \cos 2x dx$; 8) $\int \cos 3x \cos 2x \cos x dx$; 9) $\int \dfrac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$

10) $\int \operatorname{tg}^3 x dx$; 11) $\int \sqrt[4]{\cos^3 x} \sin^3 x dx$; 12) $\int \dfrac{dx}{\sin^4 x}$;

13) $\int \dfrac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$; 14) $\int \dfrac{\sin 2x dx}{\cos^4 x}$; 15) $\int \dfrac{dx}{3+5\cos x}$;

16) $\int \cos 5x \cos x dx$; 17) $\int \dfrac{dx}{8-4\sin x + 7\cos x}$; 18) $\int \dfrac{\sin 2x dx}{\cos^4 x}$;

19) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 5\cos^2 x}$.

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

I. Примеры решения задач

***Пример* 1.** *Найти интеграл* $\int\limits_0^2 (x^2+1)dx$ *с помощью интегральных сумм.*

Решение. Функция $f(x)=x^2+1$ непрерывна на отрезке $[0;2]$ и, следовательно, интегрируема на этом отрезке. Поэтому для выражения предела интегральных сумм σ_T при $\lambda\to 0$ (λ– наибольшая из длин отрезков разбиения) можно взять любую последовательность разбиений T_n отрезка $[0;2]$ на части, такую, чтобы $\lambda\to 0$. Разделим отрезок $[0;2]$ на n равных частей, а в качестве точек ξ_i выберем правые концы отрезков $[x_{i-1};x_i]$, $(i=\overline{1,n})$. Тогда

$$\Delta x_i=\frac{2}{n},\ x_i=\frac{2i}{n},\ \xi_i=x_i=\frac{2i}{n},\ f(\xi_i)=\frac{4i^2}{n^2}+1,\ \lambda\to 0\Leftrightarrow n\to\infty,$$

$$\sigma_T=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4i^2}{n^2}+1\right)\frac{2}{n}=\frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}1+\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2\right)=$$

$$=\frac{2}{n}\left(n+\frac{4}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)=2+\frac{4}{3}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}.$$

$$\int\limits_0^2(x^2+1)dx=\lim_{n\to\infty}\sigma_T=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{4}{3}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}\right)=2+\frac{8}{3}=4\frac{2}{3}.$$

Замечание. При вычислении суммы мы воспользовались формулой $\sum\limits_{i=1}^{n}i^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

***Пример* 2.** *Выяснить, какой из интегралов* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 xdx$ *и* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 xdx$ *больше.*

Решение. Поскольку на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ функции $\sin^7 x$ и $\sin^3 x$ непрерывны, а на интервале $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ выполняется неравенство $\sin^7 x<\sin^3 x$, то $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 xdx<\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 xdx$.

***Пример* 3.** *Найти среднее значение функции* $f(x)=x^2+1$ *на отрезке* $[0;2]$.

Решение. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0;2]$, тогда по интегральной теореме о среднем для непрерывной функции, существует точка $c \in [0;2]$, такая что $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ или $\int\limits_0^2 (x^2+1)dx = (c^2+1)(2-0) = 2(c^2+1)$. Из примера 1 получаем $\int\limits_0^2 (x^2+1)dx = 4\frac{2}{3}$, тогда среднее значение функции $f(x)$ равно $f(c) = c^2+1 = 2\frac{1}{3}$, где $c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

II. Задачи и упражнения для практических занятий

1. Для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, найти нижнюю s_T и верхнюю S_T суммы Дарбу, разбив отрезок на n равных частей. Для данного разбиения отрезка $[a, b]$ составить интегральную сумму σ_T, взяв точки ξ_i в серединах промежутков разбиения:

1) $f(x) = x-3, a=1, b=2;$ 2) $f(x) = 2x^2, a=0, b=1;$

3) $f(x) = 2x+5, a=-2, b=1;$ 4) $f(x) = e^x, a=0, b=3.$

2. Вычислить $\int\limits_a^b f(x)dx$ с помощью интегральных сумм:

1) $\int\limits_a^b cxdx;$ 2) $\int\limits_a^b cx^2dx;$ 3) $\int\limits_a^b e^xdx;$ 4) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2}$

(интервал интегрирования делить на части так, чтобы абсциссы точек деления образовывали геометрическую прогрессию).

3. Используя формулы, полученные в задании 2, и, опираясь на простейшие свойства определённого интеграла, вычислить интегралы:

1) $\int\limits_{-1}^{3} (2x+8)dx;$ 2) $\int\limits_{-2}^{0} (3x^2+5)dx;$

3) $\int\limits_{3}^{5} (e^x+3x)dx;$ 4) $\int\limits_{-1}^{1} (3e^x+5x^2)dx.$

4. Пользуясь результатами задания 2, найти средние значения функций на указанных отрезках:

1) $f(x) = 2x$ на отрезке $[-1; 3]$;

2) $f(x) = x^2$ на отрезке $[0; 3]$;

3) $f(x) = 3x^2+2x-5$ на отрезке $[-1; 2]$;

4) $f(x) = e^x+4x$ на отрезке $[0; 1]$.

