# О ЛИНЕЙНЫХЪ

## ОБЫКНОВЕННЫХЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ

## УРАВНЕНІЯХЪ

### СЪ ПРАВИЛЬНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ.

---

РАЗСУЖДЕНІЕ

С. Е. САВИЧА.



САНКТПЕТЕРБУРГЪ.
ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
Вас. Остр., 9 лин., № 12.
1892.

# О ЛИНЕЙНЫХЪ

## ОБЫКНОВЕННЫХЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ

## УРАВНЕНІЯХЪ

### СЪ ПРАВИЛЬНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ.

---

РАЗСУЖДЕНІЕ

С. Е. САВИЧА.



САНКТПЕТЕРБУРГЪ.
ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
Вас. Остр., 9 лин., № 12.
1892.

По опредѣленію Физико-Математическаго Факультета Императорскаго С.-Петербургскаго Университета печатать разрѣшается. 20 декабря 1891 г.

Деканъ *А. Совѣтовъ.*

# ВВЕДЕНІЕ.

Главную задачу разсмотрѣнія дифференціальныхъ уравненій составляетъ обыкновенно изслѣдованіе тѣхъ случаевъ, когда интегралы даннаго уравненія могутъ быть выражены черезъ извѣстныя функціи или въ видѣ квадратуръ. Число уравненій, которыя допускали бы интегрированіе въ этомъ смыслѣ, чрезвычайно ограничено; между тѣмъ функціи, удовлетворяющія извѣстному классу уравненій, обладаютъ нѣкоторыми характеристическими особенностями, которыя иногда возможно обнаружить, и не имѣя явнаго выраженія интеграловъ.

Бріо и Букэ, въ извѣстномъ мемуарѣ „Sur les fonctions définies par les équations différentielles" (Journal de l'Ecole Polytechnique, cah. 22), руководимые работами Cauchy по теоріи функцій отъ комплекснаго перемѣннаго, впервые обратили вниманіе на возможность подобнаго изслѣдованія.

Вторымъ шагомъ въ томъ же направленіи можетъ быть названа работа Riemann'a: „Beiträge zur Theorie der durch Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen", въ которой разсматриваются свойства функцій, удовлетворяющихъ нѣкоторому линейному уравненію $2^{\text{аго}}$ порядка. Затѣмъ, въ мемуарахъ: „Zur Theorie der linearen Differenzialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten" (Crelle's Journal Bd. 66, 68) Fuchs приложилъ общія соображенія объ изслѣдованіи свойствъ функцій по дифференціальнымъ уравненіямъ, которымъ онѣ удовлетворяютъ, къ однороднымъ линейнымъ уравненіямъ.

Интегралы линейныхъ уравненій, какъ оказалось, не имѣютъ другихъ особенныхъ точекъ, кромѣ тѣхъ, которыя являются особенными точками хотя бы для одного изъ коэффиціентовъ уравненія. Это свойство, вмѣстѣ съ извѣстнымъ уже давно положеніемъ, что всякій интегралъ линейнаго уравненія порядка $n$ можетъ быть представленъ въ видѣ линейной однородной функціи, съ постоянными коэффиціентами, отъ $n$ какихъ нибудь другихъ, линейно между собой независимыхъ, интеграловъ, дало Fuchs'у возможность установить, что

1) въ области особенной точки $a$ интегралы линейнаго уравненія порядка $n$ имѣютъ видъ

$$y=(x-a)^{\rho}\{\varphi_1(x-a)+\varphi_2(x-a)\lg(x-a)+\ldots+\varphi_m(x-a)\lg^{m-1}(x-a)\},$$

гдѣ $\varphi$ — однозначныя, разлагающіяся по цѣлымъ степенямъ $x-a$ функціи, $\rho$—число, равное $\frac{1}{2\pi i}\lg\omega$, а $\omega$ есть корень алгебраическаго уравненія степени $n$, коэффиціенты коего зависятъ однозначнымъ образомъ отъ постоянныхъ, входящихъ въ коэффиціенты уравненія; $m$—цѣлое положительное число, не больше кратности корней упомянутаго алгебраическаго уравненія (основнаго).

2) число $\rho$ въ одномъ, весьма общемъ случаѣ (именно, когда всѣ интегралы уравненія въ области точки $a$ правильны, т. е. функціи $\varphi_1$, $\varphi_2, \ldots \varphi_m$, по умноженіи на $x-a$ въ нѣкоторой конечной степени $m$, имѣютъ при $x=a$ конечное значеніе), зависитъ алгебраическимъ образомъ отъ нѣкоторыхъ постоянныхъ, входящихъ въ коэффиціенты уравненія.

Эти общія указанія относительно формы интеграловъ значительно облегчили приложеніе методы неопредѣленныхъ коэффиціентовъ къ нахожденію разложеній интеграловъ въ ряды.

Кромѣ того они дали возможность рѣшить нѣкоторые частные вопросы относительно интеграловъ линейныхъ уравненій. Изслѣдованіе Fuchs'а обратили на себя всеобщее вниманіе и вызвали обширную литературу, посвященную теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій. Работы сосредоточились на слѣдующихъ главныхъ пунктахъ:

1. На дополненіи и разъясненіи нѣкоторыхъ пунктовъ общей теоріи. Сюда относятся многочисленныя изслѣдованія Thomé отно-

сительно условій, по которымъ возможно было бы судить о числѣ правильныхъ и неправильныхъ интеграловъ уравненія, и о нѣкоторыхъ случаяхъ неправильныхъ интеграловъ. Затѣмъ — изслѣдованія Hamburger'а о группахъ интеграловъ, соотвѣтствующихъ кратному корню основнаго уравненія и приложеніе полученныхъ результатовъ къ болѣе точному опредѣленію вида интеграловъ въ области соотвѣтственной особенной точки; замѣчанія Hamburger'а и Mittag-Leffler'а о выраженіяхъ коэффиціентовъ основнаго уравненія черезъ постоянныя, входящія въ коэффиціенты уравненія, и др.

2. На изслѣдованіи случаевъ, когда линейныя уравненія удовлетворяются функціями заданнаго вида. Сюда относятся весьма обширныя и интересныя изслѣдованія объ условіяхъ, необходимыхъ и достаточныхъ, чтобы уравненіе 2^аго^ порядка имѣло общій интегралъ алгебраическій.

Первое изслѣдованіе въ этомъ направленіи принадлежитъ Schwarz'у, связавшему названный вопросъ съ теоріей преобразованія плоскихъ фигуръ съ сохраненіемъ подобія въ безконечно-малыхъ частяхъ; имъ указаны всѣ случаи, когда уравненіе гипергеометрическаго ряда имѣетъ общій интегралъ алгебраическій.

Затѣмъ Fuchs далъ условія необходимыя для существованія алгебраическаго общаго интеграла уравненія 2^аго^ порядка, исходя изъ нѣкоторыхъ соображеній теоріи формъ; онъ пришелъ къ слѣдующей теоремѣ: чтобы уравненіе 2^аго^ порядка имѣло общій интегралъ алгебраическій, необходимо и достаточно, чтобы нѣкоторая форма отъ 2 независимыхъ интеграловъ уравненія, степени 1, 2, 4, 6, 8, 10 или 12, была корнемъ (неопредѣленной степени) изъ раціональной функціи. Исходный пунктъ его изслѣдованія имѣетъ нѣкоторую связь съ замѣчаніями по тому же предмету Pepin'а, помѣщенными въ Annali di Tortolini за нѣсколько лѣтъ раньше.

Одновременно съ Fuchs'омъ вопросомъ объ алгебраическихъ интегралахъ уравненія 2^аго^ порядка занимался Klein, указавшій на связь его съ построеніемъ группъ линейныхъ подстановокъ конечнаго порядка; онъ привелъ вопросъ объ изслѣдованіи алгебраическихъ интеграловъ линейныхъ уравненій 2^аго^ порядка къ нахожденію раціональныхъ рѣшеній нѣкотораго нелинейнаго уравненія 3^аго^ порядка. Группы линейныхъ подстановокъ конечнаго порядка построены Klein'омъ съ помощью геометрическихъ соображеній; построеніе ихъ было произведено впослѣдствіи Gordan'омъ съ помощью теоріи формъ, и Jordan'омъ — съ помощью теоріи подстановокъ.

Вопросъ объ алгебраическихъ интегралахъ линейныхъ уравненій высшихъ порядковъ наиболѣе серьезно былъ затронутъ Halphen'омъ въ обширномъ мемуарѣ „Sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables“.

3. На приложеніи общей теоріи къ нѣкоторымъ частнымъ случаямъ линейныхъ уравненій. Сюда относятся изслѣдованія Goursat, Tannery, Pochhammer'a, Schafheitlin'a и др. объ уравненіи гипергеометрическаго ряда и аналогичныхъ съ нимъ уравненіяхъ высшихъ порядковъ; изслѣдованія Hermite'a, Brioschi и др. относительно извѣстнаго уравненія Лямэ, и т. д.

4. На постановкѣ относительно линейныхъ дифференціальныхъ уравненій нѣкоторыхъ вопросовъ, аналогичныхъ съ вопросами, относящимися къ обыкновеннымъ алгебраическимъ уравненіямъ — какъ то о приводимости дифференціальныхъ линейныхъ уравненій, о разложеніи уравненій на символическіе множители; о симметрическихъ функціяхъ отъ интеграловъ уравненія и т. д.; работы эти принадлежатъ Fröbenius'у, Floquet, Appel'ю, и др.; они дали въ нѣкоторыхъ случаяхъ новыя доказательства полученныхъ ранѣе другимъ путемъ теоремъ.

Обширность и разнообразіе литературы по теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, съ одной стороны, и несомнѣнный научный интересъ, который представляетъ эта теорія — съ другой, привели меня, еще осенью 1888 г., къ убѣжденію, что изложеніе общихъ ея основаній и указаніе характернѣйшихъ ея приложеній могло бы принести нѣкоторую пользу, тѣмъ болѣе, что въ то время въ русской литературѣ совсѣмъ не существовало работъ по этому предмету.

По разнымъ обстоятельствамъ осуществленіе этой мысли очень затянулось; но, не смотря на появленіе труда Г. Анисимова (Основанія теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій. Москва. 1889), въ которомъ обстоятельно изложены общія положенія теоріи, мнѣ кажется, что и въ настоящее время представляемая работа не будетъ лишена нѣкоторой пользы, такъ какъ въ упомянутомъ разсужденіи Г. Анисимова совершенно не затронуты приложенія общей теоріи, между тѣмъ, какъ именно приложеніе нѣкоторыхъ слѣдствій теоремы о правильныхъ интегралахъ представляетъ интереснѣйшую часть теоріи; вмѣстѣ съ тѣмъ самая теорія, при нѣкоторомъ измѣненіи порядка изложенія, можетъ быть представлена въ болѣе сжатомъ видѣ, безъ упущенія существенныхъ результатовъ.

Настоящее разсужденіе заключаетъ въ себѣ: изложеніе общихъ основаній теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, въ томъ видѣ, въ какомъ она представляется послѣ всѣхъ дополнительныхъ къ работѣ Fuchs'а изслѣдованій (гл. I); нѣкоторыя общія приложенія теоремы о правильныхъ интегралахъ съ поясненіями на примѣрѣ уравненія гипергеометрическаго ряда (гл. II); разсмотрѣніе вопроса объ алгебраическомъ общемъ интегралѣ уравненія 2$^{\text{аго}}$ порядка (теоремы Fuchs'а и Klein'а) — гл. III; и, наконецъ, изложеніе теоріи преобразованіи плоскихъ фигуръ съ сохраненіемъ подобія въ безконечномалыхъ частяхъ — по скольку эта теорія связана съ линейными уравненіями (гл. IV).

Изъ небольшихъ дополненій и упрощеній, которыя при этомъ мнѣ удалось достигнуть, позволю себѣ указать: на упрощеніе въ построеніи группъ линейныхъ подстановокъ конечнаго порядка, полученное предварительнымъ преобразованіемъ уравненія, группа котораго разсматривается; на однообразное построеніе формъ, принадлежащихъ группамъ, съ помощью главныхъ значеній нѣкоторыхъ подстановокъ; на болѣе точную постановку теоремы Fuchs'а объ алгебраическихъ интегралахъ уравненія 2$^{\text{аго}}$ порядка. Кромѣ того, сдѣланы дополнительныя замѣчанія о цѣлыхъ и раціональныхъ интегралахъ линейныхъ уравненій; весьма просто получено выраженіе интеграловъ уравненія гипергеометрическаго ряда въ томъ случаѣ, когда они содержатъ логариѳмы; въ нѣсколько иномъ видѣ (ср. Schwarz) представлено изслѣдованіе цѣлаго и раціональнаго общаго интеграла того же уравненія, — и алгебраическаго — для того частнаго случая, когда одно изъ чиселъ $1-\gamma$, $\gamma-\alpha-\beta$, $\alpha-\beta$ — цѣлое, и наконецъ, представленъ общій сводъ алгебраическихъ интеграловъ послѣдняго уравненія.

Въ заключеніе считаю долгомъ упомянуть о работахъ русскихъ ученыхъ, имѣющихъ отношеніе къ разсмотрѣннымъ въ настоящемъ разсужденіи вопросамъ.

Изъ такихъ работъ, кромѣ указаннаго выше разсужденія Г. Анисимова, могу назвать:

М. Тихомандрицкаго: О гипергеометрическихъ рядахъ. СПБ. 1876.

А. Васильева: О функціяхъ раціональныхъ, аналогичныхъ функціямъ двойно-періодическимъ. Ученыя Записки Казанскаго Университета. 1880 г.

А. А. Маркова: Sur l'équation différentielle de la série hypergéométrique. Mathematische Annalen. B. 28—29, 1886—1887.

Въ разсужденіи М. Тихомандрицкаго лишь упомянуто о нѣкоторыхъ теоремахъ Fuchs'a относительно линейныхъ уравненій; главнымъ же предметомъ служитъ разсмотрѣніе различныхъ формъ гипергеометрическихъ рядовъ и преобразованія ихъ — предметъ, который совершенно не затрагивается въ настоящемъ разсужденіи.

Въ трудѣ А. В. Васильева изложены основанія методы Klein'a для изслѣдованія общаго алгебраическаго интеграла линейнаго уравненія 2-аго порядка. Главная теорема Klein'a изложена въ п. п. 17—19 III-ей главы настоящаго разсужденія; но построеніе группъ линейныхъ подстановокъ конечнаго порядка и формъ, принадлежащихъ имъ, произведено по другимъ пріемамъ.

Изслѣдованія А. А. Маркова относятся къ разсмотрѣнію случаевъ, когда 1) произведеніе двухъ какихъ нибудь интеграловъ уравненія гипергеометрическаго ряда есть цѣлый многочленъ, 2) логариѳмическая производная какого нибудь интеграла того же уравненія есть раціональная дробь и 3) логариѳмическая производная какого нибудь интеграла можетъ быть представлена въ видѣ $\frac{X+\sqrt{Y}}{Z}$. $X$, $Y$ и $Z$ — нѣкоторые цѣлые полиномы.

Пріемъ, которымъ рѣшены эти вопросы, не имѣетъ ничего общаго съ теоріей, коей посвящено настоящее разсужденіе. Второй вопросъ разсмотрѣнъ въ п. 10 главы II.

---

При изложеніи предмета сего разсужденія я имѣлъ въ виду читателей, знакомыхъ съ элементарными основаніями теоріи функцій отъ комплекснаго перемѣннаго, — въ томъ видѣ, въ коемъ эта теорія представлена въ классическомъ трудѣ Briot et Bouquet „Théorie des fonctions elliptiques", — и съ основаніями теоріи подстановокъ, въ изложеніи Serret „Cours d'algèbre supérieure".

---

## Списокъ главнѣйшихъ сочиненій по теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій.

---

### Общая теорія.


**Fuchs.** Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten. Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 66, 68.

**Thomé.** Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Crelle's Jour. Bd. 74, 75, 76, 78, 81, 83, 87, 91, 95, 96.

**Frobenius.** Ueber die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Reihen. Crelle's Jour. Bd. 76.

**Pochhammer.** Ueber einfach singuläre Puncte linearen Differentialgleichungen. Crelle's Jour. Bd. 73.

**Tannery.** Propriétés des intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients variables. Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure. 2 s., t. 4.

**Floquet.** Théorie des équations différentielles linéaires. An. Sc. de l'Ec. N. Sup. 2 s., t. 8.

**Grünfeld.** Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Crelle's Journ. Bd. 98.

**Cayley.** Note on the theory of linear differential equations. Crelle's Jour. Bd. 100.

**Heun.** Remarks on the Logarithmic integrals of regular linear differential equations. American Journal of Mathematics, t. 10.

**Heffter.** Ueber Recursionsformeln der Integralen linearer homogener Differentialgleichungen. Crelle's Jour. Bd. 106.

**Schafhcitlin.** Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten. Crelle's Jour. Bd. 106.

**Guichard.** Sur les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. Acta Mathematica, t. 12.

**Jordan.** Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique. Paris. 1888 г., t. III, p. 134—296.

**Анисимовъ.** Основанія теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій. Москва. 1889.

## О распредѣленіи интеграловъ независимой системы на группы.

**C. Jordan.** Mémoire sur une application de la théorie des substitutions à l'étude des équations différentielles linéaires. Bulletin de la Société Mathématique de France, t. II.

**Hamburger.** Bemerkungen über die Form der Integrale der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten. Crelle's Jour. Bd. 76.

**Jurgens.** Die Form der Integrale der linearen Differentialgleichungen. Crelle's Jour. Bd. 80.

**Stickelberger.** Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Leipzig. 1881.

**Gunther.** Ueber eine Methode die zu einem singulären Puncte einer linearen homogener Differentialgleichung gehörige Fundamentalgleichung zu bestimmen. Crelle's Jour. Bd. 106.

## Коэффиціенты обхода системы независимыхъ интеграловъ.

**Hamburger.** Ueber ein Princip zur Darstellung des Verhaltens mehrdeutiger Functionen einer complexer Variablen, insbesondere der Integrale linearen Differentialgleichung in der Umgebung singulärer Puncte. Crelle's Jour. Bd. 83.

**Fuchs.** Ueber die Darstellung der Functionen complexer Variablen, insbesondere der Integrale linearer Differentialgleichungen. Crelle's Journal. Bd. 75, 76.

**Mittag-Leffler.** Ueber die Relationen, welche für die zwischen je zwei singulären Puncten erstreckten Integrale der Lösungen linearer Differentialgleichungen stattfinden. Crelle's Journal. Bd. 75.

**Hamburger.** Ueber die Wurzeln der Fundamentalgleichung, die zu einem singulären Puncte einer linearen Differentialgleichung gehört. Crelle's Journal. Bd. 84.

**Mittag-Leffler.** Sur les invariants des équations différentielles linéaires. Acta Mathematica, t. XV.

## О приводимости линейныхъ уравненій.

**Frobenius.** Ueber ein Begriff der Irreductibilität in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Crelle's Jour. Bd. 76.

**Frobenius.** Ueber die regulären Integrale der linearen Differentialgleichungen. Crelle's Jour. Bd. 80.

**Frobenius.** Ueber adjungirte lineare Differentialausdrücke. Crelle's Journal. Bd. 85.

**Königsberger.** Ueber die Irreductibilität der linearen Differentialgleichungen. Crelle's Jour. Bd. 96.

**Ratner.** Ueber eine Eigenschaft gewisser linearer irreductibilitärer Differentialgleichungen. Mathematische Annalen. Bd. 32.

**Stenberg.** Einige Eigenschaften der linearen und homogenen Differentialgleichungen. Acta Math., t. 8.

**Fabry.** Sur la réductibilité des équations différentielles linéaires. Bul. de la Soc. Mathém. de Fr., t. 16.

**Bigiavi.** Sopra una classe di equazioni differenziale lineari reducibili. Annali di Mathematica. II s., t. XIX.

## Алгебраическіе интегралы линейныхъ уравненій.

**Pepin.** Mémoire sur l'intégration sous forme finie de l'équation différentielle linéaires du 2 ordre. Annali di Matematica di Tortolini, t. V.

**Schwarz.** Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elements darstellt. Crelle's Jour. Bd. 75.

**Frobenius.** Ueber algebraisch integrirbare Differentialgleichungen. Crelle's Jour. Bd. 80.

**Fuchs.** Ueber die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Inwariantentheorie (2. Abt.). Crelle's Journal. Bd. 81, 85.

**Klein.** Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst. Math. Annalen. Bd. IX.

**Wedekind.** Beiträge zur geometrische Interpretation binärer Formen. Math. An. Bd. IX.

**Gordan.** Ueber endliche Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen. Math. Ann. Bd. XII.

**Klein.** Ueber lineare Differentialgleichungen (2. Abt.). Math. Ann. Bd. XI, XII.

**Brioschi.** Sopra una classe d'equazioni differenziali lineari del 2 ordine. Annali di Mat., 2 s., t. IX, X.

**Brioschi.** La théorie des formes dans l'intégration des équations différentielles du 2 ordre. Math. An. Bd. XI.

**Brioschi.** Sulle equazioni differenziali del tetraedro, dell'ottaedro et dell'icosaedro. Annali di Mat., 2 s., t. XI.

**Cayley.** On the finite Groups of linear Transformations of variable. Math. An. Bd. 16.

**Cayley.** On the Schwarzian derivate and the polyhedral functions. Transactions of Cambridge. t. XIII.

**Jordan.** Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrales algébriques. Crelle's Journal. Bd. 84.

**Jordan.** Sur la détermination des groupes d'ordre fini continus dans le groupe linéaire. Atti della Reale Accademia delle scienze fis. et mat. Napoli, t. VIII.

**Pepin.** Sur les équations différentielles linéaires du 2 ordre. Annali di Mat., 2 s., t. IX.

**Pepin.** Methode pour obtenir les intégrales algébriques des équations différentielles linéaires du 2 ordre. Atti dell'Accademia Pontificia di Nuovi Lincei, t. XXXIV.

**Klein.** Ueber gewisse Differentialgleichungen dritter Ordnung. Math. An. XXIII.

**Klein.** Der Ikosaeder. Leipzig. 1885.

**Goursat.** Sur les intégrales rationnelles de l'équation de Kummer. Math. An. Bd. 24.

**Goursat.** Recherches sur l'équation de Kummer. Acta Societatis Fennicae, t. XV.

**Königsberger.** Bemerkung zur Form algebraischen Integrale linearer Differentialgleichungen. Math. An. Bd. 21.

**Halphen.** Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables. Mémoires, présentés pas divers savants à l'Académie, t. 28.

**Autonne.** Recherches sur les intégrales algébriques des équations différentielles à coefficients rationnels. Journal de l'Ecole Polytechnique. Cah. 51, 54.