5. Не вычисляя интегралов, установить, какой из них больше:

1) $\int_0^1 x dx$ или $\int_0^1 x^2 dx$; 2) $\int_0^1 x^2 dx$ или $\int_0^1 x^3 dx$;

3) $\int_0^1 e^x dx$ или $\int_0^1 e^{x^2} dx$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ или $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$

6. Дать оценку интегралов:

1) $\int_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2} dx$; 2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin x dx$; 3) $\int_{1.5}^{3.5} \frac{x^2 dx}{x-1}$; 4) $\int_{-\frac{\pi}{5}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x dx.$

ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА

I. Примеры решения задач

***Пример* 1.** *Вычислить интеграл* $\int_1^2 (x^2 - \frac{2}{x} + \sqrt[3]{x} + 5) dx$.

Решение. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, получаем

$$\int_1^2 (x^2 - \frac{2}{x} + \sqrt[3]{x} + 5) dx = \int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 \frac{2}{x} dx + \int_1^2 \sqrt[3]{x} dx + 5\int_1^2 dx =$$

$$= \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2 - 2\ln x\Big|_1^2 + \left.\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\right|_1^2 + 5x\Big|_1^2 =$$

$$= (2 - \frac{1}{2}) - 2(\ln 2 - \ln 1) + \frac{3}{4}(2\sqrt[3]{2} - 1) + (10 - 5) = 5\frac{3}{4} - 2\ln 2 + \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}.$$

***Пример* 2.** *Вычислить интеграл* $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx$.

Решение. Имеем: $\sqrt{1+\cos 2x} = \sqrt{2\sin^2 x} = \sqrt{2}|\sin x|$. Поэтому

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos 2x} dx = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi} \sin x dx - \sqrt{2}\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx =$$

$$= \sqrt{2}\left(-\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}\right) = \sqrt{2}(-(\cos\pi - \cos 0) + (\cos 2\pi - \cos\pi)) =$$

$$= \sqrt{2}(-(-1-1) + (1-(-1))) = 4\sqrt{2}.$$

***Пример* 3.** *Можно ли применить формулу Ньютона-Лейбница к интегралу* $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x}$?

Решение. Подынтегральная функция $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ имеет бесконечный разрыв в точке $x_0=\dfrac{\pi}{2}\in[0;\pi]$. Следовательно, на этом промежутке применять формулу Ньютона-Лейбница нельзя.

II. Задачи и упражнения для практических занятий

1. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, найти интегралы:

1) $\int\limits_1^2 (x^2-2x+5)dx$; 2) $\int\limits_0^8 (\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})dx$; 3) $\int\limits_1^9 \dfrac{2-y}{y^3}dy$;

4) $\int\limits_1^5 \sqrt{x-1}dx$; 5) $\int\limits_1^6 \dfrac{dx}{\sqrt{10-x}}$; 6) $\int\limits_2^3 \dfrac{dx}{x^2-1}$;

7) $\int\limits_2^3 \dfrac{(3x+5)dx}{x^2+2x-3}$; 8) $\int\limits_{-1}^0 \dfrac{y^3dy}{y+3}$; 9) $\int\limits_1^2 \dfrac{dx}{x^2+x+2}$;

10) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x^2+x+2}$; 11) $\int\limits_0^2 \dfrac{x^3dx}{x^8+1}$; 12) $\int\limits_2^3 \dfrac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$;

13) $\int\limits_0^1 \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+3}}$; 14) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 xdx$; 15) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 xdx$;

16) $\int\limits_1^2 \dfrac{e^xdx}{e^x-1}$; 17) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} xdx$; 18) $\int\limits_2^3 \dfrac{(2x^4-5x^2+3)dx}{x^2-1}$.

2. Можно ли применить формулу Ньютона-Лейбница к следующим интегралам:

$$1)\ \int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2};\ \ 2)\ \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos^2 x(2+tg^2x)};\ \ 3)\ \int\limits_{-1}^1 \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)' xdx\,?$$

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

I. Примеры решения задач

***Пример* 1.** *Найти интеграл* $\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx$.

Решение. Применим подстановку $x = a \sin t$ Такая замена переменной законна. Действительно:

1) функция $x = \varphi(t) = a \sin t$ непрерывна на всей числовой оси;

2) когда новая переменная t изменяется на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, значения старой переменной $x = a\sin t$ пробегают отрезок $[0; a]$;

3) $\varphi(0)=0,\ \varphi(\frac{\pi}{2})=a;$

4) Производная $\varphi'(t)=a\cos t$ непрерывна на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Выполнены все условия теоремы о замене переменной интегрирования в определённом интеграле. Итак,

$$x=a\sin t,\ dx=a\cos t,\ \varphi(0)=0,\ \varphi(\frac{\pi}{2})=a,\ \text{т.е. } \alpha=0,\ \beta=\frac{\pi}{2},$$

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\sqrt{1-\sin^2 t}=a\sqrt{\cos^2 t}=a|\cos t|.$$

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a|\cos t|a\cos t dt=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4}.$$

***Пример* 2.** *Вычислить интеграл* $\int_0^1 x\arcsin x dx$.

Решение. Воспользуемся формулой интегрирования по частям в определенном интеграле. Пусть $u=\arcsin x$, тогда $du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $dv=xdx$, $v=\frac{x^2}{2}$.

Получаем

$$\int_0^1 x\arcsin x dx=\frac{1}{2}x^2\arcsin x\Bigg|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{((1-x^2)-1)dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arcsin x\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}.$$

II. Задачи и упражнения для практических занятий

1. Найти интегралы:

1) $\int_0^9\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;	2) $\int_0^1\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+1}$;	3) $\int_0^1\frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}}dx$;
4 $\int_0^9 x\sqrt{x^2+19}dx$;	5) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$;	6) $\int_{-4}^{-2}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

7) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{2+\ln x}}$; 8) $\int\limits_0^1 xe^{x^2}dx$; 9) $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$;

10) $\int\limits_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}dx$; 11) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^2 xdx$; 12) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 xdx$;

13) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+\cos x}$; 14) $\int\limits_0^{\sqrt{4}-1} \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$; 15) $\int\limits_1^4 \frac{(2x+1)dx}{x^2+4x+12}$.