**Васильевъ.** О функціяхъ раціональныхъ аналогичныхъ съ двойно-періодическими. Уч. Зап. Каз. Университета. 1880 г.

## Линейныя уравненія съ двойно-періодическими коэффиціентами.

**Picard.** Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. Crelle's Journal. Bd. 90.

**Floquet.** Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques (2 mém.). An. Sc. de l'Ec. N. Sup. 3 s., t. 2.

**Hermite.** Sur l'équation de Lamé. Annali di Mat. 2 s., t. 9.
Crelle's Jour. Bd. 89.

**Hermite.** Sur les équations différentielles linéaires du 2 ordre. Annali di Mat. 2 s., t. IX.

**Hermite.** Sur quelques applications des fonctions élliptiques. Paris. 1885 г.

**Brioschi.** Di una proprieta dell'equazioni differenziali lineari del 2 ordine. An. di Mat. 2 s., t. X.

**Brioschi.** Sulla generazione di una classe di equazioni differenziali lineari integrabili per funzioni ellittiche. An. di Mat. X.

**Casorati.** Generalizzazione di alcuni teoremi sulle equazioni differenziali lineari del 2 ordine. An. di Mat. t. X.

**Mittag-Leffler.** Ueber die Integration der Hermiteschen Differentialgleichung. An. di Mat. 2 s., t. X.

**Brioschi.** Sulla classe di equazioni differenziali lineari considerate dal S. Mittag Leffler. An. di Mat., t. XI.

**Sparre.** Sur l'équation $\frac{d^2 y}{dx^2} + \ldots$ Acta Mathematica, t. 2.

**Elliot.** Sur une équation linéaire du 2 ordre à coefficients doublement périodiques. Acta Mat., t. 2.

**Craig.** On a certain class of linear differential equations. American Journal of Mathematics., t. VII.

## Линейныя уравненія, между интегралами коихъ существуютъ нѣкоторыя зависимости.

**Fuchs.** Ueber lineare homogene Differentialgleichungen, zwischen deren Integralen homogene Relationen höheren als ersten Grades bestehen. Acta Mathematica, t. 1.

**Halphen.** Sur un problème concernant les équations différentielles linéaires. Journal de Liouville, 4 s., t. 1.

**Königsberger.** Beziehungen zwischen den Fundamentalintegralen einer linearen homogenen Differentialgleichung 2-er Ordnung. Mathem. An. Bd. 22, 31.

**Königsberger.** Ueber die für eine homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung zwischen den Fundamentalintegralen und deren Ableitungen stattfindenden algebraischen Beziehungen. Crelle's Journal. Bd. 103.

**Königsberger.** Eigenschaften der algebraisch-logarithmischen Integrale linearer nicht homogener Differentialgleichungen. Crelle's Jour. 94.

**Königsberger.** Ueber algebraische Beziehungen zwischen Integralen linearer Differentialgleichungen. Crelle's Journ. Bd. 94.

**Schlesinger.** Ein Beitrag zur Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen dritter Ordnung mit einer Relation dritten Grades zwischen den Elementen eines Fundamentalsystems von Integralen. Berlin. 1888.

**Schultz.** Untersuchung linearer homogener Differentialgleichungen deren Integrale nur einer homogenen Relation höheren als ersten Grades genügen. Halle. 1887.

**Brioschi.** Sulla teoria delle equazioni differenziali lineari. Annali di Mat., s. II, t. 13.

## Системы линейныхъ уравненій.

**Sauvage.** Sur les solutions régulières d'un sỷstème l'équations différentielles linéaires. An. Sc. de l'Ec. N. Sup., 3 s., t. 2, 5, 6.

**Hazzidakis.** Ueber eine Eigenschaft der Systeme von linearen homogenen Differentialgleichungen. Crelle's Journal. Bd. 90.

**Peano.** Intégration par séries des équations differentielles linéaires. Math. An. Bd. 32.

## Частные примѣры линейныхъ уравненій.

**Fuchs.** Sur quelques propriétés des intégrales des équations différentielles auxquelles satisfont les modules de périodicité des intégrales elliptiques des deux premières espèces. Crelle's Journal. Bd. 83.

**Fuchs.** Ueber eine Klasse linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Crelle's Journal. Bd. 100.

**Tannery.** Sur une équation différentielle linéaire de 2 ordre. An. Sc. de l'Ec. N. Sup. 2 s., t. 8.

**Goursat.** Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéométrique. An. Sc. de l'Ec. N. Sup. 2 s., t. 10 (Sup.).

**Goursat.** Mémoire sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur. An. Sc. de l'Ec. N. Sup., 3 s., t. 1.

**Goursat.** Sur les fonctions d'une variable analogues aux fonctions hypergéométriques. An. Sc. dt l'Ec. N. Sup., 3 s., t. 4.

**Hurwitz.** Ueber einige besondere homogene lineare Differentialgleichungen. Math. An. Bd. 26.

**Pochhammer.** Ueber die Differentialgleichungen der allgemeineren hypergeometrischen Reihe mit zwei endlichen singulären Puncten. Crelle's Journal. Bd. 102.

**Pochhammer.** Ueber drei lineare Differentialgleichungen 4-ter Ordnung. Crelle's Journal. Bd. 104.

**Schafheitlin.** Ueber die Integraldarstellung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe. Crelle's Journal. Bd. 103.

**Michaelson.** Der logarithmische Grenzfall der hypergeometrischen Differentialgleichung $n$-Ordnung. Kiel. 1889.

**Mathieu.** Sur l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ de Gauss. Journal de Liouville, 3 s., t. 8.

**Markoff.** Sur l'équation différentielle de la série hypergéométrique. Math. An. Bd. 28, 29.

**Gräfe.** Integrale von einigen linearen Differentialgleichungen. Crelle's Journal. Bd. 91.

**Hamburger.** Ueber eine specielle Klasse linearer Differentialgleichungen. Crelle's Journal. Bd. 103.

**Günther.** Ueber linearen Differentialgleichungen, deren Integrale nur einen singulären Punct im Endlichen besitzen und im Unendlichen sich regulär verhalten. Crelle's Journal. 105.

**Halphen.** Sur une équation différentielle linéaire du 3 ordre. Math. An. Bd. 24.

**Steen.** Note sur certaines équations différentielles linéaires. Acta Math., t. 3.

**Craig.** On linear Differential equations whose fundamental integrals are the successive derivatives of the same functions. Am. Journal of Math., t. VIII.

**Craig.** On a linear differential equation of the second order. Am. Journ. of Math., t. VIII.

## Нѣкоторые отдѣльные вопросы по теоріи линейныхъ уравненій.

**Fuchs.** Sur le développement en séries des intégrales des équations différentielles linéaires. Annali di Matem. 2 s., t. 4.

**Poincaré.** Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finis. American Journal of Mathematics., t. 7.

**Poincaré.** Sur les intégrales irrégulières des équations différentielles linéaires. Acta Mathematica, t. 8.

**Appel.** Mémoire sur les équations différentielles linéaires. An. Sc. de l'Ec. N. Sup. 2 s., t. 10.

**Appel.** Sur une classe d'équations différentielles linéaires binômes à coefficients algebriques. An. Sc. de l'Ec. N. Sup. 3 s., t. 1.

**Pincherle.** Sur la nature arithmétique des coefficients des séries intégrales des équations différentielles linéaires. Crelle's Journal. Bd. 103.

**Halphen.** Sur les invariants des équations différentielles linéaires. Journal de Liouville. 3 s., t. 8.

**Klein.** Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe. Math. Ann. Bd. 37.

---

Въ настоящій списокъ сочиненій по теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій совершенно не вошли статьи, относящіяся:

1) къ интегрированію уравненій въ конечномъ видѣ или съ помощью квадратуръ;

2) къ представленію интеграловъ уравненій черезъ опредѣленные интегралы;

3) весьма многочисленныя замѣчанія, помѣщенныя главнымъ образомъ въ Comtes Rendus de l'Académie des sciences de Paris, и отчасти въ изданіяхъ другихъ ученыхъ обществъ;

4) къ изслѣдованію новыхъ классовъ трансцендентныхъ функцій, черезъ которыя могутъ быть выражены интегралы линейныхъ уравненій;

5) къ обращенію интеграловъ линейныхъ уравненій.

# ЗАМѢЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ И ПРОПУСКИ.

---

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| стр. | 5. | стр. 11 | $\mathrm{mod}\left(\frac{dp^m k}{dx^m}\right)_{x=\xi} < \mathrm{mod}\left(\frac{\varphi^m k}{dx^m}\right)_{x=\xi}$; | $\mathrm{mod}\left(\frac{d^m p_k}{dx^m}\right)_{x=\xi} < \mathrm{mod}\left(\frac{d^m \varphi_k}{dx^m}\right)_{x=\xi}$ |
| » | 49 | » 7 | $y$ | $u$ |
| » | 50 | » 6 сн. | $x-a$ | $x=a$. |
| » | 72 | » 15 » | $F(\alpha, \beta, \gamma, 1, x)$ | $F(\alpha, \beta, 1, x)$ |
| » | 74 | » 7 сн. Въ знаменателѣ | $\beta-k$ | $\beta+k$ |
| » | 95 | » 1 св. | $\frac{N}{\mu m}$ | $\frac{N}{\mu m'}$ |
| » | 99 | » 11 » | $C'^2$ | $C'^3$ |
| » | 109 | После 2-ой стр. п. 11 слѣдуетъ вставить: Подъ $G$ и $g$ будемъ разумѣть группы конечнаго порядка, въ однородномъ и неоднородномъ видахъ, одного изъ 5 указанныхъ выше типовъ. | | |
| » | 126 | » 3 св. | $y_2 = \Pi_k (x-a_k)^{-\frac{\alpha_k}{2}} y_2$ | $y_2 = \Pi_k (x-a_k)^{-\frac{\alpha_k}{2}} u_2$ |
| » | 128 | выноска **) | 2, $n$, 2, $2n$ | 2, $m$, 2, $2m$. |

---

# ОГЛАВЛЕНІЕ.

## I Глава. Общая теорія линейныхъ дифференціальныхъ уравненій.

## Глава IV. Приложенія теоріи линейныхъ уравненій съ правильными интегралами къ вопросу о преобразованіи плоскихъ фигуръ съ сохраненіемъ подобія въ безконечно малыхъ частяхъ.

# ГЛАВА I.

1. Въ настоящемъ разсужденіи мы будемъ заниматься обыкновенными, линейными и однородными, дифференціальными уравненіями съ перемѣнными коэффиціентами. Мы будемъ представлять ихъ обыкновенно въ видѣ

$$\text{(I)} \qquad y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_k y^{(n-k)} + \ldots + p_n y = 0,$$

гдѣ $y^{(k)}$ обозначаетъ $k$-тую производную отъ функціи $y$ по независимой перемѣнной $x$, а $p_1, p_2, \ldots p_n$—нѣкоторыя функціи отъ одного перемѣннаго $x$.

Коэффиціенты уравненія $p_1, p_2, \ldots p_n$ мы будемъ постоянно считать функціями непрерывными и однозначными на всей плоскости независимаго перемѣннаго $x$, обращающимися въ безконечность или неопредѣленность только для нѣкоторыхъ точекъ этой плоскости. Число точекъ можетъ быть и безконечно-большимъ, но разстоянія между ними не могутъ быть безконечно-малыми.

Впослѣдствіи мы убѣдимся, что къ разсмотрѣнію уравненій указаннаго вида можетъ быть приведено и изслѣдованіе уравненій неоднородныхъ (съ послѣднимъ членомъ), если всѣ коэффиціенты послѣднихъ удовлетворяютъ тѣмъ же условіямъ.

Мы вообще не будемъ отличать значенія комплекснаго перемѣннаго отъ точки, изображающей это значеніе на плоскости. Подъ выраженіемъ въ области точки $a$ мы будемъ разумѣть часть плоскости, заключающую эту точку, для которой имѣютъ мѣсто нѣкоторыя разложенія въ ряды; во всѣхъ случаяхъ, когда точность изложенія того потребуетъ, мы будемъ указывать опредѣленнѣе, какую именно часть плоскости мы разумѣемъ подъ этимъ общимъ названіемъ.

2. *Въ области всякой обыкновенной для всѣхъ коэффиціентовъ уравненія* (I) *точки* $\xi$ *существуетъ непрерывная и конечная функція, которая удовлетворяетъ уравненію и которая, вмѣстѣ съ своими первыми* $n-1$ *производными, имѣетъ для* $x=\xi$ *произвольно выбранныя конечныя значенія.*

Возьмемъ $n$ какихъ нибудь величинъ

$$(1)\qquad y_0,\ y_0',\ y_0'',\dots\ y_0^{(n-1)}.$$

Подставимъ эти величины въ уравненіе (I) вмѣсто $y, y', \dots y^{(n-1)}$ и положимъ затѣмъ $x=\xi$; $y^{(n)}$ получитъ нѣкоторое, совершенно опредѣленное, конечное значеніе, которое мы обозначимъ $y_0^{(n)}$. Продифференцируемъ уравненіе (I) по $x$ одинъ разъ, подставимъ вмѣсто $y, y', \dots y^{(n)}$ величины $y_0, y_0', \dots y_0^{(n)}$ и положимъ во всѣхъ функціяхъ $p$ и ихъ производныхъ $x=\xi$; $y^{(n+1)}$ получитъ нѣкоторое конечное опредѣленное значеніе, которое мы обозначимъ $y_0^{(n+1)}$; продолжая поступать такимъ же образомъ и дальше, мы получимъ систему величинъ

$$(2)\qquad y_0,\ y_0',\dots\ y_0^{(n-1)},\ y_0^{(n)},\dots\ y_0^{(n-k)}\dots\dots$$

Съ помощью этихъ величинъ составимъ безконечный рядъ

$$(3)\qquad y_0+y_0'(x-\xi)+y_0''\frac{(x-\xi)^2}{1.2}+\dots+y_0^{(n)}\frac{(x-\xi)^n}{1.2\dots n}+\dots$$

Если рядъ этотъ, для всѣхъ значеній $x$, достаточно близкихъ къ $\xi$, будетъ сходящимся, то опредѣляемая имъ въ такомъ случаѣ нѣкоторая функція $y$ удовлетворитъ всѣмъ условіямъ теоремы, которая и будетъ такимъ образомъ доказана.

Чтобы доказать сходимость, въ извѣстныхъ предѣлахъ, ряда (3), мы установимъ, что нѣкоторый другой рядъ, расположенный также по восходящимъ степенямъ $x-\xi$, коэффиціенты котораго всѣ положительны и больше или равны модулямъ коэффиціентовъ ряда (3) при соотвѣтственныхъ степеняхъ $x-\xi$, будетъ, для значеній $x$, достаточно близкихъ къ $\xi$, сходящимся.

Пусть $R$ есть разстояніе точки $\xi$ до ближайшей особенной для какого нибудь изъ коэффиціентовъ уравненія (I) точки; радіусомъ $r$, ограниченнымъ лишь однимъ условіемъ

$$r < R,$$

опишемъ изъ точки $\xi$, какъ центра, окружность. Пусть

$$M_k \qquad\qquad k = 2, 3, \dots n$$

есть наибольшее значеніе модуля $p_k$ для всѣхъ точекъ внутри и на упомянутой окружности,

$$M_1 \geqq \max. (\mathrm{mod}\ p_1) \text{ и, вмѣстѣ съ тѣмъ, } RM_1 > n,$$

гдѣ $n$ — порядокъ уравненія (I).

Обозначимъ черезъ $\varphi_k$ функціи

(4) $$\varphi_k = \frac{M_k}{1 - \frac{x-\xi}{R}}, \qquad k = 1, 2, \dots n.$$

По извѣстной теоремѣ Бріо и Буке *)

(5) $$\mathrm{mod}\left(\frac{d^m \varphi_k}{dx^m}\right)_{x=\xi} > \mathrm{mod}\left(\frac{d^m p_k}{dx^m}\right)_{x=\xi},$$

каково бы ни было положительное число $m$.

Составимъ уравненіе

(6) $$u^{(n)} - \varphi_1 u^{(n-1)} - \varphi_2 u^{(n-2)} \dots - \varphi_n u = 0.$$

Обозначимъ, наконецъ, черезъ

(7) $$u_0, u_0', u_0'', \dots\dots u_0^{(n-1)}$$

модули величинъ $y_0, y_0', y_0'', \dots y_0^{(n-1)}$.

*) Théorie des fonctions elliptiques, p. 325—327.

По тому же пріему, который мы употребили для составленія, съ помощью уравненія (I) и системы чиселъ $y_0, y_0', \ldots y^{(n-1)}$, величинъ $y_0^{(n)}, y_0^{(n+1)}, \ldots y_0^{(n+k)} \ldots$, составимъ, съ помощью уравненія (6) и ряда чиселъ (7), безконечную систему величинъ

$$(8) \qquad u_0^{(n)}, u_0^{(n+1)}, \ldots u_0^{(n+k)} \ldots\ldots$$

и безконечный рядъ

$$(9) \qquad u_0 + u_0'(x-\xi) + u_0'' \frac{(x-\xi)^2}{1.2} + \ldots + u_0^{(n)} \frac{(x-\xi)^n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

Составленнный такимъ образомъ рядъ (9) будетъ сходящимся для всѣхъ точекъ внутри и на окружности радіуса $r$. Въ самомъ дѣлѣ:

Положимъ

$$\frac{x-\xi}{R} = z, \ \frac{u_0^{(k)}}{1.2\ldots k} R^k = a_k \qquad k = 0, 1, 2 \ldots$$

Уравненіе (6) и рядъ (9) обратятся

$$(10) \qquad (1-z)\, u^{(n)} = M_1 R u^{(n-1)} + \ldots + M_n R^n u$$

$$(11) \qquad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m + \ldots$$

Между коэффиціентами $a_m$, по способу ихъ составленія, должна существовать та же зависимость, которую мы получили бы, подставивъ рядъ (11) въ уравненіе (10), и приравнявъ коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ $z$ въ правой и лѣвой частяхъ равенства (10).

Зависимость эта имѣетъ видъ

$$(12) \quad (n+k)(n+k-1)\ldots(k+1) a_{n+k} = (n+k-1)\ldots(k+1)(k+M_1 R) a_{n+k-1} + \\ + (n+k-2)(n-k-3)\ldots(k+1) M_2 R^2 a_{n+k-2} + \ldots + M_n R^n a_k.$$

Изъ этого соотношенія слѣдуетъ:

1, такъ какъ, по положенію, всѣ числа $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ положительны, то и всѣ $a_{n+k}$ положительны ($k = 0, 1, 2 \ldots$)

2, $\qquad \dfrac{a_{n+k}}{a_{n+k-1}} = \dfrac{k+M_1 R}{k+n} + \eta$, гдѣ $\eta > 0$; поэтому

$$a_{n+k} > a_{n+k-1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

3, отношеніе

$$\frac{a_{n+k}}{a_{n+k-1}} = \frac{k+M_1 R}{k+n} + \frac{M_1 R^2}{(n+k)(n+k-1)} \cdot \frac{a_{n+k-2}}{a_{n+k-1}} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{M_n R^n}{(n+k)\ldots(k+1)} \cdot \frac{a_k}{a_{n+k-1}}$$

при безграничномъ возрастаніи $k$ стремится къ предѣлу, равному единицѣ.

Модуль $z = \frac{x-\xi}{R}$ внутри и на окружности радіуса $r$ будетъ всегда меньше единицы, а потому рядъ (11), а слѣдовательно и рядъ (9), будетъ сходящимся для всѣхъ значеній $x$, находящихся внутри и на указанной окружности радіуса $r$.

Модули чиселъ $y_0^{(n)}, y_0^{(n+1)}, \ldots y_0^{(n+k)}, \ldots$ по закону составленія ихъ и вслѣдствіе указанныхъ неравенствъ (5)

$$\mathrm{mod}\left(\frac{dp^m k}{dx^m}\right)_{x=\xi} < \mathrm{mod}\left(\frac{\varphi^m k.}{dx^m}\right)_{x=\xi}$$

соотвѣтственно меньше чиселъ $u_0^{(n)}, u_0^{(n+1)}, \ldots u_0^{(n+k)}, \ldots$

Вслѣдствіе этого рядъ (3), модули коэффиціентовъ котораго, начиная съ нѣкотораго предѣла, меньше коэффиціентовъ ряда (9), будетъ сходящимся внутри и на окружности того же радіуса $r$. Теорема, такимъ образомъ, доказана вполнѣ.

3. Изъ предъидущей теоремы и общихъ основаній теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго можно сдѣлать слѣдующіе выводы:

*a*) если независимая перемѣнная, исходя изъ какой нибудь точки $x_0$, находящейся внутри или на окружности радіуса $r$, опишетъ нѣкоторую непрерывную кривую $x_0\, x_1$, не проходящую ни черезъ одну особенную точку коэффиціентовъ уравненія, то функція $y$, опредѣленная въ области точки $\xi$ рядомъ (3), будетъ измѣняться тоже непрерывно, и можетъ быть въ области точки $x_1$ представлена рядомъ, расположеннымъ по цѣлымъ и положительнымъ степенямъ $x - x_1$;

*b*) если перемѣнная независимая, описавъ какой либо сомкнутый и не пересѣкающій себя контуръ, не заключающій внутри ни одной особенной точки коэффиціентовъ уравненія, возвратится къ первоначальному своему значенію, то и функція $y$ получитъ свое прежнее значеніе;

*c*) если же внутри этого контура заключается одна или нѣсколько особенныхъ точекъ коэффиціентовъ уравненія, то функція $y$, вообще говоря, по возвращеніи перемѣнной къ начальному значенію, получитъ значеніе, отличное отъ первоначальнаго;

*d*) при доказательствахъ теоремы п. 2 мы считали точку $\xi$ конечною; поэтому безконечно-удаленную точку мы должны считать вообще за особенную точку для функціи $y$;

*e*) если мы вокругъ каждой конечной особенной точки коэффиціентовъ уравненія опишемъ окружность безконечно-малаго радіуса и затѣмъ соединимъ первую окружность со второю, вторую съ третьей и т. д., послѣднюю съ окружностью безконечно-большаго радіуса, описанною изъ точки 0, линіями, непересѣкающими самихъ себя и ни одной изъ предшествующихъ, то внутри полученнаго такимъ образомъ контура $T$ функція $y$ остается однозначною.

Функцію $y$, опредѣляемую теоремой п. 2 и обладающую всѣми вышеуказанными свойствами, мы будемъ называть общимъ интеграломъ уравненія (I).

4. Выбирая для произвольныхъ постоянныхъ, входящихъ въ выраженіе общаго интеграла, различныя системы значеній, мы получимъ частные интегралы уравненія (I).