2. Найти интегралы:

1) $\int\limits_0^{\ln 2} xe^{-x}dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2xdx$; 3) $\int\limits_0^{2\pi} x^2\cos\frac{x}{2}dx$;

4) $\int\limits_0^4 \sqrt{x}\ln(x+3)dx$; 5) $\int\limits_0^3 \ln^2 xdx$; 6) $\int\limits_0^1 \arcsin xdx$;

7) $\int\limits_0^1 arctg\sqrt{x}dx$; 8) $\int\limits_0^{\pi} e^x\sin 2xdx$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ ДУГИ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

I. Примеры решения задач

***Пример* 1.** *Найти длину дуги кривой* $y=\sqrt{2x-x^2}-1,\ \frac{1}{4}\le x\le 1.$

Решение. Воспользуемся формулой: $l=\int\limits_a^b \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx.$ Имеем

$$y'=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}},\quad 1+\left(y'\right)^2=1+\frac{(1-x)^2}{2x-x^2}=\frac{1}{2x-x^2}.$$

Искомая длина равна

$$l=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}dx=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}=\arcsin(x-1)\Big|_{\frac{1}{4}}^{1}=\arcsin\frac{3}{4}.$$

***Пример* 2.** *Вычислить длину дуги кривой* $\begin{cases} x=e^t\sin t, \\ y=e^t\cos t, \end{cases}$ от $t=0$ до $t=\frac{\pi}{2}.$

Решение. Кривая задана параметрическими уравнениями. Для вычисления длины кривой воспользуемся формулой

$$l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}dt.$$

$$x'(t)=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t),$$

$$y'(t) = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t(\cos t - \sin t).$$

$$\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 = e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 =$$
$$= e^{2t}(2\sin^2 t + 2\cos^2 t) = 2e^{2t}.$$

Тогда

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2e^{2t}}\,dt = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t dt = \sqrt{2}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1).$$

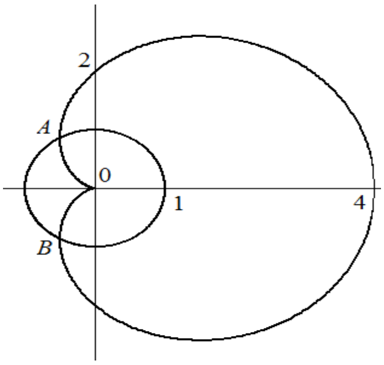

Рис. 6

***Пример* 3.** *Найти длину кривой* $r = 2(1+\cos\varphi),\ r \le 1.$

Решение. Кривая, заданная уравнением $r = 1$, это окружность с центром в начале координат радиуса 6. Нужно найти длину части кривой $r = 2(1+\cos\varphi)$, лежащей внутри окружности (рисунок 6).

Найдём точки пересечения этих кривых, решая систему уравнений

$$\begin{cases} r = 2(1+\cos\varphi), \\ r = 1. \end{cases}$$

Получаем $2(1+\cos\varphi) = 1$ или $\cos\varphi = -\frac{1}{2}.$ Следовательно, $\varphi_1 = \frac{2\pi}{3},\ \varphi_2 = \frac{4\pi}{3}.$

Нужно найти длину дуги *AOB*.

Так как данная кривая симметрична относительно луча $\varphi = \pi,$ то найдём длину участка *OA* и умножим на 2. Этому участку соответствует изменение φ от $\frac{2\pi}{3}$ до π. Для вычисления длины кривой воспользуемся формулой

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi.$$

Имеем $r' = -2\sin\varphi,$

$$r^2 + r'^2 = 4(1+\cos\varphi)^2 + 4\sin^2\varphi =$$
$$= 4(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 8(1+\cos\varphi).$$

Получаем

$$l = 2\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \sqrt{8(1+\cos\varphi)}\,d\varphi = 2\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} 4\sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi = 8\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= 16\sin\frac{\varphi}{2}\Bigg|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} = 16(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{3}) = 16(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 8(2 - \sqrt{3}).$$

II. Задачи и упражнения для практических занятий

1. Найдите длину кривой:

1) $y = x^2,\ 0 \le x \le 2;$

2) $y = 2x^{\frac{3}{2}},\ 0 \le x \le 11;$

3) $x = \frac{2}{3}\sqrt{(y-1)^3},\ 0 \le x \le 2\sqrt{3};$

4) $x^2 = 5y^3,\ x^2 + y^2 \le 6;$

5) $y = \frac{x}{6}\sqrt{x+12},\ -11 \le x \le -3;$

6) $y = \ln x,\ 2\sqrt{2} \le x \le 2\sqrt{6};$

7) $y = \ln\sin x,\ \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3};$

8) $y = \ln(x^2 - 1),\ 2 \le x \le 5.$

2. Вычислить длину дуги кривой $x = t^2,\ \ y = t - \frac{1}{2}t^2$ в пределах от 0 до $\sqrt{3}$.

3. На циклоиде $x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t)$ найти точку, которая делит первую арку циклоиды по длине в отношении 1:3.

4. Найти длину астроиды $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

5. Найти длину эвольвенты окружности, заданной параметически уравнениями $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$ от $t = 0$ до $t = 2\pi$.

6. Найти длину петли кривой $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t(\frac{1}{3} - t^2). \end{cases}$

7. Найти длину дуги кривой $x = \sin^4 t,\ y = \cos^2 t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$

8. Найти длину кардиоиды $r = a(1 + \cos\varphi)$.