Остановимся на разсмотрѣніи свойствъ нѣкоторыхъ системъ такихъ интеграловъ. Замѣтимъ прежде всего, что: *a*) если $y_1, y_2, \ldots y_k$ — частные интегралы уравненія (I), то функція

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_k y_k,$$

гдѣ $C_1, C_2, \ldots C_k$ — нѣкоторыя постоянныя величины, будетъ также интеграломъ уравненія (I), и *b*) *условіе необходимое и достаточное для того, чтобы между* $m$ *функціями* $y_1, y_2, \ldots y_m$ *существовала линейная зависимость*

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_m y_m = 0$$

*гдѣ всѣ величины* $C$ — *постоянныя, состоитъ въ томъ, чтобы опредѣлитель*

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1^{(m-1)}, & y_1^{(m-2)}, & \ldots & y_1 \\ y_2^{(m-1)}, & y_2^{(m-2)}, & \ldots & y_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_m^{(m-1)}, & y_m^{(m-2)}, & \ldots & y_m \end{vmatrix} = \Sigma \pm y_1^{(m-1)} y_2^{(m-2)} \ldots y_m$$

*былъ тождественно нуль.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть между величинами $y_1, \dots y_m$ существуетъ указанная линейная зависимость

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_m y_m = 0.$$

Дифференцируя это выраженіе $m-1$ разъ по $x$, мы послѣдовательно найдемъ

$$C_1 y_1' + C_2 y_2' + \dots\dots\dots\dots + C_m y'_m = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$C_1 y_1^{(m-1)} + C_2 y_2^{(m-1)} + \dots + C_m y_m^{(m-1)} = 0.$$

Величины $C_1, C_2, \dots C_m$ имѣютъ, по условію, опредѣленныя конечныя значенія; поэтому необходимо, чтобы опредѣлитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1^{(m-1)}, & y_1^{(m-1)}, & \dots & y_1 \\ y_2^{(m-1)}, & \dots & \dots & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_m^{(m-1)}, & \dots & \dots & y_m \end{vmatrix}$$ былъ тождественно нуль.

Обратно, пусть опредѣлитель $\Delta$ равенъ тождественно нулю. Составимъ первые миноры $C_1, C_2, \dots C_m$ относительно членовъ праваго столбца; получимъ

$$\begin{aligned} & C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots\dots\dots\dots + C_m y_m = 0 \\ & C_1 y_1' + C_2 y_2' + \dots\dots\dots\dots + C_m y'_m = 0 \\ (1) \quad & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & C_1 y_1^{(m-1)} + C_2 y_2^{(m-1)} + \dots + C_m y_m^{(m-1)} = 0. \end{aligned}$$

Дифференцируя по $x$ послѣдовательно первые $m-1$ изъ написанныхъ выше равенствъ, получимъ слѣдующій новый рядъ равенствъ

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + C'_m y_m = 0$$

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots\ldots\ldots\ldots + C'_m y'_m = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_m' y_1^{(m-1)} + C_2' y_2^{(m-1)} + \ldots + C_m' y_m^{(m-1)} = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ

$$\frac{C_1'}{C_1} = \frac{C_2'}{C_2} = \frac{C_3'}{C_3} = \ldots = \frac{C'_m}{C_m}$$

$$C_j' C_k - C_k' C_j = 0 = \left(\frac{C_j}{C_k}\right)'; \quad \frac{C_j}{C_k} = \text{const.} \qquad j, k = 1, 2, \ldots m.$$

Раздѣляя первое равенство системы (1) на одну изъ величинъ $C$, мы и убѣдимся, что между $y_1, y_2, \ldots y_m$ существуетъ дѣйствительно указанная зависимость.

5. *Между каждыми* $n+1$ *частными интегралами* $y_1, y_2, \ldots y_{n+1}$ *уравненія* (I) *порядка* $n$ *существуетъ линейное соотношеніе*

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_{n+1} y_{n+1} = 0,$$

*гдѣ числа* $C_1, C_2, \ldots C_{n+1}$ — *постоянныя.*

Для доказательства составимъ опредѣлитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1^{(n)}, & y_1^{(n-1)}, & \ldots & y_1 \\ y_2^{(n)}, & y_2^{(n-1)}, & \ldots & y_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n+1}^{(n)}, & y_{n+1}^{(n-1)}, & \ldots & y_{n+1} \end{vmatrix}.$$

По условію, $y_1, y_2, \dots y_{n+1}$ — интегралы уравненія (I); поэтому

$$y_k^{(n)} = -(p_1 y_k^{(n-1)} + \dots + p_n y_k), \qquad k = 1, 2, \dots n+1.$$

Отсюда, на основаніи извѣстной теоремы теоріи опредѣлителей, слѣдуетъ, что опредѣлитель $\Delta = 0$ тождественно.

На основаніи же сдѣланнаго выше замѣчанія (п. 4) это тождество показываетъ, что между величинами $y_1, y_2, \dots y_{n+1}$ существуетъ указанная линейная зависимость.

6. Мы будемъ называть *системою независимыхъ интеграловъ уравненія* (I) *всякія n интеграловъ его, между которыми не существуетъ линейной зависимости съ постоянными коэффиціентами.*

*Докажемъ, что такія системы существуютъ.*

Возьмемъ какой нибудь частный интегралъ $y_1$ уравненія (I). Подставимъ въ это уравненіе вмѣсто $y$

$$y = y_1 \int z dx. \tag{A}$$

Уравненіе (I) преобразуется, какъ извѣстно, въ линейное же уравненіе, порядка $n-1$, вида

$$\text{(II)} \left\{ \begin{aligned} & z^{(n-1)} + q_1 z^{(n-2)} + \dots + q_k z^{(n-k-1)} + \dots + q_{n-1} z = 0, \text{ гдѣ} \\ & q_1 = \frac{1}{y_1}(n y_1' + p_1 y_1) \\ & q_2 = \frac{1}{y_1}\left(\frac{(n.n-1)}{1.2} y_1'' + \frac{n-1}{1} p_1 y_1' + p_2 y_1\right) \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & q_k = \frac{1}{y_1}\left(\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1.2\dots k} y_1^{(k)} + p_1 \frac{(n-1)\dots(n-k+1)}{1.2\dots(k-1)} y_1^{(k-1)} + \dots \right. \\ & \qquad \left. \dots + p_j \frac{(n-j)\dots(n-k+1)}{1.2\dots(k-j)} y_1^{(k-j)} + \dots + p_k y_1\right). \end{aligned} \right.$$

Возьмемъ какой нибудь частный интегралъ $z_1$ уравненія (II) и подставимъ въ это уравненіе

$$z = z_1 \int u dx. \tag{B}$$

Получимъ относительно $u$ линейное уравненіе, порядка $n-2$, вида

(II′) $$u^{(n-2)}+r_1\,u^{(n-3)}+\ldots+r_{n-2}\,u=0.$$

Въ это уравненіе подставимъ $u=u_1\int v dx$, гдѣ $u_1$ — какой нибудь частный его интегралъ; въ полученное уравненіе относительно $v$ подставимъ $v=v_1\int t dx$, и т. д., пока не дойдемъ до линейнаго уравненія перваго порядка, одинъ изъ интеграловъ котораго обозначимъ черезъ $w_1$.

$n$ величинъ

(III) $$y_1, y_2=y_1\int z_1 dx, y_3=y_1\int z_1 dx\int u_1 dx, \ldots y_n=y_1\int z_1 dx\ldots\int w_1 dx$$

будутъ интегралами уравненія (I).

Между этими $n$ величинами линейной зависимости существовать не можетъ; въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что

$$C_1 y_1+C_2 y_1\int z_1 dx+\ldots+C_n y_1\int z_1 dx\int u_1 dx\ \ldots\int w_1 dx=0.$$

Сократив это уравненіе на $y_1$, продифференцируемъ по $x$; получимъ

$$C_2 z_1+C_3 z_1\int u_1 dx+\ \ldots\ +C_n z_1\int u_1 dx\ \ldots\int w_1 dx=0.$$

Сокращая опять на $z_1$ и дифференцируя, получимъ

$$C_3 u_1+\ \ldots\ +C_n u_1\int v_1 dx\ \ldots\int w_1 dx=0.$$

Продолжая ту же операцію, мы придемъ къ соотношенію

$$C_n\int w_1 dx=0,$$

откуда $C_n=0$.

Изъ предшествующаго равенства убѣдимся, что $C_{n-1}=0$ и т. д.; окажется, что всѣ $C$ — нули.

Убѣдившись въ существованіи одной независимой системы интеграловъ уравненія (I), мы можемъ показать, что ихъ будетъ множество.

Возьмемъ произвольную систему постоянныхъ

$$\begin{array}{l} A_{1,1},\ A_{1,2},\ \ldots\ A_{1,n} \\ A_{2,1},\ A_{2,2},\ \ldots\ A_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n,1},\ A_{n,2},\ \ldots\ A_{n,n}. \end{array}$$

Пусть опредѣлитель $A$, составленный изъ этихъ величинъ, $A = \Sigma \pm A_{1,1}\ A_{2,2} \ldots A_{n,n}$ — не нуль.

Составимъ, съ помощью интеграловъ (III), $n$ величинъ

$$Y_k = A_{k,1}\ y_1 + A_{k,2}\ y_2 + \ldots + A_{k,n}\ y_n, \qquad k=1, 2, \ldots n.$$

Величины $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$ составятъ независимую систему интеграловъ уравненія (I). Чтобы убѣдиться въ справедливости этого положенія, достаточно лишь замѣтить, что $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$ суть интегралы уравненія (п. 4) и что опредѣлитель

$$D = \begin{vmatrix} Y_1^{(n-1)}, & Y_1^{(n-2)}, & \ldots & Y_1 \\ Y_2^{(n-1)}, & Y_2^{(n-2)}, & \ldots & Y_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Y_n^{(n-1)}, & Y_n^{(n-2)}, & \ldots & Y_n \end{vmatrix}$$

равенъ произведенію опредѣлителя $A$ на опредѣлитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1^{(n-1)}, & y_1^{(n-2)}, & \ldots & y_1 \\ y_2^{(n-1)}, & y_2^{(n-2)}, & \ldots & y_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n^{(n-1)}, & y_n^{(n-2)}, & \ldots & y_n \end{vmatrix},$$

который по доказанному не равенъ нулю.

Сопоставляя доказанную теорему съ положеніемъ п. 5, мы заключаемъ, что всякій интегралъ уравненія (I) можетъ быть представленъ въ видѣ линейной функціи отъ $n$ какихъ нибудь независимыхъ интеграловъ того же уравненія.

7. Обратимся теперь къ разсмотрѣнію интеграловъ въ областяхъ ихъ особенныхъ точекъ; какъ мы уже замѣтили, особенными точками для интеграловъ уравненія (I) могутъ быть только особенныя точки коэффиціентовъ уравненія и безконечно-удаленная точка. При изслѣдованіи интеграловъ въ области послѣдней точки, мы будемъ, по общепринятому порядку, преобразовывать уравненіе (I) подстановкой

$$x = \frac{1}{t} \quad \text{и}$$

$$(-1)^k y_x^{(k)} = t^{2k} y_t^{(k)} + \frac{k}{1}(k-1)\, t^{2k-1} y_t^{(k-1)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-l+1)}{1.2\ldots l}(k-1)(k-2)\ldots(k-l)\, t^{2k-l} y_t^{(k-l)} + \ldots + 2.3\ldots n.t^{n+1} y_t'.$$

въ уравненіе

$$\text{(IV)} \qquad y_t^{(n)} + r_1 y_t^{(n-1)} + \ldots + r_k y_t^{(n-k)} + \ldots + r_n y = 0,$$

гдѣ

$$r_1 = (-1)^{n-1} \frac{1}{t^2}\left(p_1 - \frac{n}{1}(n-1)\, t\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r_k = (-1)^{n-k} \frac{1}{t^{2k}}\Big\{p_k - \frac{n-k+1}{1}(n-k)\, t p_{k-1} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{k-1} \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k}(n-2)\ldots(n-k)\, t^{k-1} p_1 +$$

$$+ (-1)^k \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k}(n-1)\ldots(n-k)\, t^k\Big\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и затѣмъ разсматривать это уравненіе въ области точки $t = 0$.

Для краткости мы будемъ называть точку $a$ обыкновенной или особенной точкой уравненія въ зависимости отъ того, будетъ ли она обыкновенной для всѣхъ коэффиціентовъ уравненія, или особенной хотя для одного изъ нихъ.

Нѣкоторыя особенныя точки уравненія могутъ быть обыкновенными для интеграловъ уравненія; такія точки мы назовемъ особенными по виду; впослѣдствіи (гл. II, п. 2) мы укажемъ условія достаточныя и необходимыя для того, чтобы данная особенная точка уравненія была особенною только по виду.

8. Пусть

$$(1) \qquad y_1, y_2, \ldots y_n$$

какая нибудь система независимыхъ интеграловъ уравненія (I).

Если независимая перемѣнная опишетъ нѣкоторую непрерывную сомкнутую кривую около одной или нѣсколькихъ особенныхъ точекъ уравненія, не проходящую ни черезъ одну изъ этихъ точекъ, то величины $y_1, y_2, \ldots y_n$, измѣняясь все время непрерывно, получатъ, по возвращеніи перемѣнной къ первоначальному значенію, вообще говоря, новыя значенія, которыя мы обозначимъ

$$(2) \qquad [y_1], [y_2], \ldots [y_n].$$

Величины $[y_k]$ составятъ по прежнему систему независимыхъ интеграловъ уравненія (I) и, на основаніи предъидущихъ замѣчаній о системахъ частныхъ интеграловъ, могутъ быть выражены линейнымъ образомъ черезъ $y_1, y_2, \ldots y_n$; такъ что можно положить

$$(3) \qquad \begin{aligned} [y_1] &= A_{1,1}\, y_1 + A_{1,2}\, y_2 + \ldots + A_{1,n}\, y_n \\ [y_2] &= A_{2,1}\, y_1 + A_{2,2}\, y_2 + \ldots + A_{2,n}\, y_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [y_n] &= A_{n,1}\, y_1 + A_{n,2}\, y_2 + \ldots + A_{n,n}\, y_n, \end{aligned}$$

причемъ опредѣлитель

$$A = \Sigma \pm A_{1,1}\, A_{2,2} \ldots A_{n,n} \quad \text{не нуль.}$$

Величины $A_{i,k}$ мы будемъ называть коэффиціентами обхода системы независимыхъ интеграловъ вокругъ данныхъ особенныхъ точекъ.

Значенія ихъ будутъ зависѣть, вообще говоря, какъ отъ выбора первоначальной системы независимыхъ интеграловъ, такъ и отъ значеній особенныхъ точекъ, заключающихся внутри описаннаго независимой перемѣнной контура.

Покажемъ общій характеръ зависимости коэффиціентовъ $A_{i,k}$ отъ указанныхъ элементовъ.

Примемъ во вниманіе площадь $P$, заключенную между двумя концентрическими окружностями, радіусы которыхъ соотвѣтственно нѣсколько больше и меньше разстояній двухъ особенныхъ точекъ отъ начала координатъ, и будемъ искать выраженія коэффиціентовъ обхода системы независимыхъ интеграловъ $y_1, y_2, \ldots y_n$ вокругъ особенныхъ точекъ, заключенныхъ внутри окружности меньшаго радіуса.

Пусть точка $\xi$—одна изъ точекъ внутри кольца $P$ и положимъ, что система независимыхъ интеграловъ $y_1, y_2, \ldots y_n$ выбрана такъ, что удовлетворены слѣдующія условія:

$$(4) \qquad \left(y_m^{(k)}\right)_{x=\xi} = 0, \quad \text{если} \quad k \leqq n-1 \quad \text{и} \quad k \gtrless n-m.$$

$$\left(y_m^{(n-m)}\right)_{x=\xi} = 1.$$

Общій видъ интеграла $y_m$ при такихъ условіяхъ будетъ

$$(5) \qquad y_m = \frac{(x-\xi)^{n-m}}{1.2\ldots(n-m)} + \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(x-\xi)^{n+\nu}\,\alpha_m^{(n+\nu)}}{1.2\ldots(n+\nu)},$$

$$\alpha_m^{(n+\nu)} = \left(y_m^{(n+\nu)}\right)_{x=\xi}, \qquad m = 1, 2, \ldots n.$$

Радіусъ круга сходимости этихъ рядовъ будетъ не меньше $\delta$— разстоянія точки $\xi$ до ближайшей границы кольца $P$.

Преобразуемъ уравненіе (I) подстановкой

$$(6) \qquad x = \xi e^z,$$

причемъ выберемъ изъ множества различныхъ значеній $z$, соотвѣтствующихъ одному значенію $x$, одно опредѣленное.

Уравненіе (I) получитъ видъ

$$(7) \qquad u^{(n)} + P_1 u^{(n-1)} + \ldots P_n u = 0,$$

гдѣ производныя взяты по $z$.

Выберемъ систему независимыхъ интеграловъ этого уравненія, подчинивъ её условіямъ, подобнымъ (5). Общій видъ интеграловъ такой системы будетъ

$$(8)\qquad u_m(z,\xi)=\frac{z^{n-m}}{1.2\ldots(n-m)}+\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{\beta_m^{(n+\nu)}z^{n+\nu}}{1.2\ldots(n+\nu)},$$

$$\beta_m^{(n+\nu)}=\left(u_m^{(n+\nu)}\right)_{z=0},\qquad m=1,2\ldots n.$$

Величины $u_m(z,\xi)$, выбранныя указаннымъ образомъ, будутъ линейными функціями величинъ $y_1, y_2, \ldots y_n$, въ которыхъ $x$ замѣнено $\xi e^z$, и наоборотъ; положимъ

$$(9)\qquad (y_m)_{x=\xi e^z}=C_{m,1}u_1+C_{m,2}u_2+\ldots C_{m,k}u_k+\ldots+C_{m,n}u_n,$$
$$m=1,2,\ldots n.$$

Сравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ $z$ въ правой и лѣвой частяхъ равенства (9), мы найдемъ всѣ величины $C$ и выразимъ величины $\beta$ черезъ $\alpha$.

Постоянныя $C_{i,k}$ получатся, если мы сравнимъ коэффиціенты при степеняхъ $z$, меньшихъ или равныхъ $n-1$. Они имѣютъ видъ

$$(10)\qquad C_{i,k}=\frac{1.2\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots(n-i+1)}\cdot\xi^{n-i}(n-i)_{i-k},$$

гдѣ подъ $(m)_l$ разумѣется коэффиціентъ при $u^l$ въ разложеніи

$$(e^u-1)^m=u^m\left((m)_0+(m)_1u+\ \ldots\ +(m)_lu^l+\ \ldots\right).$$

Выраженія $\beta$ черезъ $\alpha$ при помощи введеннаго обозначенія представятся также довольно просто.

Если $x$ опишетъ сомкнутую кривую, заключающую внутри особенныя точки, находящіяся въ кругѣ меньшаго радіуса, то перемѣнная $z$ получитъ приращеніе $\pm 2\pi i$; величины $u_m(z,\xi)$ обратятся въ величины $u_m(z\pm 2\pi i,\xi)$, которыя должны быть линейными функціями съ постоянными коэффиціентами отъ $u_m(z,\xi)$. Выраженія этихъ коэффиціентовъ мы теперь и будемъ искать.

Формулу $x=\xi e^z$ мы можемъ представить въ слѣдующемъ видѣ

$$x=\xi e^{i\theta}e^{z-i\theta}$$

гдѣ $\theta$ — нѣкоторая вещественная величина.

Пусть $\theta = \frac{2\pi}{l}$, гдѣ $l$ цѣлое число, на столько большое, что точка $\xi e^{\frac{2\pi i}{l}}$ не выходитъ изъ круга радіуса $\delta$, описаннаго около точки $\xi$.

Величины $u_m(z - i\theta, \xi e^{i\theta})$ будутъ, также какъ и $u_m(z, \xi)$, интегралами уравненія (7); поэтому

$$(11)\quad u_m(z,\xi) = B_{m,1}\, u_1\left(z - \frac{2\pi i}{l}, \xi e^{\frac{2\pi i}{l}}\right) + B_{m,2}\, u_2\left(z - \frac{2\pi i}{l}, \xi e^{\frac{2\pi i}{l}}\right) + \ldots$$
$$\ldots + B_{m,n}\, u_n\left(z - \frac{2\pi i}{l}, \xi e^{\frac{2\pi i}{l}}\right), \qquad m = 1, 2 \ldots n.$$

Дифференцируя выраженіе (11) по $z$, полагая затѣмъ $z = \frac{2\pi i}{l}$ и пользуясь формулой (8), мы найдемъ, что

$$B_{m,k} = \left(\frac{d^{n-k} u_m(z,\xi)}{dz^{n-k}}\right)_{z = \frac{2\pi i}{l}} = u_{m,k}\left(\frac{2\pi i}{l}, \xi\right), \; k = 1, 2 \ldots n.$$

и

$$(12)\quad u_m(z,\xi) = \sum_{k=1}^{k=n} u_{m,k}\left(\frac{2\pi i}{l}, \xi\right) u_k\left(z - \frac{2\pi i}{l}, \xi e^{\frac{2\pi i}{l}}\right), m = 1, 2 \ldots n.$$

Прилагая формулу (12) послѣдовательно къ $u_m\left(z - \frac{2\pi i}{l}, \xi e^{\frac{2\pi i}{l}}\right)$, $u_m\left(z - 2\frac{2\pi i}{l}, \xi e^{2\frac{2\pi i}{l}}\right), \ldots u_m\left(z - j\frac{2\pi i}{l}, \xi e^{j\frac{2\pi i}{l}}\right), \ldots u_m\left(z - (l-1)\frac{2\pi i}{l}, \xi e^{(l-1)\frac{2\pi i}{l}}\right)$ мы получимъ рядъ равенствъ

$$(13)\left\{\begin{array}{l}
u_m\left(z - \frac{2\pi i}{l}, \xi e^{\frac{2\pi i}{l}}\right) = \sum\limits_{k=1}^{k=n} u_{m,k}\left(\frac{2\pi i}{l}, \xi e^{\frac{2\pi i}{l}}\right) u_k\left(z - 2\frac{2\pi i}{l}, \xi e^{2\frac{2\pi i}{l}}\right), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_m\left(z - j\frac{2\pi i}{l}, \xi e^{j\frac{2\pi i}{l}}\right) = \sum\limits_{k=1}^{k=n} u_{m,k}\left(\frac{2\pi i}{l}, \xi e^{j\frac{2\pi i}{l}}\right) u_k\left(z - (j+1)\frac{2\pi i}{l}, \xi e^{(j+1)\frac{2\pi i}{l}}\right), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_m\left(z - (l-1)\frac{2\pi i}{l}, \xi e^{(l-1)\frac{2\pi i}{l}}\right) = \sum\limits_{k=1}^{k=n} u_{m,k}\left(\frac{2\pi i}{l}, \xi e^{(l-1)\frac{2\pi i}{l}}\right) u_k\left(z - 2\pi i, \xi e^{2\pi i}\right), \; m = 1, 2, \ldots n.
\end{array}\right.$$

Обозначимъ $z - 2\pi i$ черезъ $z'$; изъ предъидущихъ формулъ слѣдуетъ, что

$$u_m(z' + 2\pi i, \xi) = \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_{m,k}\, u_k(z', \xi), \qquad m = 1, 2, \ldots n,$$

гдѣ $\alpha_{m,k}$ суть элементы опредѣлителя

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1}, & \alpha_{1,2}, & \ldots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1}, & \alpha_{2,2}, & \ldots & \alpha_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n,1}, & \alpha_{n,2}, & \ldots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix},$$

равнаго произведенію $l$ опредѣлителей

$$A = S_0\, S_1 \ldots S_j \ldots S_{l-1},$$

$$S_j = \begin{vmatrix} u_{1,1}\left(\frac{2\pi i}{l}, \xi e^{j\frac{2\pi i}{l}}\right), & \ldots & u_{1,n}\left(\frac{2\pi i}{l}, \xi e^{j\frac{2\pi i}{l}}\right) \\ u_{2,1}\left(\frac{2\pi i}{l}, \xi e^{j\frac{2\pi i}{l}}\right), & \ldots & u_{2,n}\left(\frac{2\pi i}{l}, \xi e^{j\frac{2\pi i}{l}}\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n,1}\left(\frac{2\pi i}{l}, \xi e^{j\frac{2\pi i}{l}}\right), & \ldots & u_{n,n}\left(\frac{2\pi i}{l}, \xi e^{j\frac{2\pi i}{l}}\right) \end{vmatrix}.$$

Получивъ общія выраженія коэффиціентовъ обхода интеграловъ $u_1(z, \xi)$, $u_2(z, \xi)$, $\ldots u_n(z, \xi)$, мы опять измѣнимъ независимую перемѣнную обратной подстановкой $z = lg\, \frac{x}{\xi}$ и затѣмъ, пользуясь соотношеніями

$$y_m = \sum_{k=1}^{k=n} C_{m,k}\, u_k \qquad m = 1, 2, \ldots n$$

и

$$[y_m] = \sum_{k=1}^{k=n} C_{m,k} [u_k], \qquad m = 1, 2, \ldots n$$

найдемъ общія выраженія коэффиціентовъ обхода и для первоначальной системы независимыхъ интеграловъ $y_1, y_2, \ldots y_n$.

9. Теперь обратимся къ разсмотрѣнію нѣкоторыхъ особыхъ системъ независимыхъ интеграловъ, для которыхъ коэффиціенты обхода представляются проще. Мы будемъ полагать въ дальнѣйшемъ, что внутри сомкнутаго контура, описываемаго независимой перемѣнной, находится только одна особенная точка $a$ уравненія (I).

Пусть $y_1, y_2, \ldots y_n$ будетъ какая нибудь система независимыхъ интеграловъ уравненія (I), элементы которой, при обходѣ независимой перемѣнной около точки $a$, обращаются

$$(1) \qquad [y_m]=A_{m,1}y_1+A_{m,2}y_2+\ldots+A_{m,n}y_n, \quad m=1,2,\ldots n,$$

причемъ опредѣлитель $A=\Sigma\pm A_{1,1}A_{2,2}\ldots A_{n,n}$ не нуль

*Всегда возможно составить такой частный интегралъ* $Y$ *уравненія* (I), *который, при обходѣ независимой перемѣнной около особенной точки* $a$, *обратится въ* $\omega Y$, *гдѣ* $\omega$ — *величина постоянная.*

Какъ намъ уже извѣстно, искомый интегралъ $y$ можетъ быть представленъ въ видѣ

$$(2) \qquad Y=\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+\ldots+\alpha_n y_n,$$

гдѣ всѣ $\alpha$ — величины постоянныя.

По условію, съ одной стороны

$$(3) \qquad [Y]=\omega y=\omega(\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+\ldots+\alpha_n y_n),$$

а съ другой

$$(4) \qquad [Y]=\alpha_1[y_1]+\alpha_2[y_2]+\ldots\ldots+\alpha_n[y_n]=$$
$$=\alpha_1\sum_k A_{1,k}y_k+\alpha_2\sum_k A_{2,k}y_k+\ldots+\alpha_n\sum_k A_{n,k}y_k.$$

Отсюда вытекаетъ $n$ уравненій

$$(\alpha) \qquad \begin{array}{l} \alpha_1(A_{1,1}-\omega)+\alpha_2 A_{2,1}+\ldots+\alpha_n A_{n,1}=0 \\ \alpha_1 A_{1,2}+\alpha_2(A_{2,2}-\omega)+\ldots+\alpha_n A_{n,2}=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 A_{1,n}+\alpha_2 A_{2,n}+\ldots+\alpha_n(A_{n,n}-\omega)=0 \end{array}$$

для опредѣленія $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$.

Чтобы эти уравненія были совмѣстны, необходимо и достаточно, чтобы опредѣлитель

$$(\mathrm{V}) \qquad \Omega = \begin{vmatrix} A_{1,1}-\omega, & A_{2,1}, \ldots & A_{n,1} \\ A_{1,2}, & A_{2,2}-\omega, \ldots & A_{n,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1,n}, & A_{2,n}, \ldots\ldots & A_{n,n}-\omega \end{vmatrix} = 0.$$

Такимъ образомъ, если подъ $\omega$ разумѣть корень уравненія (V), то дѣйствительно возможно составить интегралъ $y$, который удовлетворитъ условіямъ теоремы.

Уравненіе (V) мы назовемъ основнымъ уравненіемъ уравненія (I) относительно точки $a$; корни его имѣютъ большое значеніе при изслѣдованіи общаго вида интеграловъ уравненія (I) въ области точки $a$.

10. *Корни основнаго уравненія*

$$(\mathrm{V}) \qquad \Omega = 0$$

*не зависятъ отъ выбора первоначальной системы независимыхъ интеграловъ уравненія* (I).

Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$(1) \qquad y_1, y_2, \ldots y_n, \qquad (2) \qquad u_1, u_2, \ldots u_n$$

двѣ системы независимыхъ интеграловъ; пусть $u_m$ послѣ обхода независимой перемѣнной около особенной точки обращается въ

$$(3) \qquad [u_m] = B_{m,1}u_1 + B_{m,2}u_2 + \ldots + B_{m,n}u_n, \qquad m=1, 2, \ldots n.$$

Кромѣ того, пусть первая система независимыхъ интеграловъ связана съ второю отношеніями

$$(4) \qquad y_m = C_{m,1}u_1 + C_{m,2}u_2 + \ldots + C_{m,n}u_n, \qquad m=1, 2, \ldots n.$$

Опредѣлители

$$B = \Sigma \pm B_{1,1}\, B_{2,2} \ldots B_{n,n} \text{ и } C = \Sigma \pm C_{1,1}\, C_{2,2} \ldots C_{n,n}$$

не нули.

Сравнивая коэффиціенты при $u$ съ одинаковыми значками въ выраженіяхъ

$$[y_m] = A_{m,1}\, y_1 + A_{m,2}\, y_2 + \ldots + A_{m,n}\, y_n = \sum_k A_{m,k} \sum_l C_{k,l}\, u_l$$

и

$$[y_m] = C_{m,1}[u_1] + C_{m,2}[u_2] + \ldots + C_{m,n}[u_n] = \sum_k C_{m,k} \sum_l B_{k,l}\, u_l,$$

мы находимъ

(5) $$C_{m,1} B_{1,l} + C_{m,2} B_{2,l} + \ldots + C_{m,n} B_{n,l} = A_{m,1}\, C_{1,l} + A_{m,2}\, C_{2,l} + \ldots + A_{m,n}\, C_{n,l},$$
$$m = 1,\ 2, \ldots n.$$

Опредѣлитель $\Omega$ для системы $y_1, y_2, \ldots y_n$ и подобный ему опредѣлитель $\Omega'$ для системы $u_1, u_2, \ldots u_n$ равны

$$\Omega = \begin{vmatrix} A_{1,1} - \omega, & A_{2,1}, \ldots & A_{n,1} \\ A_{1,2}, & A_{2,2} - \omega, \ldots & A_{n,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1,n}, & A_{2,n}, \ldots & A_{n,n} - \omega \end{vmatrix}, \quad \Omega' = \begin{vmatrix} B_{1,1} - \omega, & B_{2,1}, \ldots & B_{n,1} \\ B_{1,2}, & B_{2,2} - \omega, \ldots & B_{n,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{1,n}, & B_{2,n}, \ldots & B_{n,n} - \omega \end{vmatrix}.$$

Составляя произведенія $\Omega C$ и $C\Omega'$, мы, съ помощью формулъ (5), сейчасъ же убѣждаемся, что

(6) $$\Omega C = C\Omega' = \Pi.$$

Опредѣлитель $C$ не нуль, поэтому $\Omega = \Omega'$, каково бы ни было значеніе $\omega$; отсюда мы заключаемъ, что коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ $\omega$ равны, что доказываетъ и самую теорему.

11. *Если основное уравненіе $\Omega = 0$ уравненія* (I) *относительно точки $a$ имѣетъ всѣ $n$ корней $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ различные, то уравненіе* (I) *имѣетъ систему независимыхъ интеграловъ, общій видъ элементовъ которой въ области точки $a$ будетъ*

(VI) $$Y_m = (x - a)^{\frac{\lg \omega_m}{2\pi i}}\, \varphi_m(x - a)$$

*гдѣ $\lg \omega_m$ есть одинъ изъ логариѳмовъ числа $\omega_m$, а $\varphi_m(x - a)$ разлагается, для значеній $x$, достаточно близкихъ къ $a$, въ рядъ по цѣлымъ степенямъ $x - a$.*

Съ помощью каждаго изъ корней уравненія (V) $\Omega = 0$ мы можемъ найти изъ уравненій ($\alpha$) п. 9 $n$ различныхъ системъ для отношеній коэффиціентовъ $\alpha$ къ одному изъ нихъ и составить затѣмъ $n$ различныхъ интеграловъ $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$, изъ которыхъ каждый, по обходѣ перемѣнной вокругъ точки $a$, обращается

$$[Y_m] = \omega_m Y_m.$$

Система интеграловъ $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$ будетъ независимою; въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \ldots + C_n Y_n = 0. \tag{1}$$

Пусть перемѣнная обойдетъ около точки $a$ $n - 1$ разъ; послѣ каждаго обхода мы получимъ изъ соотношенія (1) послѣдовательно

$$\left.\begin{array}{l} C_1 \omega_1 Y_1 + C_2 \omega_2 Y_2 + \ldots\ldots\ldots + C_n \omega_n Y_n = 0 \\ C_1 \omega_1^2 Y_1 + C_2 \omega_2^2 Y_2 + \ldots\ldots\ldots + C_n \omega_n^2 Y_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 \omega_1^{n-1} Y_1 + C_2 \omega_2^{n-1} Y_2 + \ldots + C_n \omega_n^{n-1} Y_n = 0. \end{array}\right. \tag{2}$$

Чтобы уравненія (1) и (2) были совмѣстны, необходимо, чтобы опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, \ldots\ldots\ldots & 1 \\ \omega_1, & \omega_2, \ldots\ldots\ldots & \omega_n \\ \omega_1^2, & \omega_2^2, \ldots\ldots\ldots & \omega_n^2 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \omega_1^{n-1}, & \omega_2^{n-1}, \ldots & \omega_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

былъ нулемъ; но это, если всѣ $\omega$ различны, не можетъ быть, а поэтому не можетъ быть, чтобы существовала линейная зависимость (1) между интегралами $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$.

Обозначимъ черезъ $r_m = \frac{1}{2\pi i} \lg \omega_m$, гдѣ $\lg \omega_m$ — одинъ изъ логариѳмовъ числа $\omega_m$.

Функція $Y_m(x-a)^{-r_m}$, послѣ обхода независимой перемѣнной около точки $a$, обратится

$$\left[Y_m(x-a)^{-r_m}\right] = \omega_m Y_m(x-a)^{-r_m} e^{-2\pi i r_m} = Y_m(x-a)^{-r_m},$$

т. е. получитъ свое первоначальное значеніе; такимъ образомъ функція $Y_m(x-a)^{-r_m}$ остается въ области точки $a$ однозначною и можетъ быть представлена, какъ извѣстно, рядомъ, расположеннымъ, для значеній $x$ достаточно близкихъ къ $a$, по цѣлымъ, положительнымъ и отрицательнымъ, степенямъ $x-a$. Разложеніе это будетъ имѣть мѣсто для всѣхъ точекъ внутри и на окружности, очерченной изъ точки $a$ радіусомъ, нѣсколько меньшимъ разстоянія $a$ до ближайшей особенной точки уравненія (I).

Обозначая вышеуказанную функцію $Y_m(x-a)^{-r_m}$ черезъ $\varphi_m(x-a)$, мы найдемъ, что дѣйствительно

$$\text{(VI)} \qquad Y_m = (x-a)^{r_m} \varphi_m(x-a).$$

12. Обратимся теперь къ разсмотрѣнію того случая, когда между корнями основнаго уравненія есть равные.

Сдѣлаемъ предварительно слѣдующее замѣчаніе: основное уравненіе

$$\text{(V)} \qquad \Omega = \Sigma \pm (A_{1,1}-\omega)(A_{2,2}-\omega)\ldots(A_{n,n}-\omega) = 0$$

показываетъ, что по крайней мѣрѣ одно изъ уравненій системы ($\alpha$) п. 9 есть слѣдствіе прочихъ; но число уравненій, представляющихся слѣдствіемъ прочихъ, можетъ быть и больше.

Покажемъ, что *это число не зависитъ, какъ и значенія* $\omega$, *отъ выбора системы независимыхъ интеграловъ.*

Какъ извѣстно, условіе необходимое и достаточное для того, чтобы между $n$ линейными уравненіями было $n-\nu+1$ и не болѣе уравненій — слѣдствіе прочихъ, заключается въ томъ, чтобы миноры порядка $\nu$ всѣ обращались въ нули и чтобы миноры порядка $\nu-1$ не всѣ сразу были нули.

Пусть $y_1, y_2, \ldots y_n$ и $u_1, u_2, \ldots u_n$ — двѣ различныя системы независимыхъ интеграловъ уравненія, и пусть, согласно обозначеніямъ п. 10,

$$\Omega = \Sigma \pm (A_{1,1} - \omega)(A_{2,2} - \omega)\ldots(A_{n,n} - \omega)$$

$$\Omega' = \Sigma \pm (B_{1,1} - \omega)(B_{2,2} - \omega)\ldots(B_{n,n} - \omega)$$

$$C = \Sigma \pm C_{1,1}\, C_{2,2} \ldots\ldots\ldots\ldots C_{n,n}.$$

Пусть въ системѣ $(\alpha)$, составленной для интеграловъ $y_1, y_2, \ldots y_n$, $n - \nu + 1$ уравненій и только есть слѣдствіе прочихъ.

Между опредѣлителями

$$\Omega,\ \Omega' \text{ и } C$$

на основаніи формулы (6) п. 10 существуетъ зависимость

$$\Omega C = C\Omega' = \Pi.$$

Если черезъ $p_{\gamma,\delta}$, $a_{\gamma,\delta}$, $b_{\gamma,\delta}$ и $c_{\gamma,\delta}$ обозначить миноры порядка $\nu$, составленные для опредѣлителей $\Pi$, $\Omega$, $\Omega'$ и $C$, а черезъ $\mu$ — число

$$\mu = \frac{n(n-1)\ldots(n-\nu+1)}{1.2\ldots\nu},$$

то

$$(1)\qquad \begin{aligned} p_{\gamma,\delta} &= a_{\gamma,1}\, c_{\delta,1} + a_{\gamma,2}\, c_{\delta,2} + \ldots + a_{\gamma,\mu}\, c_{\delta,\mu} = \\ &= c_{\gamma,1}\, b_{\delta,1} + c_{\gamma,2}\, b_{\delta,2} + \ldots + c_{\gamma,\mu}\, b_{\delta,\mu}. \end{aligned}$$

Такъ какъ, по условію, въ системѣ $(\alpha)$ $n - \nu + 1$ уравненій суть слѣдствіе прочихъ, то всѣ $a_{\gamma,\delta}$ равны нулю; слѣдовательно, на основаніи предъидущей формулы, имѣемъ систему изъ $\mu$ уравненіи

$$(2)\qquad c_{\gamma,1}\, b_{\delta,1} + c_{\gamma,2}\, b_{\delta,2} + \ldots + c_{\gamma,\mu}\, b_{\delta,\mu} = 0.$$

Опредѣлитель, составленный изъ величинъ $c_{\gamma,\delta}$, не нуль, такъ какъ онъ равенъ степени опредѣлителя $C$; поэтому всѣ

$$b_{\delta,\gamma} = 0.$$

Если бы всѣ миноры опредѣлителя $\Omega'$ порядка $\nu - 1$ были сразу нули, то съ помощью формулъ, подобныхъ (1), мы доказали бы, что всѣ миноры порядка $\nu - 1$ опредѣлителя $\Omega$ были бы нули, что противорѣчило бы положенію. Такимъ образомъ лемма установлена вполнѣ.

13. Пусть теперь $\omega_1$ есть $m$-кратный корень уравненія $\Omega = 0$. Покажемъ, что *такому корню соотвѣтствуетъ группа изъ $m$ линейно независимыхъ другъ отъ друга интеграловъ, состоящая изъ $\mu_1$ подгруппъ, каждая изъ одного члена, $\mu_2$ подгруппъ изъ 2 членовъ, . . . , $\mu_\lambda$ подгруппъ изъ $\lambda$ членовъ каждая; интегралы, входящіе въ подгруппу изъ $k$ членовъ, обладаютъ слѣдующимъ свойствомъ:*

$$\text{(VII)} \quad [y_1] = \omega_1 y_1, \ [y_2] = \omega_1 y_2 + y_1, \ldots [y_k] = \omega_1 y_k + y_{k-1},$$

*а числа $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_\lambda$ удовлетворяютъ соотношенію*

$$\mu_1 + 2\mu_2 + \ldots + \lambda\mu_\lambda = m.$$

Пусть въ системѣ ($\alpha$) п. 9, послѣ подстановки $\omega_1$ вмѣсто $\omega$, $\nu$ уравненій будетъ слѣдствіемъ прочихъ ($\nu$ очевидно $\leq m$).

Въ этомъ случаѣ изъ $n$ величинъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, опредѣляемыхъ уравненіями ($\alpha$), $\nu$ какіе нибудь $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ (только $\nu$) остаются произвольными, а остальныя $n - \nu$ опредѣлятся черезъ первыя $\nu$ величинъ и $\omega_1$.

Пользуясь тѣмъ, что въ выраженіи

$$Y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n$$

есть $\nu$ произвольныхъ величинъ, мы можемъ составить $\nu$ интеграловъ $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$, линейно независимыхъ между собою, которые, на основаніи системы ($\alpha$), будутъ обладать слѣдующимъ свойствомъ

$$\text{(1)} \qquad [Y_k] = \omega_1 Y_k, \qquad k = 1, 2, \ldots \nu.$$

Если $\nu = m$, то, полагая $m = \mu_1$, $\mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_\lambda = 0$, мы сейчасъ же убѣждаемся въ справедливости теоремы.

Если $\nu < m$, то для доказательства теоремы поступимъ слѣдующимъ образомъ.

Возьмемъ новую систему независимыхъ интеграловъ, въ которую введемъ величины $Y_1, Y_2, \ldots Y_\nu$ и еще $n-\nu$ интеграловъ $Y_{\nu+1}, \ldots Y_{n-\nu}$. Эта система удовлетворитъ слѣдующимъ соотношеніямъ

$$
(2)\quad
\begin{array}{l}
[Y_1] = \omega_1 Y_1;\ [Y_2] = \omega_1 Y_2; \ldots [Y_\nu] = \omega_1 Y_\nu \\
[Y_{\nu+1}] = B_{\nu+1,1} Y_1 + B_{\nu+1,2} Y_2 + \ldots + B_{\nu+1,\nu+1} Y_{\nu+1} + \ldots + B_{\nu+1,n} Y_n \\
[Y_{\nu+2}] = B_{\nu+2,1} Y_1 + \ldots\ldots\ldots + B_{\nu+2,\nu+1} Y_{\nu+1} + \ldots + B_{\nu+2,n} Y_n \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[Y_n] = B_{n,1} Y_1 + \ldots\ldots\ldots + B_{n,\nu+1} Y_{\nu+1} + \ldots + B_{n,n} Y_n.
\end{array}
$$

Составимъ для этой системы основное уравненіе; оно будетъ имѣть видъ

$$(\omega_1 - \omega)^\nu\, \Omega' = 0.$$

$$
(3)\qquad \Omega' = \begin{vmatrix}
B_{\nu+1,\nu+1} - \omega, & B_{\nu+2,\nu+1}, & \ldots & B_{n,\nu+1} \\
B_{\nu+1,\nu+2}, & B_{\nu+2,\nu+2} - \omega, & \ldots & B_{n,\nu+2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
B_{\nu+1,n}, & B_{\nu+2,n}, & \ldots\ldots & B_{n,n} - \omega
\end{vmatrix}.
$$

Такъ какъ, по доказанному, корни основнаго уравненія отъ выбора системы независимыхъ интеграловъ не зависятъ, то уравненіе $\Omega' = 0$ имѣетъ корень $\omega_1$ кратности $m - \nu$.

Пусть $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-\nu}$ постоянныя величины, удовлетворяющія уравненіямъ

$$
(4)\quad
\begin{array}{l}
\beta_1 (B_{\nu+1,\nu+1} - \omega_1) + \beta_2 B_{\nu+2,\nu+1} + \ldots + \beta_{n-\nu} B_{n,\nu+1} = 0 \\
\beta_1 B_{\nu+1,\nu+2} + \beta_2 (B_{\nu+2,\nu+2} - \omega_1) + \ldots + \beta_{n-\nu} B_{n,\nu+2} = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\beta_1 B_{\nu+1,n} + \beta_2 B_{\nu+1,\nu+2} + \ldots\ldots + \beta_{n-\nu} (B_{n,n} - \omega_1) = 0.
\end{array}
$$

Такъ какъ для $\omega = \omega_1$ опредѣлитель $\Omega' = 0$, то въ системѣ (4) по крайней мѣрѣ одно уравненіе есть слѣдствіе прочихъ; пусть будетъ $\nu'$ уравненій слѣдствіе прочихъ; изъ $n - \nu$ величинъ $\beta$ произвольныхъ будетъ $\nu'$; остальныя $n - \nu' - \nu$ опредѣлятся въ функціи предъидущихъ.

Изъ интеграла $Z = \beta_1 Y_{\nu+1} + \beta_2 Y_{\nu+2} + \ldots + \beta_{n+\nu} Y_n$, пользуясь произвольностью $\nu'$ величинъ $\beta$, мы можемъ составить $\nu'$ интеграловъ $Z_1, Z_2, \ldots Z_{\nu'}$, линейно независимыхъ между собою.