9. Найти длину гиперболической спирали $r\varphi = 1$ от точки $\left(2; \frac{1}{2}\right)$ до точки $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

10. Найти длину логарифмической спирали $r = e^{a\varphi}$ от точки (1; 0) до точки $\left(e^{2\pi a}; 2\pi\right)$.

11. Найти длину линии $r = a\sin\varphi$.

12. Найти длину кривой $r = a(1 - \sin\varphi),\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le -\frac{\pi}{6}.$

13. Найти длину замкнутой кривой $r = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

НАХОЖДЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ФИГУР

I. Примеры решения задач

***Пример* 1.** *Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой* $y = x - 1$ *и параболой* $y = 1 - x^2$.

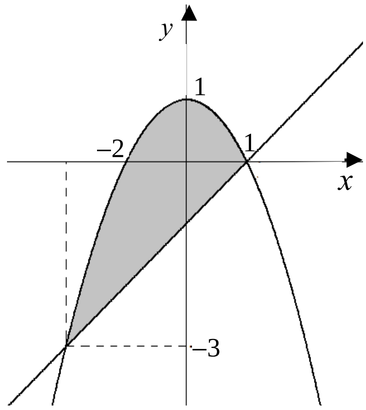

Рис. 7

Решение. Фигура, ограниченная данными линиями, изображена на рисунке 7.

Найдём абсциссы точек пересечения прямой с параболой, решив систему уравнений
$$\begin{cases} y = x - 1, \\ y = 1 - x^2. \end{cases}$$

Получаем точки $x_1 = -2$; $x_2 = 1$ – это и будут пределы интегрирования.

При вычислении площади воспользуемся формулой
$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx,$$
где $f_2(x) = 1 - x^2$, $f_1(x) = x - 1$.

Искомая площадь равна
$$S = \int_{-2}^{1} ((1 - x^2) - (x - 1))dx = \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)dx = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$
$$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right) = \frac{9}{2}.$$

***Пример* 2.** *Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой* $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (рисунок 8).

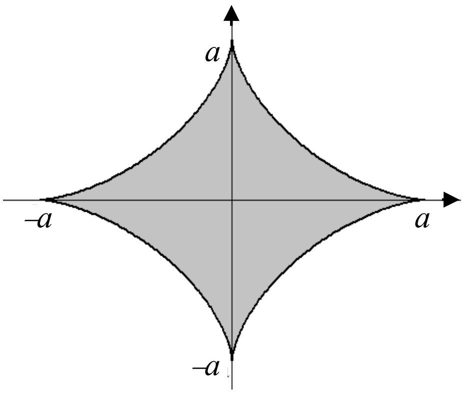

Рис. 8.

Решение. Перейдём к параметрическому заданию границы плоской фигуры:
$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Так как фигура симметрична относительно координатных осей, то найдём площадь части фигуры, расположенной в I четверти и умножим на 4.

Площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрически, находится по формуле $S = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$. Так как для части фигуры, находящейся в первой четверти, переменная x изменяется от 0 до a, то параметр t изменяется от $t=\dfrac{\pi}{2}$ (для $x = 0$) до $t = 0$ (для $x = a$).

Получаем

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y(t)x'(t)dt = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)dt =$$

$$= -12a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^4 t\cos^2 t dt = -12a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^2 2t}{4}\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}dt =$$

$$= -\frac{3}{2}a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\sin^2 2t - \sin^2 2t\cos 2t)dt = -\frac{3}{2}a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1-\cos 4t}{2}dt +$$

$$+\frac{3}{4}a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 2t d(\sin 2t) = -\frac{3}{4}a^2\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0} + \frac{1}{4}a^2\sin^3 2t\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

***Пример* 3.** *Найти площадь фигуры, ограниченной кривой* $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ (*лемниската Бернулли*) (рисунок 9).

Решение. Найдем область определения функции $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ из неравенства $\cos 2\varphi \ge 0$. Отсюда находим, что

$$-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \text{ и } \frac{3\pi}{4} \le \varphi \le \frac{5\pi}{4}.$$

График линии изображен на рисунке 9.

Найдем по формуле $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi$ площадь одной из двух равных частей фигуры и удвоим результат

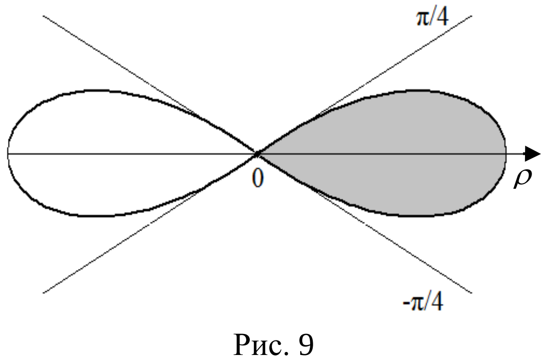

Рис. 9

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi d\varphi =$$

$$a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2}a^2\sin 2\varphi\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

II. Задачи и упражнения для практических занятий

1. Найдите площади фигур, ограниченных линиями:

1) $y = x^2+1,\ x+y=3;$ 2) $y=0,\ y=(x+1)^2,\ y=4-x;$

3) $y^2 = 2x+1,\ x-y-1=0;$ 4) $y=2-x^2,\ y^2=x^3;$

5) $y = x^2,\ x + y = 2;$ 6) $y = \sin x,\ y = 0,\ 0 \le x \le \pi;$

7) $y = 2x - x^2,\ y = x;$ 8) $x^2 + y^2 = 4y,\ 2y = x^2\ (2y \le x^2);$

9) $y^2 + x = 4,\ y^2 - 3x = 12;$ 10) $x^2 + y^2 = 2,\ y^2 = 2x - 1,\ x \ge \frac{1}{2};$

11) $y = x,\ y = \frac{1}{x},\ y = \frac{10}{3} - x,\ x \ge 1.$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 2x + 3$, касательной к ней в точке $(3;\ 6)$ и осями координат.