Каждый изъ интеграловъ $Z$ будетъ обладать слѣдующимъ свойствомъ:

(5) $$[Z_k] = \omega_1 Z_k + \beta_1^{(k)} Y_1 + \beta_2^{(k)} Y_2 + \ldots + \beta_\nu^{(k)} Y_\nu^{(k)} = \omega_1 Z_k + \varphi_k(Y_1, \ldots Y_\nu), \quad k = 1, 2, \ldots \nu'$$

причемъ, очевидно,

$$[\varphi_k] = \omega_1 \varphi_k \qquad k = 1, 2, \ldots \nu'.$$

Между $\nu'$ величинами $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{\nu'}$ не существуетъ линейной зависимости: въ самомъ дѣлѣ, если бы

$$A_1 \varphi_1 + A_2 \varphi_2 + \ldots + A_{\nu'} \varphi_{\nu'} = 0,$$

то интегралъ

$$Z = A_1 Z_1 + A_2 Z_2 + \ldots + A_{\nu'} Z_{\nu'}$$

удовлетворилъ бы соотношенію

$$[Y] = \omega_1 \Sigma A_j Z_j + \Sigma A_j \varphi_j = \omega_1 Z;$$

отсюда слѣдовало бы, что величинъ характера $Y_1, Y_2, \ldots Y_\nu$ болѣе $\nu$ и что въ системѣ ($\alpha$) по крайней мѣрѣ $\nu + 1$ уравненій — слѣдствіе прочихъ, а это противорѣчило бы положенію.

Съ другой стороны, на основаніи того же положенія, не можетъ быть болѣе $\nu$ линейно независимыхъ величинъ характера $\varphi_k$; это показываетъ, что

$$\nu' \leqq \nu.$$

Если $\nu' + \nu = m$, то, полагая $\mu_1 = \nu - \nu'$, $\mu_2 = \nu'$, $\mu_3 = \mu_4 = \ldots \ldots = \mu_\lambda = 0$, мы сейчасъ же убѣждаемся въ справедливости теоремы. Интегралы, составляющіе $\nu'$ группъ изъ двухъ членовъ, будутъ

$$Z_1, Z_2, \ldots Z_{\nu'}, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{\nu'}.$$

Для нихъ

$$[Z_k] = \omega_1 Z_k + \varphi_k,\ [\varphi_k] = \omega_1 \varphi_k, \qquad k=1, 2,\ldots\nu'.$$

Интегралы, составляющіе $\nu - \nu'$ группъ изъ одного члена, будутъ

$$\varphi_{\nu'+1},\ \varphi_{\nu'+2},\ldots \varphi_\nu;$$

для нихъ

$$[\varphi_{\nu'+k}] = \omega_1 \varphi_{\nu'+k} \qquad k=1, 2,\ldots\nu-\nu'.$$

Если же $\nu + \nu' < m$, то мы повторимъ подобныя предъидущему разсужденія, пока сумма $\nu + \nu' + \nu'' + \ldots$ не составитъ числа $m$.

Въ результатѣ мы придемъ къ вышеуказанной теоремѣ.

Вводимыя теоремой подгруппы мы будемъ въ дальнѣйшемъ называть подгруппами Гамбургера.

14. На основаніи теоремы предъидущаго пункта можно весьма просто установить форму интеграловъ, соотвѣтствующихъ $m$-кратному корню основнаго уравненія относительно точки $a$.

Обозначимъ черезъ $r_1$ одно изъ значеній величины

$$r_1 = \frac{1}{2\pi i} \lg \omega_1.$$

Пусть $y_1, y_2, \ldots y_k$ — $k$ независимыхъ интеграловъ, составляющихъ подгруппу Гамбургера изъ $k$ членовъ (VII).

Разсуждая совершенно также, какъ въ п. 11, мы прежде всего убѣдимся, что $y_1$ можетъ быть, въ области точки $a$, представленъ въ видѣ

$$(1) \qquad y_1 = (x-a)^{r_1} \varphi_1(x-a),$$

гдѣ $\varphi_1(x-a)$, для значеній $x$, достаточно близкихъ къ $a$, разлагается въ рядъ по цѣлымъ (положительнымъ и отрицательнымъ) степенямъ $x-a$.

Изъ соотношеній $[y_2] = \omega_1 y_2 + y_1$ и $[y_1] = \omega_1 y_1$ слѣдуетъ, что

$$(2) \qquad \left[\frac{y_2}{y_1}\right] = \frac{y_2}{y_1} + \frac{1}{\omega_1};$$

отсюда видно, что функція

$$\frac{y_2}{y_1} - \frac{1}{2\pi i \omega_1} \lg (x-a),$$

по обходѣ независимой перемѣнной около $a$, получитъ свое первоначальное значеніе; это показываетъ, что функція, въ области этой точки, будетъ разлагаться въ рядъ по цѣлымъ степенямъ $x-a$. Обозначая ее черезъ $f(x-a)$, мы найдемъ

$$(3)\qquad y_2 = y_1\, f(x-a) + \frac{1}{2\pi i\omega_1}\, y_1 \lg(x-a) =$$
$$= (x-a)^{r_1}\left(\varphi_2(x-a) + \frac{1}{2\pi i\omega_1}\,\varphi_1(x-a)\lg(x-a)\right).$$

Покажемъ теперь, что если $y_l$ имѣетъ видъ

$$(4)\quad y_l = (x-a)^{r_1}\left(\varphi_{1,l}(x-a) + \varphi_{2,l}(x-a)\lg(x-a) + \ldots + \varphi_{l,l}\lg^{l-1}(x-a)\right),$$

то $y_{l+1}$ будетъ имѣть видъ

$$(5)\quad y_{l+1} = (x-a)^{r_1}\left(\varphi_{1,l+1}(x-a) + \varphi_{2,l+1}(x-a)\lg(x-a) + \ldots + \varphi_{l+1,l+1}\lg^{l}(x-a)\right),$$

гдѣ всѣ функціи $\varphi$ — однозначны.

Въ самомъ дѣлѣ, мы всегда можемъ считать, что $y_{l+1}$ имѣетъ форму (5), съ тѣмъ условіемъ, что одна изъ функцій $\varphi_{k,l+1}$ — какая угодно; положимъ, что $\varphi_{1,l+1}$ есть нѣкоторая функція, для которой соотношеніе (5) имѣетъ мѣсто; наше положеніе будетъ доказано, если мы убѣдимся, что однозначныя функціи $\varphi_{2,l+1}, \ldots \varphi_{l+1,l+1}$ всегда могутъ быть выбраны такимъ образомъ, что $\varphi_{1,l+1}$ также будетъ однозначною.

Подставляя въ уравненіе

$$[y_{l+1}] = \omega_1 y_{l+1} + y_l$$

выраженія (4) и (5), найдемъ

$$(x-a)^{r_1}\omega_1\left\{[\varphi_{1,l+1}] + \varphi_{2,l+1}(\lg(x-a)+2\pi i) + \ldots + \varphi_{l+1,l+1}(\lg(x-a)+2\pi i)^l\right\} =$$
$$(6)\quad = (x-a)^{r_1}\omega_1\left\{\varphi_{1,l+1} + \varphi_{2,l+1}\lg(x-a) + \ldots\ldots\ldots + \varphi_{l+1,l+1}\lg^l(x-a)\right\} +$$
$$+ (x-a)^{r_1}\left(\varphi_{1,l} + \varphi_{2,l}\lg(x-a) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \varphi_{l,l}\lg^{l-1}(x-a)\right).$$

Выберемъ функціи $\varphi_{3,l+1}, \ldots \varphi_{l+1,l+1}$ такъ, чтобы коэффиціенты въ лѣвой и правой частяхъ равенства (6) при одинаковыхъ степеняхъ $\lg(x-a)$ были равны. Для этого достаточно, чтобы указанныя функціи удовлетворили уравненіямъ вида

$$(7)\quad \omega_1 \sum_{j=k+2}^{j=l+1} \frac{(j-1)(j-2)\ldots(k+1)}{1\ 2\ldots(j-k-1)}(2\pi i)^{j-k-1}\varphi_{j,l+1}=\varphi_{k+1,l},\quad k=1,2,\ldots l-1,$$

что всегда возможно. Въ такомъ случаѣ уравненіе (6) приводится къ

$$(8)\quad \omega_1\left\{[\varphi_{1,l+1}]+2\pi i\varphi_{2,l+1}+(2\pi i)^2\varphi_{3,l+1}+\ldots+(2\pi i)^l\varphi_{l+1,l+1}\right\}=\omega_1\varphi_{1,l+1}+\varphi_{1,l}$$

Функціей $\varphi_{2,l+1}$ распорядимся такъ, чтобы удовлетворилось уравненіе

$$(9)\quad \omega_1\left(2\pi i\varphi_{2,l+1}+(2\pi i)^2\varphi_{3,l+1}+\ldots+(2\pi i)^l\varphi_{l+1,l+1}\right)=\varphi_{1,l}.$$

Въ такомъ случаѣ, очевидно, функція $\varphi_{1,l+1}$ удовлетворитъ соотношенію

$$[\varphi_{1,l+1}]=\varphi_{1,l+1}$$

и будетъ, такимъ образомъ, однозначною въ области точки $a$, что и требовалось доказать.

Замѣтимъ, что изъ послѣдняго уравненія (7) слѣдуетъ, что

$$(10)\qquad \varphi_{l+1,l+1}=\frac{1}{2\pi i\omega_1 l}\varphi_{l,l},$$

т. е. что функція при высшей степени $\lg(x-a)$ въ выраженіи $y_{l+1}$ отличается только постояннымъ множителемъ отъ функціи, стоящей при высшей степени $\lg(x-a)$ въ выраженіи $y_l$.

Полученный результатъ даетъ намъ возможность высказать слѣдующее положеніе: *интегралы подгруппы Гамбургера изъ $k$ членовъ имѣютъ въ области особенной точки $a$ слѣдующій видъ*:

$$\text{(VIII)}\quad \begin{aligned}
y_1&=(x-a)^{r_1}\varphi_{1,1}(x-a)\\
y_2&=(x-a)^{r_1}\left(\varphi_{1,2}(x-a)+\varphi_{2,2}(x-a)\lg(x-a)\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_l&=(x-a)^{r_1}\left(\varphi_{1,l}(x-a)+\varphi_{2,l}(x-a)\lg(x-a)+\ldots+\varphi_{l,l}(x-a)\lg^{l-1}(x-a)\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_k&=(x-a)^{r_1}\left(\varphi_{1,k}(x-a)+\varphi_{2,k}(x-a)\lg(x-a)+\ldots+\varphi_{k,k}(x-a)\lg^{k-1}(x-a)\right),
\end{aligned}$$

*гдѣ* $r_1 = \frac{1}{2\pi i} lg\ \omega_1$, $\omega_1$ — *m-кратный корень уравненія* $\Omega = 0$, *всѣ функціи* $\varphi$ — *однозначны, а функціи* $\varphi_{1,1}, \varphi_{2,2}, \ldots \varphi_{k,k}$ *отличаются другъ отъ друга только постоянными множителями.*

15. Въ разсмотрѣнномъ нами общемъ случаѣ функціи $\varphi_m$ (VI) и $\varphi_{j,k}$ (VIII) въ выраженіяхъ интеграловъ уравненія (I) разлагаются въ области точки $a$ по цѣлымъ степенямъ $(x-a)$, причемъ число членовъ съ отрицательными показателями можетъ быть и безконечно большимъ.

Теперь мы остановимся на тѣхъ уравненіяхъ, интегралы коихъ, въ области особенной точки $a$, выражаются черезъ функціи $\varphi_{j,k}$, заключающія въ разложеніяхъ по степенямъ $x-a$ конечное число членовъ съ отрицательными показателями.

Выраженія вида

$$F=(x-a)^{\rho}\left(\psi_1(x-a)+\psi_2(x-a)\lg(x-a)+\ldots+\psi_{\mu}(x-a)\lg^{\mu-1}(x-a)\right) \tag{IX}$$

будемъ называть правильными, если для нѣкотораго конечнаго цѣлаго числа $\nu$ предѣлъ

$$\lim\left[(x-a)^{\nu}F\right]_{x=a}=0$$

или другому конечному числу.

Если при этомъ показатель $\rho$ выбранъ такъ, что ни одна изъ функцій $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{\mu}$ для $x=a$ въ безконечность не обращается и вмѣстѣ съ тѣмъ не всѣ величины $\psi_k(a)$ одновременно нули, то мы будемъ говорить, что $F$ принадлежитъ показателю $\rho$. Корни основнаго уравненія для уравненія (I) относительно точки $a$, а, слѣдовательно, и показатели $r$, введенные въ формулы (VI) и (VIII), зависятъ отъ постоянныхъ параметровъ, входящихъ въ коэффиціенты уравненія (I), вообще говоря, трансцендентнымъ образомъ. Между тѣмъ, въ случаѣ, когда всѣ интегралы въ области точки $a$ правильные, показатели, которымъ они принадлежатъ и которые только на цѣлыя числа отличаются отъ показателей $r$, зависятъ отъ тѣхъ же постоянныхъ алгебраическимъ образомъ. Это обстоятельство придаетъ особый интересъ изученію уравненій, имѣющихъ, въ области нѣкоторой особенной точки $a$, всѣ интегралы правильные. Въ настоящей главѣ мы укажемъ, какимъ условіямъ должны удовлетворять коэффиціенты уравненія (I), чтобы всѣ интегралы его въ области особенной точки $a$ были правильные.

Чтобы не нарушать впослѣдствіи частыми отступленіями общаго хода доказательства главной теоремы, мы сдѣлаемъ нѣсколько отдѣльныхъ предварительныхъ замѣчаній.

16. 1. Пусть $y_1, y_2, \ldots y_n$ есть одна изъ системъ независимыхъ интеграловъ уравненія (I). Производная отъ опредѣлителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1^{(n-1)}, & y_1^{(n-2)}, & \ldots & y_1 \\ y_2^{(n-1)}, & y_2^{(n-2)}, & \ldots & y_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n^{(n-1)}, & y_n^{(n-2)}, & \ldots & y_n \end{vmatrix}, \qquad \Delta' = \begin{vmatrix} y_1^{(n)}, & y_1^{(n-2)}, & \ldots & y_1 \\ y_2^{(n)}, & y_2^{(n-2)}, & \ldots & y_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n^{(n)}, & y_n^{(n-2)}, & \ldots & y_n \end{vmatrix}.$$

Если въ $\Delta'$ подставимъ

$$y_k^{(n)} = -p_1 y_k - p_1 y_k - \ldots - p_n y_k, \qquad k=1, 2, \ldots n,$$

то сейчасъ же замѣтимъ, что $\Delta' = -p_1 \Delta$, откуда $\Delta = Ce^{-\int p_1 dx}$.

Если черезъ $\Delta_1$ обозначимъ опредѣлитель, подобный $\Delta$, но составленный для уравненія (II), получаемаго изъ (I) подстановкой ($A$) $y = y_1 \int z dx$, то получимъ

$$\Delta_1 = C_1 \, e^{-\int q_1 dx},$$

но изъ (II) $\quad q_1 = \frac{1}{y_1}(ny_1' + p_1 y_1)$; подставляя это выраженіе $q_1$ въ предъидущую формулу, найдемъ, что

$$\Delta = C' y_1^n \Delta_1.$$

Прилагая эту формулу къ уравненію (II′) и прочимъ, указаннымъ въ п. 6, мы послѣдовательно найдемъ

$$\Delta_1 = C'' z_1^{n-1} \Delta_2 \ldots \Delta_{n-1} = C^{(n)} w_1,$$

а отсюда

$$\Delta = C_0 y_1^n z_1^{n-1} \ldots t_1^2 w_1.$$

2. Если въ формулѣ (A) п. 6 $y = y_1 \int z dx$ положимъ $y$ рав-

нымъ послѣдовательно $y_2, y_3, \ldots y_n$—интеграламъ нѣкоторой независимой системы уравненія (I), то величины

$$z_1 = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right),\; z_2 = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_3}{y_1}\right), \ldots\; z_{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_n}{y_1}\right)$$

составятъ независимую систему интеграловъ уравненія (II).

Такимъ же образомъ, если въ формулѣ (B) $z = z_1 \int u dx$, мы положимъ $z = z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$, то величины

$$u_1 = \frac{d}{dx}\left(\frac{z_2}{z_1}\right), u_2 = \frac{d}{dx}\left(\frac{z_3}{z_1}\right), \ldots\; u_{n-2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{z_{n-1}}{z_1}\right)$$

составимъ независимую систему интеграловъ уравненія (II'); и т. д. до величины $w_1$, которая будетъ интегралъ уравненія перваго порядка и которая равна

$$w_1 = \frac{d}{dx}\left(\frac{t_2}{t_1}\right).$$

17. Правильныя выраженія вида

$$\text{(IX)} \quad F = (x-a)^\rho \left(\psi_1(x-a) + \psi_2(x-a)\lg(x-a) + \ldots + \psi_\mu(x-a)\lg^{\mu-1}(x-a)\right),$$

принадлежащія показателю $\rho$, обладаютъ, между прочимъ, слѣдующими свойствами:

$a)$ $$[FF_1] = [F]\cdot[F_1];\; \left[\frac{F}{F_1}\right] = \frac{[F]}{[F_1]}.$$

$b$, $\frac{dF}{dx}$ *принадлежитъ, вообще говоря, показателю* $\rho - 1$.

Если же одновременно

$$\rho = 0,\; \psi_k(a) = 0, \qquad k = 2, 3, \ldots \mu,$$

$\frac{dF}{dx}$ можетъ принадлежать показателю $r \gtreqqless 0$; въ самомъ дѣлѣ

$$\frac{dF}{dx} = \sum_{k=1}^{k=\mu} (x-a)^{\rho-1}\left(\rho\psi_k + (x-a)\psi'_k + k\psi_{k+1}\right)\lg^{k-1}(x-a),\quad \psi_{\mu+1} = 0.$$

При $\rho$, неравномъ нулю, $\frac{dF}{dx}$ принадлежала бы показателю большему $\rho - 1$ только въ томъ случаѣ, если всѣ $\psi_k(a)$ $(k = 1, 2, \ldots \mu)$ одновременно были бы нули, чего мы не допускаемъ. Если $\rho = 0$ и всѣ $\psi_k(a) = 0$ $(k = 2, 3, \ldots \mu)$, то $\frac{dF}{dx}$ можетъ дѣйствительно принадлежать показателю $r \gtreqqless 0$.

*c*) $\int Fdx$ *принадлежитъ показателю* $\rho + 1$, что слѣдуетъ и изъ предъидущаго положенія; въ указанномъ выше исключительномъ случаѣ мы всегда можемъ воспользоваться вводимой интегрированіемъ произвольной постоянной, чтобы сохранить справедливость настоящаго замѣчанія.

*d*) *Произведеніе* $FF_1$ *принадлежитъ показателю, равному суммѣ* $\rho + \rho_1$ *показателей, которымъ принадлежитъ* $F$ *и* $F_1$.

*e*) если $F_1$ есть выраженіе вида (IX), не содержащее логариѳмовъ совсѣмъ, то $\frac{F}{F_1}$ *принадлежитъ показателю* $\rho - \rho_1$, разности показателей, которымъ принадлежатъ $F$ и $F_1$.

*f*) Пусть $y_1, y_2, \ldots y_k$ будутъ интегралы одной изъ подгруппъ Гамбургера, всѣ правильные; пусть $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_k$ показатели, которымъ они соотвѣтственно принадлежатъ; *дѣйствительная часть каждаго предъидущаго числа* $\rho$ *больше или равна дѣйствительной части всѣхъ послѣдующихъ.* Въ этомъ легко убѣдиться, замѣчая, что, какъ выше показано, коэффиціенты при высшихъ степеняхъ $\lg(x-a)$ отличаются только постоянными множителями. Интегралъ $y_1$, незаключающій логариѳмовъ, принадлежитъ, слѣдовательно, показателю, дѣйствительная часть котораго не меньше дѣйствительныхъ частей прочихъ интеграловъ той же подгруппы.

*g*) Очевидно также, что всѣ числа $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_k$ отличаются между собою только на цѣлыя числа (или равны). Тѣмъ же свойствомъ обладаютъ и показатели, которымъ принадлежатъ интегралы, соотвѣтствующія одному $m$-кратному корню основнаго уравненія $\Omega = 0$. Наоборотъ, разность показателей, которымъ принадлежатъ интегралы, соотвѣтствующіе различнымъ корнямъ основнаго уравненія, никогда не можетъ быть цѣлымъ числомъ.

18. Возьмемъ одинъ частный случай уравненія (I)

$$(R) \quad y^{(n)} + \frac{P_1(x-a)}{x-a} y_1^{(n-1)} + \frac{P_2(x-a)}{(x-a)^2} y^{(n-2)} + \ldots + \frac{P_n(x-a)}{(x-a)^n} y = 0$$

гдѣ функціи $P_k$ удовлетворяютъ условію

$$(1) \qquad \lim (P_k)_{x=a} = 0 \text{ или ч. кон.} \qquad k = 1, 2, \ldots n.$$

Подставимъ въ уравненіе ($R$)

$$y = (x-a)^\rho z$$

Уравненіе ($R$) приметъ видъ

$$(2) \qquad z^{(n)} + \frac{Q_1}{x-a} z^{(n-1)} + \ldots + \frac{Q_n}{(x-a)^n} z = 0,$$

причемъ коэффиціенты $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ опредѣлятся формулами

$$(3) \quad Q_k = \overline{n}_k (\rho)_k + \overline{n-1}_{k-1} (\rho)_{k-1} P_1 + \overline{n-2}_{k-2} (\rho)_{k-2} P_2 + \ldots + P_k, \quad k = 1, 2, \ldots n,$$

гдѣ обозначено черезъ

$$\overline{n}_k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k}, \ (\rho)_k = \rho(\rho-1)\ldots(\rho-k+1), \ (\rho)_0 = 1, \overline{n}_0 = 1.$$

Положимъ, что $\rho$ равно одному изъ корней уравненія

$$(X) \quad f(\rho) = (\rho)_n + (\rho)_{n-1} P_1(0) + (\rho)_{n-2} P_2(0) + \ldots + P_n(0) = 0.$$

Въ такомъ случаѣ коэффиціентъ $Q_n$, который, на основаніи формулъ (3), равенъ

$$Q_n = (\rho)_n + (\rho)_{n-1} P_1 + (\rho)_{n-2} P_2 + \ldots + P_n,$$

раздѣлится, очевидно, на $x-a$ и можетъ быть представленъ въ видѣ $(x-a) Q^0{}_n$, гдѣ $Q^0{}_n$ удовлетворитъ условію (1); уравненіе (2) представится въ видѣ

$$(4) \qquad z^{(n)} + \frac{Q_1}{x-a} z^{(n-1)} + \ldots + \frac{Q_n^0}{(x-a)^{n-1}} z = 0.$$

*Уравненіе (X) мы назовемъ опредѣляющимъ уравненіемъ относительно точки a для уравненія (R)*; корни его, какъ мы убѣдимся дальше, отличаются только на цѣлыя числа отъ корней основнаго уравненія.