3. Вычислить площадь фигуры, заключённой между параболой $y = x^2 - 2x + 2$, касательной к ней в точке $M(3;5)$ и осью ординат.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = -x^2 + 4x - 3$, касательными к ней в точках $M_1(0;-3)$ и $M_2(3;0)$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой:

1) $x = a\cos t,\ y = b\sin t$ (эллипс);

2) $x = a(2\cos t - \cos 2t),\ y = a(2\sin t - \sin 2t)$ (кардиоида);

3) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$ (одна арка циклоиды) и отрезком $[0;\ 2\pi a]$ оси абсцисс;

4) $x = a(\cos t + t\sin t),\ y = a(\sin t - t\cos t),\ 0 \le t \le 2\pi,\ x = a,\ \ y \le 0,$ (развёртка круга).

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми:

1) $\rho = a\sin 2\varphi;$ 2) $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ (кардиоида);

3) $\rho = 2a\sin 3\varphi;$ 4) $\rho^2 = 2\sin 2\varphi,\ \rho = 1,\ \rho \ge 1;$

5) $(x^2 + y^2)^2 = xy;$ 6) $\rho = 2\sqrt{3}a\cos\varphi,\ \rho = 2a\sin\varphi;$

7) $\rho = 2 - \cos\varphi,\ \rho = \cos\varphi.$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ И ПЛОЩАДЕЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

I. Примеры решения задач

***Пример* 1.** *Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной параболой* $y = x^2$ *и прямой* $y = 3x - 2$.

Решение. Найдём абсциссы точек пересечения кривых, решив систему уравнений $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 3x - 2. \end{cases}$ Получим точки $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

Для вычисления объёма тела вращения воспользуемся формулой

$$V = \pi\int_a^b (f_2^{\,2}(x) - f_1^{\,2}(x))dx.$$

В нашем случае $f_2(x)=3x-2,\quad f_1(x)=x^2.$

Имеем

$$V=\pi\int_1^2((3x-2)^2-x^4)dx=\pi\int_1^2(9x^2-12x+4-x^4)dx=$$

$$=\pi\left(9\frac{x^3}{3}-6x^2+4x-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_1^2=\pi\left(3\cdot7-6\cdot3+4-\frac{1}{5}\cdot31\right)=\frac{4}{5}\pi.$$

***Пример* 2.** *Вычислить объём тела, которое образуется при вращении одной арки циклоиды* $x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),$ (*рисунок* 10) *вокруг оси абсцисс.*

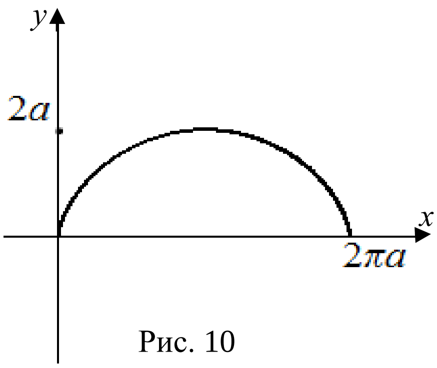

Рис. 10

Решение.

Объём вычислим по формуле

$$V=\pi\int_0^{2\pi a}y^2dx.$$

Сделаем замену переменной, полагая $x=a(t-\sin t)$. Изменению x от 0 до $2\pi a$ соответствует изменение t от 0 до 2π.

$$dx=a(1-\cos t)dt$$

Получаем

$$V=\pi\int_0^{2\pi}a^3(1-\cos t)^3dt=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)dt=$$

$$=\pi a^3(t-3\sin t)\Big|_0^{2\pi}+\frac{3\pi a^3}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)dt-\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\sin^2 t)d\sin t=$$

$$=2\pi^2a^3+\frac{3}{2}\pi a^3\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}-\pi a^3\left(\sin t-\frac{\sin^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=5\pi^2a^3.$$

***Пример* 3.** *Вычислить площадь поверхности шара радиуса R.*

Решение. Можно считать, что шар получен вращением вокруг оси *Ox* полуокружности $y=\sqrt{R^2-x^2}$.

Для вычисления площади поверхности тела вращения воспользуемся формулой $P=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx.$

Находим

$$y'=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}},\ 1+\left(y'\right)^2=1+\frac{x^2}{R^2-x^2}=\frac{R^2}{R^2-x^2};$$

$$y(x)\sqrt{1+\left(y'\right)^2}=\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}}=R.$$

Следовательно, $P=2\pi\int_{-R}^{R}Rdx=2\pi Rx\Big|_{-R}^{R}=4\pi R^2.$

II. Задачи и упражнения для практических занятий

1. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной данными линиями, вокруг оси Ox:

1) $xy = 4,\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0;$

2) $(y-3)^2 + 3x = 0,\ x = -3;$

3) $y = x^2 + 1,\ \ y = 0,$ $x_1 = -a,\ x_2 = a\ (a > 0);$

4) $y^2 = 2x,$ $x_1 = a,\ x_2 = b\ (0 < a < b);$

5) $y = \sin x,\ \ y = 0,\ \ 0 \le x \le \pi;$

6) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}};$

7) $y = -x^2 + 3,\ y = x^2 + 1;$

8) $y = x^2,\ x = y^2;$

9) $y = e^x,\ y = 1,\ x = 0;$

10) $y = \sin x,\ y = \dfrac{2}{\pi}x;$

11) $y = \dfrac{9}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),\ x_1 = -b,\ x_2 = b\ (b > 0).$

2. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной данными линиями, вокруг оси Oy:

1) $y = x^2,\ \ y = 1;$

2) $y = \sin x,\ \ x = 0,\ y = 1;$

3) $y = \sin x,\ \ y = 0,\ \ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2};$

4) $y = e^x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2;$

5) $y^2 = x + 4,\ x = 0;$

6) $y = x(4 - x),\ y = 0;$

7) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 0$ (первая арка);

8) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

3. Найти площадь поверхности, образованной при вращении вокруг оси Ox данной кривой:

1) $y = \sqrt{x},\ \ \dfrac{5}{4} \le x \le \dfrac{21}{4};$

2) $y = x^3,\ \ 0 \le x \le 1;$

3) $y^2 = 4x,\ \ 0 \le x \le 3;$

4) $y^2 = 4 + x,\ \ -4 \le x \le 2.$

4. Найти площадь поверхности, образованной при вращении вокруг оси Oy данной кривой:

1) $x = \ln\left(y - \sqrt{y^2 - 1}\right),\ \ \dfrac{5}{4} \le y \le \dfrac{5}{3};$

2) $4x + 2\ln y = y^2,\ \ e^{-1} \le y \le e;$

3) $y^2 = 2(x - 1),\ \ 0 \le y \le 1;$

4) $3x = 4\cos y,\ \ -\dfrac{\pi}{2} \le y \le 0.$

5. Найти площадь поверхности, образованной при вращении кривой L, заданной параметрически, вокруг данной оси:

1) $x = \sqrt{2}\sin t,\ \ y = \dfrac{1}{4}\sin 2t,\ \ 0 \le t \le \pi$ вокруг оси Ox; вокруг оси Oy;

2) $x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t),\ \ 0 \le t \le 2\pi$ вокруг оси Ox; вокруг оси Oy;

3) $x = a\cos^3 t,\ \ y = a\sin^3 t,\ \ 0 \le t \le 2\pi$ вокруг оси Ox;

4) $x = 2\sqrt{3}\cos t,\ \ y = \sin 2t$ вокруг оси Ox.

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ФИЗИКЕ И МЕХАНИКЕ

I. Примеры решения задач

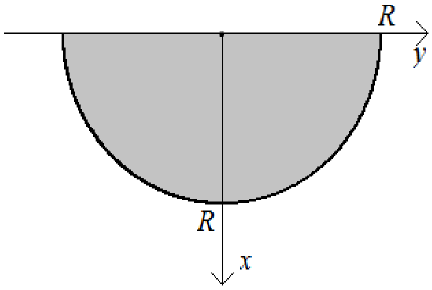

Рис. 11

***Пример* 1.** *Найти величину давления жидкости на полукруг, вертикально погружённый в жидкость, если его радиус равен R, а верхний диаметр лежит на свободной поверхности жидкости* (*рисунок* 11), *удельный вес жидкости равен* γ.

Решение. Воспользуемся формулой

$$P = g\int_a^b \gamma x y(x)dx.$$

В силу симметрии полукруга достаточно найти силу давления на одну из четвертей, а затем удвоить результат. Расположим систему координат таким образом, как показано на рисунке 11.

Тогда уравнение окружности, ограничивающей полукруг, имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$.

Уравнение правой четверти окружности: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $0 \le x \le R$.

По формуле получаем

$$P = 2g\gamma\int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}dx = -\frac{2}{3}g\gamma\left(R^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R = \frac{2}{3}g\gamma R^3.$$

***Пример* 2.** *Фигура ограничена параболой* $y = 1 - x^2$ *и осью Ox. Считая фигуру однородной и* $\rho = 1$, *найти координаты центра масс фигуры и её момент инерции относительно оси Oy.*

Решение. Массу фигуры найдём по формуле $m = \int_a^b \rho y(x)dx.$

Получаем $m = 2\int_0^1 (1 - x^2)dx = 2\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{3}$. Далее:

$$M_y = \int_{-1}^1 xy(x)dx = \int_{-1}^1 x(1 - x^2)dx = 0. \text{ Отсюда } x_c = \frac{M_y}{m} = 0.$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 y^2(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (1 - x^2)^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (1 - 2x^2 + x^4)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_{-1}^1 = \frac{8}{15}.$$

Получаем $y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{2}{5}$.

Момент инерции I_y находим по формуле

$$I_y = \int_a^b x^2 y(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}x^5\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4}{15}.$$

***Пример* 3.** *Найти декартовы координаты центра тяжести части кардиоиды* $\rho = a(1+\cos\varphi)$ от $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$.

Решение. Выберем оси координат как показано на рисунке 12.

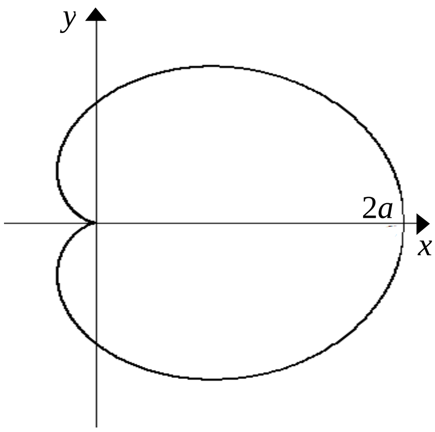

Рис. 12

Запишем уравнение кардиоиды в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = a(1+\cos\varphi)\cos\varphi, \\ y = a(1+\cos\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$$