Докажемъ пока слѣдующія два его свойства.

1. Составимъ опредѣляющее уравненіе для уравненія (2). Оно будетъ имѣть видъ

$$(5) \quad f_1(r) = (r)_n + (r)_{n-1} Q_1(0) + \ldots + (r)_1 Q_{n-1}(0) + Q_n(0) = 0.$$

Пусть корни уравненія (X) $f(\rho) = 0$ будутъ $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$.

*Въ такомъ случаѣ корни уравненія* (5) *будутъ* $\rho_1-\rho$, $\rho_2-\rho, \ldots \rho_n-\rho$; другими словами

$$f(r+\rho)=f_1(r). \tag{6}$$

Чтобы убѣдиться въ этомъ, достаточно воспользоваться тождествомъ

$$(r+\rho)_k=(r+\rho)(r+\rho-1)\ldots(r+\rho-k+1)=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=k}\overline{k}_\lambda(\rho)_{k-\lambda}(r)_\lambda. \tag{7}$$

На основаніи этого тождества

$$f(r+\rho)=\sum_{k=0}^{k=n}P_k(0)(r+\rho)_{n-k}=\sum_{k=0}^{k=n}P_k(0)\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-k}\overline{k-n}_\lambda(\rho)_{n-k-\lambda}(r)_\lambda=$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}(r)_\lambda\sum_{k=0}^{k=n-\lambda}P_k(0)\,\overline{n-k}_\lambda(\rho)_{n-k-\lambda}, \qquad P_0(0)=1.$$

Послѣдняя сумма легко можетъ быть представлена въ видѣ

$$f(\nu+\rho)=(r)_n+(r)_{n-1}\left(\overline{n}_{n-1}(\rho)_1+P_1(0)\right)+$$

$$+(r)_{n-2}\left(\overline{n}_{n-2}(\rho)_2+\overline{n-1}_{n-2}(\rho)_1P_1(0)+P_2(0)\right)+\ldots$$

$$\ldots+(r)_0\left((\rho)_n+(\rho)_{n-1}P_1(0)+\ldots\ldots+P_n(0)\right)=$$

$$=(r)_n+(r)_{n-1}Q_1(0)+(r)_{n-2}Q_2(0)+\ldots+Q_n(0)=f_1(r),$$

что и требовалось доказать.

2. Пусть $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$ — корни опредѣляющаго уравненія (X). Соединимъ въ одну группу всѣ корни, разность между которыми есть число цѣлое (считая и нуль въ томъ числѣ). Пусть эти корни будутъ $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_k$; затѣмъ разность между $\rho_{k+l}$ и $\rho_j$, при $l>0$ и $j=1,2,\ldots n$, уже не можетъ быть цѣлымъ числомъ.

Расположимъ корни $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_k$ въ порядкѣ убыванія ихъ дѣйствительныхъ частей; пусть дѣйствительная часть $\rho_1 \geqq$ д. ч. $\rho_2$, д. ч. $\rho_2 \geqq$ д. ч. $\rho_3$ и т. д.

Подставимъ въ уравненіе $(R)$ $y=(x-a)^{\rho_1}z$ и составимъ для преобразованнаго уравненія, которое будетъ имѣть видъ (4), опредѣляющее уравненіе

$$(r)_n+(r)_{n-1}Q_1(0)+\ldots+(r)_1Q_{n-1}(0)=0;$$

по доказанному выше, корни его будутъ

$$0,\ \rho_2-\rho_1,\ \rho_3-\rho_1,\ldots\rho_{k+1}-\rho_1,\ldots\rho_n-\rho_1$$

— числа цѣлыя и $\leqq 0$; уравненіе

$$(1)\quad (r+1)_n+(r+1)_{n-1}Q_1(0)+\ldots+(r+1)_1Q_{n-1}(0)=0$$

будетъ имѣть корни

$$-1,\ \rho_2-\rho_1-1,\ \rho_3-\rho_1-1,\ldots\rho_n-\rho_1-1.$$

Въ ряду этихъ чиселъ нѣтъ ни одного, равнаго нулю или цѣлому положительному числу; поэтому *полиномъ степени $n$ относительно цѣлаго и положительнаго числа $\lambda$*

$$(\lambda+1)_n+(\lambda+1)_{n-1}Q_1(0)+\ldots+(\lambda+1)_1Q_{n-1}(0)$$

*ни при одномъ значеніи $\lambda$ нулемъ не можетъ быть.*

19. Теперь мы можемъ обратиться къ доказательству основной теоремы:

*Чтобы всѣ интегралы уравненія $(I)$ въ области особенной точки $a$ были правильные, необходимо и достаточно, чтобы уравненіе это имѣло видъ*

$$(R)\qquad y^{(n)}+\frac{P_1(x-a)}{x-a}y^{(n-1)}+\frac{P_2(x-a)}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{P_n(x-a)}{(x-a)^n}y=0,$$

*гдѣ функціи $P_1$, $P_2$,... $P_n$ при $x=a$ имѣютъ конечное значеніе.*

Докажемъ сперва необходимость этого условія.

Если $y_1, y_2,\ldots y_n$ представляютъ независимую систему интеграловъ уравненія (I), то коэффиціентъ $p_k$ уравненія (I), какъ легко повѣрить, равенъ

$$(1)\qquad p_k=\frac{\Delta_k}{\Delta}$$

гдѣ $\Delta$ обозначаетъ опредѣлитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1^{(n-1)}, & y_1^{(n-2)}, & \ldots & y_1 \\ y_2^{(n-1)}, & y_2^{(n-2)}, & \ldots & y_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n^{(n-1)}, & y_n^{(n-2)}, & \ldots & y_n \end{vmatrix},$$

а $\Delta_k$ получается изъ $\Delta$ замѣной $y_m^{(n-k)}$ черезъ $y_m^{(n)}$, $m=1, 2, \ldots n$.

Какъ мы видѣли выше (п. 11 и 14, ф. (VI) и (VII)) уравненіе (I) имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ интегралъ, свободный отъ логариѳмовъ. Пусть $y_1$ будетъ этотъ интегралъ. Пусть $z$ будетъ интегралъ, свободный отъ логариѳмовъ, для уравненія (II) п. 6, получаемаго изъ (I) подстановкой $y=y_1 \int z dx$, $u_1$ — для уравненія (II′) и т. д. до $w_1$.

Пользуясь формулой п. 16, 1

$$\Delta = C y_1^n z_1^{n-1} u_1^{n-2} \ldots t_1^2 w_1$$

мы убѣждаемся, что въ $\Delta$ логариѳмы не входятъ; такъ какъ коэффиціентъ $p_k$ есть функція однозначная въ области точки $a$, то изъ выраженія (1) $p_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$ вытекаетъ, что и въ $\Delta_k$ логариѳмы не входятъ; изъ того же выраженія $p_k$ видно, что если всѣ интегралы уравненія (I) правильные, то и всѣ $p_k$ будутъ правильныя выраженія (п. 17).

Изъ этихъ замѣчаній слѣдуетъ, что

$$P_k = (x-a)^{\varkappa} Q_k (x-a),$$

гдѣ $Q_k$ есть функція, разлагающаяся въ рядъ по цѣлымъ и положительнымъ степенямъ $x-a$, причемъ $Q_k(0)$ не нуль. Остается опредѣлить значеніе числа $\varkappa$.

Мы видѣли (п. 16, 2), что интегралы уравненія (II) $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$ выражаются черезъ интегралы уравненія (I) съ помощью формулъ

$$z_k = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_{k+1}}{y_1}\right), \qquad k=1, 2, \ldots n-1.$$

Если разность показателей $r_{k+1}$ и $r_1$, которымъ принадлежатъ интегралы $y_{k+1}$ и $y_1$, не равна нулю, то, на основаніи замѣчаній п. 17 $b$ и $e$, $z_k$ будетъ принадлежать показателю $r_{k+1}-r_1-1$. Если же $r_{k+1}=r_1$ и притомъ въ выраженіи

$$y_{k+1}=(x-a)^{r_{k+1}}\left(\varphi_{1,k+1}+\varphi_{2,k+1}\lg(x-a)+\ldots+\varphi_{m,k+1}\lg^{m-1}(x-a)\right)$$

$$\varphi_{2,k+1}(a)=\varphi_{3,k+1}(a)=\ldots\ldots\ldots\ldots=\varphi_{m,k+1}(a)=0,$$

то правило п. 17, $b$ допускаетъ исключеніе; въ такомъ случаѣ вмѣсто $y_{k+1}$ возьмемъ интегралъ $Cy_{k+1}+y_1$ и распорядимся произвольнымъ постояннымъ $C$ такъ, чтобы $C\varphi_{1,k+1}(a)+\varphi_{1,1}(a)$ было нулемъ; интегралъ $y^0_{k+1}=Cy_{k+1}+y_1$ будетъ принадлежать показателю $r^0_{k+1}$, который, по крайней мѣрѣ, на единицу больше $r_{k+1}$; исключительный случай будетъ устраненъ и интегралъ $z_k$ будетъ принадлежать показателю $r^0_{k+1}-r_1$. Такимъ же путемъ мы убѣдимся, что при надлежащемъ выборѣ системы независимыхъ интеграловъ интегралъ уравненія (II′) $u_k$ будетъ принадлежать показателю $r_{k+2}-r_2-1$, и т. д. Вообще интегралы $y_1$, $z_1$, $u_1,\ldots t_1$, $w_1$ будутъ принадлежать соотвѣтственно показателямъ

$$r_1,\ r_2-r_1-1,\ r_3-r_2-1,\ldots r_n-r_{n-1}-1.$$

Опредѣлитель $\Delta$ будетъ такимъ образомъ принадлежать показателю $\delta$, равному

$$\delta=nr_1+(n-1)(r_2-r_1-1)+(n-2)(r_3-r_2-1)+\ldots$$
$$\ldots+2(r_{n-1}-r_{n-2}-1)+r_n-r_{n-1}-1=$$
$$=r_1+r_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+r_n-\frac{n(n-1)}{1.2}.$$

Показатель $\delta_k$, которому принадлежитъ $\Delta_k$, опредѣлится легко, если мы замѣтимъ, что разность показателей, которымъ принадлежатъ $y^{(n)}$ и $y^{(n-k)}$, не можетъ быть менѣе $-k$ (п. 17, $b$). Поэтому

$$\delta_k=r_1+r_2+\ldots+r_n-\frac{n(n-1)}{1.2}-k+k',\qquad 0\leq k'\lesseqgtr k.$$

Изъ выраженій $\delta$ и $\delta_k$ слѣдуетъ, что

$$\varkappa=-k+k'$$

и что

$$p_k = (x-a)^{-k+k'} Q_k(x-a) = \frac{P_k(x-a)}{(x-a)^k},$$

гдѣ $Q_k(x-a)$ разлагается по цѣлымъ и положительнымъ степенямъ $x-a$ и при $x=a$ обращается въ конечное число.

Такимъ образомъ первая часть теоремы доказана.

Положимъ теперь, что уравненіе (I) имѣетъ видъ, указанный условіями теоремы

$$(R) \quad y^{(n)} + \frac{P_1(x-a)}{x-a} y^{(n-1)} + \frac{P_2(x-a)}{(x-a)^2} y^{(n-2)} + \ldots + \frac{P_n(x-a)}{(x-a)^n} y = 0.$$

Составимъ его опредѣляющее уравненіе относительно точки $a$ (п. 18)

$$(2) \qquad (\rho)_n + P_1(0)(\rho)_{n-1} + \ldots + P_n(0) = 0.$$

Мы докажемъ, что уравненіе $(R)$ имѣетъ $n$ независимыхъ интеграловъ $y_1, y_2, \ldots y_n$ правильныхъ, вида (IX), принадлежащихъ корнямъ уравненія (2).

Возьмемъ корень $\rho$ опредѣляющаго уравненія (2); если это уравненіе имѣетъ всѣ корни различные, то корень $\rho$ — какой угодно изъ его корней; если же между корнями уравненія (2) есть равные, или такіе, что разность ихъ есть число цѣлое, то за корень $\rho$ возьмемъ тотъ, который имѣетъ наибольшую дѣйствительную часть изъ числа корней одной съ ними группы (п. 18, 2).

Подставимъ въ уравненіе $(R)$ $y = (x-a)^\rho z$. Уравненіе обратится (п. 18) въ

$$(3) \qquad z^{(n)} + \frac{Q_1}{x-a} z^{(n-1)} + \frac{Q_2}{(x-a)^2} z^{(n-2)} + \ldots + \frac{Q_n^0}{(x-a)^{n-1}} z = 0.$$

Если этому уравненію удовлетворитъ рядъ

$$(4) \quad \varphi = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_m(x-a)^m + \ldots,$$

то уравненію $(R)$ удовлетворитъ $(x-a)^\rho \varphi$.

Докажемъ, что уравненіе (3) дѣйствительно имѣетъ интегралъ вида (4). Положимъ

$$\frac{Q_k(x-a) - Q_k(0)}{x-a} = q_k, \quad Q_n^0 = q_n, \qquad k = 1, 2 \ldots n-1,$$

и представимъ уравненіе (3) слѣдующимъ образомъ

$$(5)\quad (x-a)^{n-1}z^{(n)}+(x-a)^{n-2}z^{(n-1)}Q_1(0)+\ldots+Q_{n-1}(0)z'+$$
$$+(x-a)^{n-1}q_1z^{(n-1)}+(x-a)^{n-2}q_2z^{(n-2)}+\ldots\ldots+q_nz=0.$$

Подставляя (4) въ уравненіе (5) и сравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ $(x-a)$, получимъ

$$(6)\quad \{(k+1)_n+Q_1(0)(k+1)_{n-1}+\ldots+Q_{n-1}(0)(k+1)_1\}a_{k+1}=$$
$$=\alpha_0a_0+\alpha_1a_1+\ldots\ldots+\alpha_ka_k,\qquad k=0,1,2,\ldots,$$

гдѣ $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_k$ нѣкоторыя конечныя числа.

На основаніи замѣчанія 2 п. 18 коэффиціентъ при $a_{k+1}$ не нуль; поэтому по формуламъ (6) возможно опредѣлить всѣ числа $a_{k+1}$ черезъ $a_0$. Остается показать, что рядъ (4), гдѣ коэффиціенты опредѣлены по формуламъ (6), для значеній $x$, достаточно близкихъ къ $a$, сходящійся.

При доказательствѣ теоремы употребимъ пріемъ, аналогичный тому, которымъ мы воспользовались при доказательствѣ существованія интеграла уравненія (I) вообще (п. 2).

Пусть $R$ есть наименьшій изъ радіусовъ сходимости разложеніи функціи $q_1, q_2, \ldots q_n$ въ ряды по степенямъ $x-a$; пусть $M_1, M_2, \ldots M_n$ будутъ наибольшія значенія, которыя получаютъ $q_1, q_2, \ldots q_n$ внутри и на окружности этого радіуса, описанной изъ точки $a$. Пусть $C_1, C_2, \ldots C_{n-1}$ — нѣкоторыя положительныя числа.

Составимъ новое дифференціальное уравненіе

$$(7)\quad C_1(x-a)^{n-2}u^{(n-1)}+C_2(x-a)^{n-3}u^{(n-2)}+\ldots+C_{n-1}u'=$$
$$=\frac{M_1(x-a)^{n-1}}{1-\frac{x-a}{R}}u^{(n-1)}+\frac{M_2(x-a)^{n-2}}{1-\frac{x-a}{R}}u^{(n-2)}+\ldots\ldots+\frac{M_n}{1-\frac{x-a}{R}}u.$$

Уравненіе (7) можетъ быть удовлетворено рядомъ

$$(8)\quad u=b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+\ldots+b_m(x-a)^m+\ldots\quad (b_0 \text{ не нуль}),$$

сходящимся въ предѣлахъ сходимости рядовъ $q_1, q_2, \ldots q_n$, т. е. въ кругѣ радіуса $R$.

Въ самомъ дѣлѣ, умноживъ уравненіе (8) на $1-\frac{x-a}{R}$ и подставивъ вмѣсто $u$ рядъ (8), мы найдемъ

$$(9)\quad \left\{C_1(k+1)_{n-1}+C_2(k+1)_{n-2}+\ldots+C_{n-1}(k+1)_1\right\}b_{k+1}=$$

$$=\left\{(k)_{n-1}\left(\frac{C_1}{R}+M_1\right)+(k)_{n-2}\left(\frac{C_2}{R}+M_2\right)+\ldots+M_n\right\}b_k.$$

Предѣлъ

$$\lim\left\{\frac{b_{k+1}}{b_k}\right\}_{k=\infty}=\frac{1}{C_1}\left(\frac{C_1}{R}+M_1\right).$$

Поэтому, если

$$\operatorname{mod}(x-a)<\frac{C_1 R}{C_1+RM_1},$$

то рядъ (8) сходящійся и функція $u=\sum_0^\infty b_m(x-a)^m$ удовлетворитъ уравненію (7). Произвольной постоянной $C_1$ можно всегда распорядиться такъ, чтобы $\frac{C_1 R}{C_1+RM_1}$ было столь близко къ $R$, сколько угодно.

Между коэффиціентами $b_k$, опредѣляемыми уравненіями (10), можно установить и другія зависимости: разложимъ $\frac{1}{1-\frac{x-a}{R}}$ по степенямъ $(x-a)$ и затѣмъ подставимъ въ уравненіе (7) вмѣсто $u$ рядъ (8); сравнивая коэффиціентъ при одинаковыхъ степеняхъ $x-a$, найдемъ

$$(10)\quad \left\{C_1(k+1)_{n-1}+C_2(k+1)_{n-2}+\ldots+C_{n-1}(k+1)_1\right\}b_{k+1}=\beta_0 b_0+\beta_1 b_1+\ldots+\beta_k b_k.$$

Всѣ $b_k$ могутъ быть опредѣлены черезъ $b_0$, которое остается произвольнымъ. Пусть $b_0$—положительно; всѣ $b_1, b_2,\ldots b_k,\ldots$ будутъ тоже положительны. Числа $\beta_0, \beta_1,\ldots \beta_k\ldots$ также составлены съ помощью значеній $\frac{M_k}{1-\frac{x-a}{R}}$ и производныхъ ихъ при $x=a$, какъ $\alpha_0, \alpha_1,\ldots \alpha_k\ldots$ въ ф. (6) съ помощью величинъ $q_k$ и производныхъ ихъ при $x=a$. На основаніи извѣстныхъ неравенствъ Бріо и Буке

$$\beta_m>\operatorname{mod}\alpha_m.$$

Коэффиціентъ при $a_{k+1}$ (6) есть полиномъ степени $n$ относительно числа $k$, а коэффиціентъ при $b_{k+1}$ (19) есть полиномъ степени $n-1$ относительно $k$; поэтому, при достаточно большомъ $k \geq \mu$, первый коэффиціентъ будетъ больше втораго; вмѣстѣ съ тѣмъ, если mod $a_k$ будетъ меньше $b_k$ при значеніяхъ $k$ отъ 0 до $\mu$, то и подавно mod $a_k$, при $k > \mu$, будетъ меньше $b_k$.

Всегда можно такъ распорядиться произвольной постоянной $a_0$, чтобы mod $a_k$ было меньше $b_k$, при $k < \mu$.

Пусть $a_k = \gamma_k a_0$, $b_k = \delta_k b_0$, гдѣ $\gamma_k$ и $\delta_k$ не зависятъ соотвѣтственно отъ величинъ $a_k$ и $b_k$; пусть $\gamma$ есть maximum всѣхъ mod $\gamma_k$, при $k = 1, 2, \ldots \mu$, а $\delta$ — minimum mod $\beta_k$ при тѣхъ же предѣлахъ; выберемъ $a_0$ такъ, чтобы удовлетворилось неравенство

$$\delta b_0 > \gamma \operatorname{mod} a_0.$$

Въ такомъ случаѣ, очевидно, всѣ $b_k$ будутъ больше $a_k$ при $k = 1, 2, \ldots \mu$, а слѣдовательно, на основаніи предъидущаго замѣчанія, и при всѣхъ значеніяхъ $k$.

Такимъ образомъ модули коэффиціентовъ въ ряду (4) меньше коэффиціентовъ при соотвѣтственныхъ степеняхъ $x - a$ нѣкотораго другаго ряда, сходящагося въ кругѣ радіуса $R$. Изъ этого мы заключаемъ, что уравненіе (3) дѣйствительно имѣетъ интегралъ вида (4) и что уравненіе ($R$) имѣетъ правильный интегралъ

$$y = (x-a)^{\rho} \varphi(x-a). \tag{11}$$

Если всѣ корни опредѣляющаго уравненія для уравненія ($R$) различны и разности между ними не суть цѣлыя числа, то подъ $\rho$ мы можемъ разумѣть любой изъ корней опредѣляющаго уравненія и уравненіе ($R$) въ этомъ случаѣ имѣетъ $n$ независимыхъ правильныхъ интеграловъ, имѣющихъ въ области точки $a$ видъ

$$y_k = (x-a)^{\rho_k} \varphi_k(x-a) \qquad k = 1, 2, \ldots n, \tag{12}$$

гдѣ $\rho_k$ есть корень его опредѣляющаго уравненія, а функція $\varphi_k$ — рядъ, расположенный по цѣлымъ и положительнымъ степенямъ $x-a$, причемъ $\varphi_k$ при $x = a$ не нуль.

Если же опредѣляющее уравненіе для уравненія ($R$) имѣетъ одну или нѣсколько группъ корней, разности между которыми—числа цѣлыя (п. 18, 2) то предъидущее доказательство относится только къ тому корню $\rho$ каждой группы, который имѣетъ наибольшую дѣйствительную часть. Чтобы въ этомъ случаѣ образовать систему $n$ правильныхъ независимыхъ интеграловъ и показать, что они будутъ принадлежать корнямъ опредѣляющаго уравненія, поступаемъ слѣдующимъ образомъ: пусть $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_m$ будутъ всѣ корни одной изъ упомянутыхъ группъ, расположенные въ порядкѣ убыванія ихъ дѣйствительныхъ частей. Возьмемъ интегралъ вида (11)

$$y_1 = (x-a)^{\rho_1}\varphi(x-a)$$

и преобразуемъ уравненіе ($R$) подстановкой

$$y = y_1 \int z\,dx.$$

Опредѣляющее уравненіе преобразованнаго уравненія (II) п. 6 будетъ имѣть группу корней съ разностями, равными цѣлымъ числамъ; корень съ наибольшей дѣйствительною частью будетъ $\rho_2 - \rho_1 - 1$. По доказанному, это преобразованное уравненіе будетъ имѣть въ области точки $a$ интегралъ вида

$$z_1 = (x-a)^{\rho_2-\rho_1-1}\psi$$

гдѣ $\psi$ функція, разлагающаяся въ рядъ по цѣлымъ степенямъ $x-a$.