Так как плоская линия однородна, то $\rho = 1$. Тогда $m = l = 8a$ (длина всей кардиоиды). Масса половины кардиоиды равна $4a$. Получаем

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{4a}\int_0^{\pi} y(\varphi)dl =$$

$$= \frac{1}{4a}\int_0^{\pi} a\sin\phi(1+\cos\phi)dl =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \sin\varphi(1+\cos\varphi)dl.$$

$$dl = \sqrt{\rho^2 - \rho'^2}d\varphi = a\sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}d\varphi = 2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi.$$

$$x_c = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} 2a\sin\varphi(1+\cos\varphi)\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = \frac{8}{5}a.$$

Аналогично,

$$y_c = \frac{1}{4a}\int_0^{\pi} xdl = \frac{1}{4a}\int_0^{\pi} a(1+\cos\varphi)\cos\varphi \cdot 2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = \frac{4}{5}a.$$

$$(x_c; y_c) = \left(\frac{8}{5}a; \frac{4}{5}a\right).$$

***Пример* 4.** Пользуясь второй теоремой Гульдена, *найти центр тяжести полукруга радиуса* a.

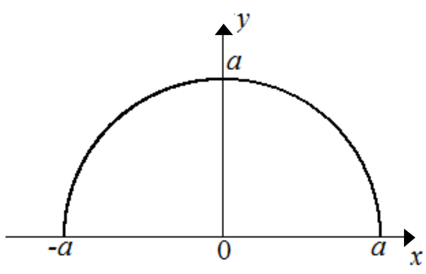

Рис. 13

Решение. Рассмотрим оси координат, как показано на рисунке 13. В силу симметричности фигуры относительно оси Oy её центр тяжести лежит на этой оси, т.е. $x_c = 0$.

Для нахождения y_c применим теорему Гульдена. Тело, получаемое при вращении полукруга вокруг оси Ox, есть шар радиуса a, его объём равен $\frac{4}{3}\pi a^3$. Площадь вращающейся фигуры равна $\frac{1}{2}\pi a^2$. Поэтому,

$$x_c = \frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{\pi}{2}a^2 \cdot 2\pi y_c, \qquad y_c = \frac{4}{3}\frac{a}{\pi}.$$

II. Задачи и упражнения для практических занятий

1. Определить силу давления жидкости на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 18 м и высотой 6 м.

2. Вычислить силу давления жидкости на треугольник, высота которого h, и основание a см, если он погружен в жидкость таким образом, что основание его лежит на поверхности жидкости, а высота направлена вертикально вниз.

3. Вычислить силу давления воды на вертикальную плотину, имеющую форму равнобедренной трапеции, верхнее основание которой имеет 70 м в длину, нижнее 50 м, а высота 20 м.

4. Найти статические моменты M_x и M_y кривой:

1) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0;$ 2) $x^2+y^2=a^2,\ y\ge 0;$

3) $y = x^2 + 1,\ -1\le x\le 1;$ 4) $y^2=2x,\ 0\le x\le 2;$

5) $\begin{cases} x = a\sin t, \\ y = a\cos t, \end{cases} 0\le t\le \frac{\pi}{2},\ a<b;$ 6) $\begin{cases} x = a\sin^3 t, \\ y = a\cos^3 t, \end{cases} 0\le t\le \frac{\pi}{2};$

7) $r = 2a\cos\varphi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2};$ 8) $r = a(1+\cos\varphi),\ -\pi\le\varphi\le\pi.$

5. Найти координаты центра масс кривой:

1) $x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi;$ 2) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}},\ x\ge 0,\ y\ge 0;$

3) $x = a(t-\sin t),\ y = a(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi;$

4) $r = a(1+\cos\varphi),\ 0\le\varphi\le\pi.$

6. Найти момент инерции I_x или I_y) кривой:

1) $y = e^x,\ 0\le x\le\frac{1}{2},\ I_x;$ 2) $x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi,\ I_x;$

3) $x = a(t-\sin t),\ y = a(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi,\ I_x$ и I_y.

7. Найти статические моменты и координаты центра масс фигуры, ограниченной кривыми:

1) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\ x=0,\ y=0,\ a>0,\ b>0;$

2) $x^2+y^2=R^2,\ y\ge 0,\ y=0;$

3) $y=\sin x,\ 0\le x\le\pi,\ y=0;$

4) $y = x^2,\ y=\sqrt{x};$

5) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi,\ \ y = 0;$

6) $r = a\varphi,\ \ 0 \le \varphi \le \pi;$

7) $r = a(1 + \cos\varphi).$

8. Найти моменты инерции однородного прямоугольника со сторонами a и b относительно его осей симметрии.

9. Найти момент инерции однородного круга радиуса R относительно его диаметра.

10. Найти момент инерции однородного треугольника с основанием a и высотой h относительно:

а) оси, содержащей его основание;

б) оси, проходящей через высоту треугольника; опущенную из вершины.

НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

I. Примеры решения задач

Пример **1.** *Вычислить интегралы или установить их расходимость*:
а) $\int\limits_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 4}$; *б*) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+1}dx$.

Решение. *а*) $\int\limits_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_3^{b} \frac{dx}{x^2-4} = \lim\limits_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{4} \ln\left| \frac{x-2}{x+2} \right| \right)\Bigg|_3^b =$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{b-2}{b+2}\right| - \ln\frac{1}{5} \right) = \frac{1}{4}\ln 5.$$

б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+1}dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_0^{b} \frac{x+1}{x^2+1}dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \left(\int\limits_0^{b} \frac{xdx}{x^2+1} + \int\limits_0^{b} \frac{dx}{x^2+1} \right) =$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x \right)\Bigg|_0^b = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\ln(b^2+1) + \operatorname{arctg} b \right) = +\infty,$$

т.е. данный интеграл расходится.

Пример **2.** *Исследовать на сходимость* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x+2}{x^2\sqrt{x+5}}dx.$

Решение. Сравним подынтегральную функцию с функцией $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+2)\sqrt{x^3}}{x^2\sqrt{x+5}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+2)\sqrt{x}}{x\sqrt{x+5}} = 1.$$

Из теоремы сравнения в предельной форме вытекает, что исследуемый интеграл и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ одновременно сходятся или расходятся.

Интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ сходится, так как $\alpha=\frac{3}{2}>1$. Следовательно, и интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{x+2}{x^2\sqrt{x+5}}dx$ тоже сходится.

***Пример* 3.** *Исследовать на абсолютную сходимость* $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^3}dx.$

Решение. Так как $\left|\frac{\sin x}{x^3}\right|\le\frac{1}{x^3}$, а $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$ сходится, то интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^3}dx$ сходится абсолютно.

***Пример* 4.** *Вычислить несобственный интеграл* $I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$

Решение. Подынтегральная функция не ограничена в окрестностях точек $x=0$ и $x=1$. Поэтому представим интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=I_1+I_2.$$

$$I_1=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{0+\varepsilon}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{0+\varepsilon}^{\frac{1}{2}}\frac{d(2x-1)}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\arcsin(2x-1)\Big|_{0+\varepsilon}^{\frac{1}{2}}=\lim_{\varepsilon\to+0}(\arcsin 0-\arcsin(2\varepsilon-1))=\frac{\pi}{2}.$$

$$I_2=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}(\arcsin(1-2\varepsilon)-\arcsin 0)=\frac{\pi}{2}.$$

Тогда $I=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$.

***Пример* 5.** *Исследовать на сходимость* $I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$

Решение. Сравним данный интеграл с интегралом $I_1=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}:\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}=\frac{1}{2}.$$

Интеграл I_1 сходится, так как $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, тогда, по теореме сравнения в предельной форме, сходится и интеграл I.

II. Задачи и упражнения для практических занятий

1. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

1) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4}$; 2) $\int_0^{+\infty} \sin 2x dx$; 3) $\int_1^{+\infty} e^{-5x} dx$;

4) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+x^3}$; 5) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx$; 6) $\int_3^{+\infty} \frac{2x+5}{x^2+3x-10} dx$;

7) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; 8) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$; 9) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-5x+7}$;

10) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$; 11) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2+x)}{x} dx$.

2. Исследовать интегралы на сходимость:

1) $\int_2^{+\infty} \frac{xdx}{x^2-1}$; 2) $\int_0^{+\infty} \frac{x^3+5}{x^5-x^2+4} dx$; 3) $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$;

4) $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt[3]{1+x^7}}$; 5) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x+2}dx}{1+3\sqrt{x}+2x+x^2}$; 6) $\int_1^{+\infty} x \cos x dx$;

7) $\int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx$; 8) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$.

3. Вычислить несобственные интегралы от неограниченных функций:

1) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$; 2) $\int_2^3 \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^2-4}}$; 3) $\int_{-2}^0 \frac{dx}{(x+1)\cdot\sqrt[3]{x+1}}$;

4) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$; 5) $\int_0^{-\frac{1}{4}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$; 6) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$;

7) $\int_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$; 8) $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$.

4. Исследовать интегралы на сходимость:

1) $\int_0^3 \frac{dx}{x^2+3\sqrt[3]{x}}$; 2) $\int_0^2 \sqrt{\frac{16+x^4}{16-x^4}} dx$; 3) $\int_1^2 \frac{(x-2)dx}{x^3-3x^2+4}$;

4) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$; 5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$; 6) $\int_0^1 \frac{dx}{x-\sin x}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Учебники и учебная литература

1. Ильин В.А., Позняк Э.Т. Основы математического анализа. – Ч. 1. – М. Наука. – 1982.
2. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов В.Л. К. Математический анализ. – Т. 1. – М. Наука. – 1979.
3. Никольский С.М. Курс математического анализа. – Т. 1. – М.: Наука, 1990.
4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. – Т. 1. – М. Наука. – 1989.
5. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. – Т. 1. – Физматгиз. – 1960.
6. Иванова Ж.В., Сурин Т.Л., Шерегов С.В. Математический анализ. Введение в анализ. Производная. – Витебск: Изд-во УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2008.
7. Иванова Ж.В., Сурин Т.Л., Шерегов С.В. Математический анализ. Применение дифференциального исчисления. Интегральное исчисление функции одной переменной. – Витебск: Изд-во УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2008.

Сборники задач и упражнений

8. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985.
9. Демидович Б.П Сборник задач по математическому анализу. – М.: Наука, 1990.
10. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. / Данко П.Е., Попо А.Г., Кожевникова Т.Я. – М. Высшая школа. – Ч. 1. – 1986.
11. Давыдов Н.А., Коровкин П.П., Никольский Б.Н. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Просвещение, 1990.
12. Индивидуальные задания по высшей математике / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть / Под редакцией А.П. Рябушко – Мн.: Вышэйшая школа.– Ч. 1., 2008.

Учебное издание

СУРИН Татьяна Леонидовна

ИВАНОВА Жанна Викторовна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Методические рекомендации
к практическим занятиям

Технический редактор *Г.В. Разбоева*

Компьютерный дизайн *В.Л. Пугач*

Подписано в печать 2022. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,79. Уч.-изд. л. 1,00. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/255 от 31.03.2014.

Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.