Такимъ же образомъ, преобразовавъ уравненіе (II) подстановкой

$$z = z_1 \int u\,dx$$

мы убѣдимся, что новое уравненіе (II′) будетъ имѣть интегралъ $u_1$ того же вида, принадлежащій показателю $\rho_3-\rho_2-1$, и т. д., до линейнаго уравненія перваго порядка, который будетъ имѣть интегралъ, принадлежащій показателю $r_m - r_{m-1} - 1$.

Отсюда легко уже составить искомую систему: интегралы

$$y_1, y_2 = y_1\int z_1\,dx, y_3 = y_1\int z_1\,dx\int u_1\,dx, \ldots y_m = y_1\int z_1\,dx\int\ldots\int w_1\,dx$$

будутъ, очевидно, правильнаго вида, будутъ принадлежать, на основаніи п. 17, $b$, показателямъ $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_m$ и составятъ независимую систему.

Теорема, такимъ образомъ, доказана вполнѣ. Изъ нея сейчасъ же вытекаетъ слѣдствіе: если уравненіе (I) имѣетъ видъ ($R$), то корни основнаго уравненія относительно точки $a$ отличаются отъ корней опредѣляющаго уравненія только на цѣлыя числа.

20. Въ слѣдующихъ главахъ мы остановимся на нѣкоторыхъ приложеніяхъ теоремы о видѣ линейныхъ уравненій съ правильными интегралами. Здѣсь мы ограничимся замѣчаніемъ о высшемъ предѣлѣ числа правильныхъ интеграловъ уравненія (I) въ томъ случаѣ, когда оно не имѣетъ вида ($R$), и когда, вмѣстѣ съ тѣмъ, всѣ конечныя особенныя точки коэффиціентовъ $p_k$—полюсы, и число ихъ конечное. На основаніи указанныхъ ограниченій уравненіе (I) должно имѣть видъ

$$(1)\quad y^{(n)}+\frac{P_1}{(x-a)^{m_1}(x-b)^{n_1}\ldots(x-l)^{s_1}}y^{(n-1)}+\frac{P_2}{(x-a)^{m_2}(x-b)^{n_1}\ldots(x-l)^{s_2}}y^{(n-2)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{P_n}{(x-a)^{m_n}\ldots(x-l)^{s_n}}y=0,$$

гдѣ функціи $P_1, P_2, \ldots P_n$ въ области каждой особенной точки $a$ разлагаются въ ряды по цѣлымъ и положительнымъ степенямъ $x—a$.

Умножая числителя и знаменателя коэффиціента при $y^{(n-k)}$ на $(x-a)^{n-k}$ $(k=0,1,2,\ldots n)$ и обозначая затѣмъ общаго знаменателя для всѣхъ коэффиціентовъ черезъ $(x-a)^n Q_0$, мы можемъ уравненіе (I) представить въ видѣ

$$(N)\qquad (x-a)^n Q_0 y^{(n)}+(x-a)^{n-1} Q_1 y^{(n-1)}+\ldots+Q_n y=0$$

гдѣ всѣ $Q_k$ разлагаются по цѣлымъ и положительнымъ степенямъ $x-a$ и не всѣ $Q_k(0)$ равны нулю.

Видъ ($N$) уравненія (1) будемъ называть нормальнымъ въ области точки $x=a$.

Въ дальнѣйшемъ, для простоты, будемъ считать $a=0$, что соотвѣтствуетъ лишь простому преобразованію уравненія ($N$) подстановкой $z=x-a$.

Подставимъ въ уравненіе ($N$) $y=x^\rho$; получимъ функцію

$$(2)\qquad f(x,\rho)=x^\rho\left(Q_0(\rho)_n+Q_1(\rho)_{n-1}+Q_2(\rho)_{n-2}+\ldots+Q_n\right),$$

которую назовемъ характеристическою для уравненія ($N$) въ области точки $a$; названіе это, между прочимъ, оправдывается и тѣмъ, что по заданной функціи $f(x, \rho)x^{-\rho}$ можно сейчасъ же составить и уравненіе ($N$), замѣчая, что

$$Q_k = \left(\frac{\Delta^k (f(x, \rho)x^{-\rho})}{1.2\ldots k}\right)_{\rho=0}.$$

Если $Q_0(0)$ не нуль, то свободный отъ $x$ членъ функціи $f(x, \rho)x^{-\rho}$; приравненный нулю, даетъ опредѣляющее уравненіе (1); вмѣстѣ съ тѣмъ уравненіе (1) имѣло бы въ области точки $a$ всѣ интегралы правильные; поэтому, если (1) имѣетъ въ области $a$ неправильные интегралы, то $Q_0(0)$ — нуль, и степень относительно $\rho$ уравненія, получаемаго приравниваніемъ нулю коэффиціента въ $f(x, \rho)x^{-\rho}$, свободнаго отъ $x$, будетъ ниже $n$. Назовемъ свободный отъ $x$ членъ въ $f(x, \rho)x^{-\rho}$ опредѣляющею функціей. Мы покажемъ, что *число правильныхъ интеграловъ уравненія* ($N$) *въ области* $a$ *всегда не болѣе степени опредѣляющей функціи относительно* $\rho$.

Введемъ понятіе о символическомъ разложеніи дифференціальныхъ линейныхъ уравненій на множители.

Обозначимъ лѣвую часть нѣкотораго линейнаго дифференціальнаго уравненія

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$$

черезъ $A(y)$. Произведемъ надъ выраженіемъ $A(y)$ дѣйствія, указанныя операціей

$$\left(y\frac{d^m}{dx^m} + b_1\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \ldots + b_{n-1}\frac{d}{dx} + b_n\right) A$$

и обозначимъ результатъ черезъ

$$BA$$

Въ такомъ случаѣ, если намъ будутъ даны два выраженія $P(y)$ и $Q(y)$, причемъ порядокъ $Q(y)$ ниже порядка $P(y)$, то выраженіе $P(y)$, или просто $P$, можетъ быть представлено слѣдующимъ образомъ

$$P = MQ + R, \tag{3}$$

гдѣ $M$ и $R$ суть подобныя $P$ выраженія, причемъ порядокъ $M$ равенъ разности порядковъ $P$ и $Q$, а порядокъ $R$, по крайней мѣрѣ, на единицу ниже порядка $Q$. Такимъ же образомъ $Q$ можетъ быть представлено въ видѣ

$$Q = NR + R_1,$$

гдѣ порядокъ $R_1$ меньше порядка $R$,

$$R = SR_1 + R_2 \quad \text{и т. д.}$$

Если $P=0$ удовлетворяютъ всѣ интегралы $Q=0$, то $R$ тождественно нуль; въ самомъ дѣлѣ, пусть $y_1, y_2, \ldots y_m$ линейно независимые интегралы уравненія $Q=0$. Подставляя $y_1, y_2, \ldots y_m$ въ выраженіе (3), мы убѣдимся, что они удовлетворяютъ уравненію $R=0$, порядокъ котораго меньше $m$; но линейное уравненіе порядка меньшаго $m$ не можетъ имѣть $m$ независимыхъ интеграловъ; поэтому $R$ должно быть тождественно равно нулю.

Такимъ образомъ указанныя выше дѣйствія имѣютъ полную аналогію съ нахожденіемъ общаго наибольшаго дѣлителя двухъ многочленовъ.

Замѣтимъ теперь, что если въ выраженіи

$$P = MQ.$$

$M$ и $Q$ приведены къ нормальному виду, то и $P$ будетъ имѣть нормальный видъ. Обозначимъ черезъ

$$M(x^\rho) = \varphi(x, \rho) = x^\rho \sum_0^\infty M_\mu(\rho) x^\mu = \sum_0^\infty M_\mu(\rho) x^{\rho+\mu}$$

$$Q(x^\rho) = \psi(x, \rho) = x^\rho \sum_0^\infty Q_\nu(\rho) x^\nu = \sum_0^\infty Q_\nu(\rho) x^{\rho+\nu}$$

$$P(x^\rho) = f(x, \rho) = x^\rho \sum_0^\infty P_\sigma(\rho) x^\sigma = \sum_0^\infty P_\sigma(\rho) x^{\sigma+\rho}$$

$$MQ(x^\rho) = M \sum_0^\infty Q_\nu(\rho) x^{\rho+\nu} = \sum_0^\infty Q_\nu(\rho) M(x^{\rho+\nu}) =$$

$$= \sum_0^\infty \sum_0^\infty Q_\nu(\rho) M_\mu(\rho+\nu) x^{\mu+\nu}.$$

Поэтому

$$P(x^\rho)=\sum_0^\infty\sum_0^\infty Q_\nu(\rho)\,M_\mu(\rho+\nu)\,x^{\mu+\nu}. \tag{4}$$

Отсюда слѣдуетъ, между прочимъ, что

$$P_0(\rho)=Q_0(\rho)\,M_0(\rho), \tag{5}$$

т. е. если $P$ есть произведеніе $M$ и $Q$, то опредѣляющая функція $P$ есть произведеніе опредѣляющихъ функцій $M$ и $Q$.

Этихъ замѣчаній достаточно, чтобы убѣдиться въ справедливости нашего положенія о числѣ правильныхъ интеграловъ $(H)$.

Пусть уравненіе $(N)$ $P(y)=0$ имѣетъ правильный интегралъ въ области точки $x=0$; этотъ интегралъ имѣетъ видъ

$$y=x^r\psi(x). \tag{6}$$

Дифференцируя по $x$, найдемъ, что

$$y'=rx^{r-1}\psi(x)+y^r\psi'(x)=\left(\frac{r}{x}+\frac{\psi'}{\psi}\right)y.$$

Обозначая черезъ $R(y)$ или просто $R$ выраженіе

$$R=y'-\left(\frac{r}{x}+\frac{\psi'}{\psi}\right)y,$$

найдемъ, что

$$P=AR.$$

Если $P$ имѣетъ второй правильный интегралъ $u$, независящій линейно отъ $y$, то, очевидно, уравненіе

$$A(y)=0$$

имѣетъ интегралъ $R(u)$. Если $u$ — выраженіе правильное, то $R(u)$ будетъ тоже правильное выраженіе, и поэтому оказываетя, что уравненіе $A(y)=0$ имѣетъ правильный интегралъ.

Въ такомъ случаѣ $A=BR'$, гдѣ $R'=0$ есть уравненіе перваго порядка, имѣющее правильный интегралъ $R(u)$. Разсуждая дальше такимъ же образомъ, мы убѣдимся, что $P$ можетъ быть представлено въ видѣ

$$(7) \qquad P = M\, R^{(m-1)} R^{(m-2)} \ldots R' R,$$

гдѣ уравненіе $M(y) = 0$ уже не имѣетъ правильныхъ интеграловъ, а уравненіе

$$Q(y) = R^{(m-1)} R^{(m-2)} \ldots R' R(y) = 0$$

имѣетъ только правильные интегралы.

Если уравненіе $Q(y) = 0$ порядка $m$ имѣетъ всѣ интегралы правильные, то его опредѣляющая функція будетъ степени $m$ относительно $\rho$. Прилагая формулу (5) къ формулѣ (7), мы убѣждаемся, что число правильныхъ интеграловъ уравненія $P$ дѣйствительно не выше степени его опредѣляющей функціи.

Формулы (5) и (7) вмѣстѣ съ тѣмъ показываютъ, что показателей, которымъ принадлежатъ правильные интегралы уравненія $P(y) = 0$, надо искать между корнями уравненія, получаемаго отъ приравниванія нулю опредѣляющей функціи этого уравненія.

Въ томъ случаѣ, когда въ уравненіи (1) $P_1, P_2, \ldots P_n$ полиномы; можно опредѣлить коэффиціенты уравненія $Q(y) = 0$, зная конечное число членовъ въ разложеніяхъ интеграловъ уравненія (1) въ областяхъ особенныхъ точекъ.

21. Въ п. 1 мы замѣтили, что *разсмотрѣніе линейныхъ дифференціальныхъ уравненій неоднородныхъ, съ послѣднимъ членомъ, можетъ быть приведено къ разсмотрѣнію уравненій однородныхъ, вида* (I), *порядкомъ на единицу выше.*

Въ этомъ весьма легко убѣдиться. Пусть дано уравненіе

$$(1) \qquad Y = y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \ldots + P_n y = P_{n+1},$$

гдѣ всѣ функціи $P_1, P_2, \ldots P_n, P_{n+1}$ зависятъ только отъ $x$.

Продифференцировавъ по $x$, получимъ

$$(2) \quad Y' = y^{(n+1)} + P_1 y^{(n)} + (P_1' + P_2) y^{(n-1)} + \ldots + P_n' y = P'_{n+1}.$$

Умножая (1) на $P'_{n+1}$, а (2) на $-P_{n+1}$ и складывая, найдемъ

$$(3) \qquad Y P'_{n+1} - Y' P_{n+1} = 0$$

$$(4) \quad y^{(n+1)}+\left(P_1-\frac{P'_{n+1}}{P_{n+1}}\right)y^{(n)}+\left(P_1'+P_2-P_1\frac{P'_{n+1}}{P_{n+1}}\right)y^{(n-1)}+\ldots$$
$$\ldots+\left(P_n'-P_n\frac{P'_{n+1}}{P_{n+1}}\right)y=0.$$

Уравненіе (3) имѣетъ интегралъ

$$(5) \qquad Y=CP_{n+1}.$$

Это показываетъ, что каждый интегралъ уравненія (4) обращаетъ лѣвую часть уравненія (1) въ $CP_{n+1}$.

Если постоянное $C$ для нѣкотораго интеграла $y$ уравненія (4) равно нулю, то этотъ интегралъ, вмѣстѣ съ тѣмъ, есть интегралъ уравненія

$$Y=y^{(n)}+P_1\,y^{(n-1)}+\ldots+P_n\,y=0.$$

Если же $C$ для интеграла $u$ уравненія (4) не нуль, то, очевидно, $\frac{u}{C}$ будетъ интеграломъ уравненія (1).

Кромѣ того, очевидно, каждый интегралъ уравненія (1) будетъ интеграломъ уравненія (4).

Такимъ образомъ, дѣйствительно, разсмотрѣніе интеграловъ уравненія (1) можетъ быть приведено къ разсмотрѣнію уравненія однороднаго, порядокъ котораго на единицу выше.

# ГЛАВА II.

1. Въ настоящей главѣ мы займемся нѣкоторыми частными вопросами, относящимися къ линейнымъ уравненіямъ съ правильными интегралами. Общій видъ такихъ уравненій въ области особенной точки $a$, по доказанному, будетъ

$$(R)\quad y^{(n)}+\frac{P_1}{x-a}y^{(n-1)}+\ldots+\frac{P_k}{(x-a)^k}y^{(n-k)}+\ldots+\frac{P_n}{(x-a)^n}y=0,$$

причемъ всѣ функціи $P_1, P_2, \ldots P_n$ могутъ быть разложены въ области точки $a$ въ ряды по цѣлымъ и положительнымъ степенямъ $x-a$.

Если подъ $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_k, \ldots \rho_n$ разумѣть корни уравненія

$$f(\rho)=(\rho)_n+P_1(0)(\rho)_{n-1}+\ldots+P_k(0)(\rho)_{n-k}+\ldots+P_n(0)=0,$$

то уравненіе $(R)$ будетъ имѣть въ указанной области систему независимыхъ интеграловъ $y_1, y_2, \ldots y_k, \ldots y_n$, вида

$$(1)\quad y_k=(x-a)^{\rho_k}\left(\varphi_0+\varphi_1\lg(x-a)+\ldots+\varphi_m\lg^m(x-a)\right),\quad k=1, 2, \ldots n,$$

гдѣ всѣ функціи $\varphi$—голоморфны въ области $a$, и притомъ для $x-a$ не всѣ равны нулю; $m$ — число цѣлое и положительное, меньшее $n$-порядка уравненія $(R)$.

Остановимся прежде всего на отысканіи условій необходимыхъ и достаточныхъ для того, чтобы система независимыхъ интеграловъ $y_1, y_2, \ldots y_n$ не заключала въ выраженіяхъ (1) логариѳмовъ.

Въ предъидущей главѣ (п. 19) было доказано, что если всѣ корни $\rho$ уравненія $f(\rho)=0$ различны и таковы, что разность какихъ угодно двухъ корней $\rho_k - \rho_{k'}$ не есть число цѣлое, то каждый интегралъ въ системѣ $y_1, y_2, \ldots y_n$ можетъ быть представленъ въ видѣ

$$y_k = (x-a)^{\rho_k} \varphi_k(x-a),$$

гдѣ $\varphi_k(x-a)$ есть голоморфная функція отъ $x-a$.

Съ другой стороны, *если уравненіе $f(\rho)=0$ имѣетъ корни равные, то логариѳмы непремѣнно войдутъ въ выраженія системы независимыхъ интеграловъ $y_1, y_2, \ldots y_n$.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $\rho_1 = \rho_2$ будутъ два равные корня въ группѣ корней $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_k$, имѣющихъ разностями цѣлыя числа. Уравненіе $(R)$ будетъ имѣть два интеграла, принадлежащихъ показателямъ $\rho_1$ и $\rho_2$, а уравненіе, получаемое изъ $(R)$ преобразованіемъ $(A)$ $y = y_1 \int z dx$ будетъ имѣть интегралъ $z_1$, принадлежащій показателю $\rho_2 - \rho_1 - 1 = -1$; этотъ интегралъ будетъ имѣть видъ

$$z_1 = \frac{A}{x-a} + \psi(x-a),$$

гдѣ $\psi$—функція голоморфная, а $A$ постоянное число, неравное нулю. Отсюда находимъ, что

$$y_2 = y_1 \int z_1 dx$$

будетъ имѣть видъ

$$y_2 = (x-a)^{\rho_1} \varphi_1(x-a) \left(A \lg(x-a) + \psi_1(x-a)\right),$$

гдѣ функціи $\varphi_1$ и $\psi_1$ — голоморфны.

Если $\rho_3 = \rho_2 = \rho_1$, то тѣмъ же путемъ убѣдимся сперва, что $z_2$ — интегралъ уравненія $(R)$, преобразованнаго подстановкой $(A)$, будетъ заключать логариѳмъ, а поэтому

$$y_3 = y_1 \int z_2 dx$$

будетъ заключать 2ую степень логариѳма; и т. д.

Остается разобрать только тотъ случай, когда уравненіе $f(\rho)=0$ равныхъ корней не имѣетъ, но, вмѣстѣ съ тѣмъ, имѣетъ группу корней $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_k$, разности между которыми суть цѣлыя числа.

Расположимъ эти корни въ порядкѣ убыванія ихъ дѣйствительныхъ частей; пусть этотъ порядокъ будетъ $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_k$.

Подставимъ въ уравненіе $(R)$

$$y = (x - a)^{\rho_k} z.$$

Получимъ уравненіе

$$z^{(n)} + \frac{q_1}{z-a} z^{(n-1)} + \ldots + \frac{q_n}{(z-a)^n} z = 0, \tag{2}$$

опредѣляющее уравненіе котораго будетъ, по доказанному въ п. 18, 1 гл. I, имѣть группу корней

$$\rho_1 - \rho_k, \ \rho_2 - \rho_k, \ldots \rho_{k-1} - \rho_k, \ 0.$$

Всѣ числа $\rho_j - \rho_k$ по условію цѣлыя и положительныя, неравныя между собою; кромѣ того, опредѣляющее уравненіе уравненія (2) другихъ цѣлыхъ корней уже не имѣетъ.

Обозначимъ

$$\rho_1 - \rho_k = s - 1.$$

Пусть интегралы $z_j$ уравненія (2), принадлежащіе показателямъ $\rho_j - \rho_k$, заключаютъ въ выраженіяхъ своихъ логариѳмы. Въ такомъ случаѣ общій видъ интеграловъ этой группы будетъ

$$z_j = (x-a)^{\rho_j - \rho_k} (\varphi_0 + \varphi_1 \lg (x-a) + \ldots + \varphi_l \lg^l (x-a)). \tag{3}$$

Будемъ дифференцировать выраженіе

$$F = (x - a)^m \varphi (x - a) \lg^p (x - a), \tag{4}$$

гдѣ $m$ и $p$ — числа цѣлыя, а $\varphi$ — голоморфная функція отъ $x - a$, которая для $x = a$ не обращается въ нуль.

Каждое дифференцированіе будетъ понижать на единицу показателя, которому принадлежитъ это выраженіе; $\frac{d^m F}{dx^m}$ будетъ принадлежать показателю равному нулю; а $\frac{d^{m+1} F}{dx^{m+1}}$ — показателю $= -1$. На этомъ основаніи и въ виду того, что число $m$, для двухъ по крайней мѣрѣ членовъ ф. (3), будетъ $< s$, производная порядка $s$ отъ $z_j$ будетъ принадлежать показателю отрицательному.

Обратно, если выраженіе вида (3) принадлежитъ положительному показателю $\rho_j - \rho_k$ и если производная порядка $\rho_j - \rho_k + 1 \overline{\overline{<}} s$ принадлежитъ показателю отрицательному, то не всѣ коэффиціенты при логариѳмахъ нули.

Такимъ образомъ, *условіе необходимое и достаточное, чтобы уравненіе* ($R$), *опредѣляющее уравненіе котораго относительно точки* $a$ *заключаетъ группу корней, разности между которыми — числа цѣлыя, имѣло въ выраженіяхъ интеграловъ, принадлежащихъ этой группѣ корней, логариѳмы, заключается въ томъ, чтобы производная, порядка не выше* $s$, *хотя бы отъ одного интеграла уравненія* (2), *принадлежащаго цѣлому и положительному числу, принадлежала отрицательному показателю.*

Какимъ показателямъ принадлежатъ производныя отъ интеграловъ $z_1, z_2, \ldots z_k$, можно узнать и не имѣя явныхъ выраженій самихъ интеграловъ.

Пусть въ уравненіи (2) первый изъ коэффиціентовъ $q_n, q_{n-1} \ldots$, неравный нулю, будетъ $q_{n-m}$. Положимъ

$$u = y^{(m)}.$$

Уравненіе (2) приметъ видъ

$$u^{(n-m)} + q_1 u^{(n-m-1)} + \ldots + q_{n-m} u = 0. \tag{5}$$

Интегралы уравненія (2) будутъ, очевидно,

$$C, x, x^2, \ldots x^{m-1}, z_{m+1}, \ldots z_k, z_{k+1}, \ldots z_n,$$

а уравненія (5)

$$z^{(m)}_{m+1}, \ldots z_k^{(m)}, z^{(m)}_{k+1}, \ldots z_n^{(m)}.$$

Величины $z^{(m)}_{m+1}, \ldots z_n^{(m)}$ составятъ независимую систему интеграловъ, такъ какъ соотношеніе

$$C_{m+1} z^{(m)}_{m+1} + \ldots + C_k z_k^{(m)} + \ldots + C_n z_n^{(m)} = 0$$

имѣло бы слѣдствіемъ

$$C_1 C + C_2 x + \ldots + C_m x^{m-1} + C_{m+1} z_{m+1} + \ldots + C_n z_n = 0$$

и система интеграловъ

$$C, x, x^2, \dots x^{m-1}, z_{m+1}, \dots z_k, z_{k+1}, \dots z_n$$

не была бы независимою, чего мы не предполагаемъ.

Такимъ образомъ можно утверждать, что уравненію (5) удовлетворяютъ $m$-ныя производныя отъ интеграловъ уравненія (2) и только эти производныя.

Раздѣлимъ уравненіе (5) на $q_{n-m}$ и продифференцируемъ по $x$; замѣнивъ $u'$ на $v$, мы получимъ уравненіе порядка $n - m$, которому будутъ удовлетворять $m+1$ производныя отъ интеграловъ уравненія (2) и только эти производныя. Если опредѣляющее уравненіе уравненія относительно $v$ имѣетъ хоть одинъ цѣлый отрицательный корень, то логариѳмы войдутъ въ выраженія одного или нѣсколькихъ интеграловъ $z_{m+1}, z_{m+2}, \dots z_k$. Если же опредѣляющее уравненіе имѣетъ всѣ цѣлые корни—положительные, то, раздѣливъ все уравненіе на коэффиціентъ при $v$, еще разъ продифференцируемъ по $x$; замѣнивъ въ полученномъ результатѣ $v'$ на $w$, мы получимъ уравненіе порядка $n - m$, имѣющаго интегралами производныя $m+2$ порядка отъ интеграловъ уравненія (2); если опредѣляющее уравненіе и для этого уравненія не имѣетъ отрицательныхъ корней, то мы опять повторяемъ ту же операцію, и такъ до тѣхъ поръ, пока не найдемъ уравненія, которому удовлетворяютъ производныя порядка $s$ уравненія (2). Если и для этого уравненія опредѣляющее уравненіе не будетъ имѣть цѣлыхъ отрицательныхъ корней, то интегралы $z_{m+1}, \dots z_k$ дѣйствительно не содержатъ въ выраженіяхъ своихъ логариѳмовъ. Наоборотъ, если эти интегралы содержатъ логариѳмы, то хоть для послѣдняго уравненія опредѣляющее уравненіе будетъ имѣть отрицательные корни. Такимъ образомъ вопросъ о присутствіи логариѳмовъ въ интегралахъ уравненія ($R$), въ наиболѣе сложномъ случаѣ, когда опредѣляющее уравненіе группу корней, разности которыхъ числа цѣлыя, приводится къ нѣсколькимъ дифференцированіямъ и разсмотрѣнію, имѣютъ ли нѣкоторыя алгебраическія уравненія цѣлыя отрицательныя корни.

2. Полученнымъ результатомъ можно воспользоваться при рѣшеніи вопроса, будетъ ли нѣкоторая особенная точка уравненія особенною точкою для интеграловъ уравненія, или она будетъ особенною только по виду (п. 7, гл. I). Если особенная точка $a$ уравненія есть

обыкновенная точка интеграловъ уравненія (I), то очевидно, что интегралы въ области ея всѣ будутъ правильны, будутъ принадлежать цѣлымъ и положительнымъ числамъ и будутъ однозначны — слѣдовательно не будутъ заключать и логариѳмовъ. Наоборотъ, если интегралы въ области нѣкоторой точки $a$ правильны, принадлежатъ положительнымъ и цѣлымъ показателямъ и не содержатъ логариѳмовъ, то точка $a$ будетъ особенною только по виду.

Въ виду этого, чтобы *точка $a$, особенная для уравненія* (I), *была особенною только по виду, необходимо и достаточно*:

1) *чтобы уравненіе* (I) *имѣло въ области ея видъ* ($R$).

2) *чтобы опредѣляющее уравненіе* $f(\rho)=0$ *имѣло только цѣлые и положительные корни и*

3) *чтобы опредѣляющее уравненіе того уравненія, которому удовлетворяютъ производныя отъ интеграловъ уравненія* (2, п. 1) — *преобразованія* ($R$) — *порядка, на единицу высшаго противъ разности наибольшаго и наименьшаго корней уравненія* $f(\rho)$, *имѣло бы всѣ корни положительные.*

3. Сдѣлаемъ теперь одно замѣчаніе о видѣ уравненія ($R$) въ томъ случаѣ, когда число особенныхъ точекъ конечно, и интегралы уравненія правильны въ области всѣхъ особенныхъ точекъ уравненія.

Пусть $a_1, a_2, \ldots a_m$ будутъ всѣ конечныя особенныя точки уравненія ($R$).

Предъидущіе соображенія прямо указываютъ, что уравненіе ($R$) должно имѣть видъ

$$(R') \qquad y^{(n)}+\frac{P_1}{\psi(x)}y^{(n-1)}+\frac{P_2}{\psi_2(x)}y^{(n-2)}+\ldots+\frac{P_n}{\psi^n(x)}y=0$$

гдѣ $\psi=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m)$, а функціи $P_1, P_2, \ldots P_n$ будутъ голоморфны въ области каждой изъ точекъ $a_1, a_2, \ldots a_m$.

Остается посмотрѣть, какимъ условіямъ должны удовлетворить функціи $P_1, P_2, \ldots P_n$, чтобы интегралы уравненія ($R'$) были правильны и въ области безконечно удаленной точки, или, что равносильно, чтобы интегралы уравненія, получаемаго изъ ($R'$) подстановкой

$$x=\frac{1}{t}$$

были правильны въ области точки $t=0$.

По формуламъ (IV) гл. I уравненіе ($R'$) послѣ указанной подстановки обратится въ

$$(R'')\qquad y^{(n)}+r_1 y^{(n-1)}+\ldots+r_k y^{(n-k)}+\ldots+r_n y=0,$$

гдѣ

$$r_k=\frac{(-1)^{n-k}}{t^{2k}}\left\{\frac{P_k\left(\frac{1}{t}\right)}{\psi^k\left(\frac{1}{t}\right)}-\frac{n-k+1}{1}(n-k)\,t\frac{P_{k-1}\left(\frac{1}{t}\right)}{\psi^{k-1}\left(\frac{1}{t}\right)}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+(-1)^k\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k}(n-1)\ldots(n-k)\,t^k\right\}.$$

На основаніи теоремы о видѣ уравненія въ области особенной точки, когда всѣ интегралы его правильны, необходимо и достаточно, чтобы $r_k$ имѣло видъ

$$r_k=\frac{Q_k}{t^k},\qquad k=1,2,\ldots n,$$

гдѣ $Q_k$ отрицательныхъ степеней $t$ не должно содержать.

Прилагая это требованіе послѣдовательно къ $r_1, r_2, \ldots r_k$, мы убѣдимся, что оно равносильно условію

$$\lim\left(\frac{P_k\left(\frac{1}{t}\right)}{\psi^k\left(\frac{1}{t}\right)t^k}\right)_{t=0}=\text{числу конечному *)},$$

что въ свою очередь равносильно условію

$$\lim\left\{\frac{x^k P_k(x)}{\psi^k(x)}\right\}_{x=\infty}=\text{числу конечному}.$$

Изъ всего этого слѣдуетъ, что въ томъ случаѣ, когда число особенныхъ точекъ уравненія ($R$) конечно, и всѣ интегралы правильны, функціи $P_1, P_2, \ldots P_n$ должны удовлетворить слѣдующимъ условіямъ:

*a*) онѣ голоморфны въ области всякой конечной точки;

*b*) для безконечно далекой точки обращаются въ безконечность порядка не выше соотвѣтственно

$$m-1,\ 2(m-1),\ \ldots\ k(m-1),\ \ldots\ n(m-1).$$

---

*) Въ томъ числѣ и нулю.

Изъ этого слѣдуетъ, что функціи $P_1, P_2, \ldots P_k, \ldots P_n$ суть полиномы степеней не выше указанныхъ чиселъ.

Между корнями опредѣляющихъ уравненій относительно всѣхъ особенныхъ точекъ существуетъ, въ разсматриваемомъ случаѣ, нѣкоторая зависимость.

Въ самомъ дѣлѣ: составимъ опредѣляющее уравненіе для уравненія $(R')$ относительно точки $a_k$; оно будетъ

$$(\rho)_n + \frac{P_1(a_k)}{\psi'(a_k)}(\rho)_{n-1} + \ldots + \frac{P_m(a_k)}{(\psi'(a_k))^m}(\rho)_{n-m} + \ldots + \frac{P_n(a_k)}{(\psi'(a_k))^n} = 0.$$

Сумма корней $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$ этого уравненія равна

$$S_k = \sum_1^n \rho_m = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{P_1(a_k)}{\psi'(a_k)}.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{k=m} S_k = m\frac{n(n-1)}{1.2} - \sum_{k=1}^{k=m} \frac{P_1(a_k)}{\psi'(a_k)}.$$

$P_1(x)$ есть полиномъ степени не выше $m-1$; пусть

$$P_1(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$$

и

$$\frac{P_1(x)}{\psi(x)} = \sum \frac{B_k}{x-a_k} = \sum \frac{\frac{P_1(a_k)}{\psi'(a_k)}}{x-a_k}.$$

Слѣдовательно

$$\sum \frac{P_1(a_k)}{\psi'(a_k)} = A_{m-1}$$

и

$$\sum_{k=1}^{k=n} S_k = m\frac{n(n-1)}{1.2} - A_{m-1}.$$

Зная изъ формулъ (IV) гл. I выраженіе $r_1$ въ области $\infty$, сейчасъ же найдемъ

$$S_\infty = -\frac{n(n-1)}{2} + A_{m-1}.$$

Откуда и вытекаетъ, что

$$\sum_{1}^{m} S_k + S_\infty = (m-1)\frac{n(n-1)}{1.2}.$$

4. Предъидущія замѣчанія даютъ возможность весьма просто формулировать условія достаточныя и необходимыя для того, чтобы общій интегралъ уравненія (I) былъ цѣлой или раціональной функціей.

Въ самомъ дѣлѣ, *чтобы общій интегралъ былъ цѣлой функціей*, необходимо и достаточно, чтобы существовала система независимыхъ интеграловъ, въ которой каждый интегралъ былъ бы цѣлой функціей.

Чтобы это условіе было удовлетворено, очевидно, *необходимо и достаточно*, чтобы

*a) каждая особенная точка уравненія были особенною только по виду.*

*b) чтобы уравненіе, получаемое изъ* (I) *подстановкой* $x=\frac{1}{t}$, *имѣло въ области* $t=0$ *опредѣляющее уравненіе съ корнями цѣлыми и отрицательными.*

Чтобы общій интегралъ былъ раціональной функціей, необходимо и достаточно, чтобы существовала система независимыхъ интеграловъ, въ которой каждый интегралъ былъ бы раціональной функціей. Раціональная функція опредѣляется слѣдующими условіями: она остается непрерывной и однозначной на всей плоскости независимаго перемѣннаго, обращаясь только для нѣкоторыхъ точекъ въ безконечность цѣлаго порядка; въ числѣ этихъ точекъ можетъ быть и безконечно удаленная точка. Поэтому, чтобы уравненіе (I) *имѣло общій интегралъ—раціональную функцію отъ* $x$, *необходимо и достаточно, чтобы*

*a) корни опредѣляющаго уравненія относительно каждой особенной точки (въ томъ числѣ и безконечно-удаленной) были цѣлыми, положительными или отрицательными, числами.*

*b) чтобы въ области каждой особенной точки въ выраженія интеграловъ не входило логариѳмовъ.*

Корни опредѣляющаго уравненія относительно безконечно-удаленной точки показываютъ, въ томъ случаѣ, когда общій интегралъ есть цѣлая функція, степени отдѣльныхъ независимыхъ интеграловъ, а въ случаѣ раціональнаго общаго интеграла—разности степеней числителей и знаменателей отдѣльныхъ независимыхъ интеграловъ.

Чтобы уравненіе $(R)$ имѣло одинъ или нѣсколько интеграловъ раціональныхъ, необходимо, чтобы опредѣляющее уравненіе его относительно каждой особенной точки имѣло цѣлые корни, и чтобы группа интеграловъ, принадлежащая этимъ корнямъ, была свободна отъ логариѳмовъ; однако, эти условія недостаточны, такъ какъ интегралъ, принадлежащій въ области одной особенной точки цѣлому показателю, въ области другой точки можетъ принадлежать какому угодно показателю; поэтому окончательное рѣшеніе вопроса приводится къ повѣркѣ, съ помощью неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, удовлетворяетъ ли уравненію нѣкоторая раціональная функція, знаменатель которой извѣстенъ вполнѣ и извѣстна степень числителя.

На основаніи п. 20 гл. I совершенно къ такому же пріему приводится вопросъ о раціональныхъ рѣшеніяхъ уравненія, допускающаго и неправильные интегралы.

Равнымъ образомъ, къ повѣркѣ съ помощью метода неопредѣленныхъ коэффиціентовъ приводится вопросъ о томъ, имѣетъ ли данное дифференціальное уравненіе систему независимыхъ интеграловъ, изъ которыхъ каждый есть корень изъ раціональной функціи; чтобы такая система существовала, необходимо, чтобы корни опредѣляющихъ уравненій относительно каждой особенной точки были числа раціональныя и чтобы логариѳмовъ на заключалось въ группахъ интеграловъ, принадлежащихъ корнямъ, разности между которыми суть числа цѣлыя. Но это недостаточно, и поэтому необходимо провѣрить, удовлетворяютъ ли выраженія вида

$$(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}(A_0+A_1x+\ldots+A_mx^m),$$

гдѣ $a, b, \ldots l$ — особенныя точки уравненія, $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ — корни опредѣляющихъ уравненій — числа раціональныя, а $m$ число цѣлое, удовлетворяющее равенству

$$\alpha+\beta+\ldots+\lambda+m=-\mu,$$

гдѣ $\mu$ — корень опредѣляющаго уравненія относительно безконечно-далекой точки, заданному дифференціальному уравненію, или нѣтъ.

Всѣ изложенныя выше соображенія мы пояснимъ на линейномъ уравненіи $2^{\text{аго}}$ порядка, которому удовлетворяетъ гипергеометрическій рядъ.

5. Возьмемъ самое общее уравненіе $2^{\text{аго}}$ порядка, имѣющее двѣ конечныя особенныя точки и всѣ интегралы правильные.

Обозначимъ конечныя особенныя точки черезъ $a$ и $b$.

На основаніи изложенныхъ въ п. 3 настоящей главы соображеній видъ искомаго уравненія будетъ

$$y'' + \frac{Ax+B}{(x-a)(x-b)} y' + \frac{Cx^2+Dx+E}{(x-a)^2(x-b)^2} y = 0. \tag{1}$$

Преобразуемъ нѣсколько уравненіе.

Пусть $\rho$ есть корень опредѣляющаго уравненія для уравненія (1) относительно точки $a$. Если мы въ уравненіе (1) подставимъ

$$y = (x-a)^{\rho} z,$$

то въ преобразованномъ уравненіи числитель коэффиціента при $z$, на основаніи п. 17 гл. I, раздѣлится на $x-a$.

Если затѣмъ подставимъ

$$z = (x-b)^{r} u,$$

гдѣ $r$ есть корень опредѣляющаго уравненія относительно точки $b$, то въ новомъ уравненіи числитель коэффиціента при $u$ раздѣлится, на томъ же основаніи, на $x-b$.

Поэтому, если мы въ уравненіи (1) сразу положимъ

$$y = (x-a)^{\rho}(x-b)^{r} u,$$

гдѣ $\rho$ и $r$ имѣютъ указанныя значенія, то уравненіе (1) обратится въ

$$u'' + \frac{Mx+N}{(x-a)(x-b)} u' + \frac{P}{(x-a)(x-b)} u = 0. \tag{2}$$

Это уравненіе навѣрно будетъ имѣть въ области точекъ $a$ и $b$ интегралы, принадлежащіе показателю, равному нулю.

Если въ уравненіи (2) положить еще

$$x = (b-a) z + a,$$

то оно получитъ видъ

$$(3)\qquad u_z'' + \frac{mz+n}{z(z-1)} u_z' + \frac{p}{z(z-1)} u = 0.$$

Замѣняя $u$ на $y$, $z$ на $x$ и обозначая

$$m = \alpha + \beta + 1$$

$$n = -\gamma$$

$$p = \alpha\beta,$$

мы получимъ весьма извѣстное уравненіе гипергеометрическаго ряда

$$(H)\qquad y'' + \frac{(\alpha+\beta+1)x-\gamma}{x(x-1)} y' + \frac{\alpha\beta}{x(x-1)} y = 0,$$

которое есть вмѣстѣ съ тѣмъ и самое общее уравненіе 2$^{\text{аго}}$ порядка съ 2 особенными конечными точками и правильными интегралами.

6. Разсмотримъ выраженія интеграловъ этого уравненія въ областяхъ особенныхъ точекъ его.

Опредѣляющее уравненіе уравненія $(H)$ относительно точки 0 будетъ

$$(1)\qquad \rho(\rho-1) + \gamma\rho = 0;$$

корни его

$$\rho_1 = 0;\ \rho_2 = 1-\gamma.$$

Опредѣляющее уравненіе относительно точки $x=1$

$$(2)\qquad \sigma(\sigma-1) + (\alpha+\beta+1-\gamma)\sigma = 0$$

корни его

$$\sigma_1 = 0,\ \sigma_2 = \gamma-\alpha-\beta.$$

Послѣ подстановки $x=\frac{1}{t}$, уравненіе $(H)$ перейдетъ въ

$$(3)\qquad y_t'' + \frac{(2-\gamma)t+\alpha+\beta-1}{t(t-1)} y_t' - \frac{\alpha\beta}{t^2(t-1)} y = 0.$$

Опредѣляющее уравненіе относительно точки $t=0$

$$(4)\qquad \tau(\tau-1)+(1-\alpha-\beta)\tau+\alpha\beta=0$$

корни его

$$\tau_1=\alpha,\quad \tau_2=\beta.$$

Сумма корней всѣхъ опредѣляющихъ уравненій будетъ

$$0+1-\gamma+0+\gamma-\alpha-\beta+\alpha+\beta=1=2-1\frac{2.1}{1.2},$$

какъ слѣдовало по п. 3 гл. II.

Остановимся сперва на томъ случаѣ, когда между числами

$$1-\gamma,\ \gamma-\alpha-\beta,\ \alpha-\beta$$

нѣтъ цѣлыхъ чиселъ.

При этомъ предположеніи въ области точки 0, т. е. внутри круга, очерченнаго изъ точки 0 радіусомъ $=1$, существуютъ два независимыхъ интеграла $y_1$ и $y_2$, вида

$$y_1=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots\ldots+A_mx^m+\ldots$$

$$y_2=x^{1-\gamma}(B_0+B_1x+B_2x^2+\ldots+B_mx^m+\ldots);$$

подставляя $y_1$ въ уравненіе $(H)$ и приравнивая нулю коэффиціентъ при $x^m$, найдемъ

$$A_{m+1}(\gamma+m)(m+1)=A_m\left(\alpha\beta+m(\alpha+\beta+1)+m(m-1)\right),$$

откуда

$$A_{m+1}=A_m\frac{(\alpha+m)(\beta+m)}{(m+1)(\gamma+m)}$$

и

$$A_{m+1}=A_0\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m)}{1.2\ldots m+1\ \gamma.\gamma+1\ldots\gamma+m}.$$

$A_0$ мы можемъ всегда принять за единицу и тогда для $y_1$ получимъ выраженіе

$$y_1=1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\ldots+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)}{1.2\ldots(m+1)\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+m-1)}x^m+\ldots=F(\alpha,\beta,\gamma,x)=P.$$

По тому же пріему можно легко найти и выраженіе для $y_2$; но для этой цѣли можно воспользоваться еще и слѣдующимъ замѣчаніемъ: если въ $(H)$ подставимъ

$$y = x^{1-\gamma} u,$$

то получится уравненіе

$$u'' + \frac{(\alpha+\beta+3-2\gamma)x-(2-\gamma)}{x(x-1)} u' + \frac{(\alpha+1-\gamma)(\beta+1-\gamma)}{x(x-1)} u = 0. \tag{5}$$

Это уравненіе отличается отъ $(H)$ только замѣной: $\alpha$ на $\alpha+1-\gamma$, $\beta$ на $\beta+1-\gamma$, $\gamma$ на $2-\gamma$, а потому за $u$ можетъ быть принятъ рядъ

$$u = F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma,\ x).$$

Такимъ образомъ въ области точки 0 уравненіе $(H)$ имѣетъ два независимыхъ интеграла

$$(6)\qquad \begin{aligned} y_1 &= F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x) = P \\ y_2 &= x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma,\ x) = Q. \end{aligned}$$

Въ области точки $x = 1$, т. е. внутри круга радіуса $= 1$, очерченнаго изъ этой точки, должны существовать два независимыхъ интеграла $y_1$ и $y_2$, вида

$$y_1 = C_0 + C_1(1-x) + C_2(1-x)^2 + \ldots. + C_m(1-x)^m + \ldots$$

$$y_2 = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(D_0 + D_1(1-x) + \ldots + D_m(1-x)^m + \ldots)$$

Коэффиціенты $C$ и $D$ могутъ быть получены непосредственной подстановкой выраженій $y_1$ и $y_2$ въ уравненіе $(H)$; можно также весьма просто получить ихъ съ помощью слѣдующаго замѣчанія: положимъ въ уравненіи $(H)$

$$1 - x = z.$$

Уравненіе получитъ видъ

$$y_z'' + \frac{(\alpha+\beta+1)z+\gamma-\alpha-\beta-1}{z(z-1)} y_z' + \frac{\alpha\beta}{z(z-1)} y = 0. \tag{7}$$

Это уравненіе отличается отъ $(H)$ только замѣной $\gamma$ на $\alpha+\beta+1-\gamma$; поэтому ему удовлетворитъ рядъ

$$(8) \quad y_1 = F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, z) = F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x) = R.$$

Выраженіе для $2^{\text{аго}}$ интеграла $y_2$ получится, если мы въ уравненіе (7) подставимъ

$$y = z^{\gamma-\alpha-\beta} u.$$

Какъ не трудно провѣрить, для $u$ получится уравненіе, которое отличается отъ (7) замѣной $\alpha$ и $\beta$ на $\gamma-\alpha$ и $\gamma-\beta$.

Поэтому можно положить

$$u = F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, 1+\gamma-\alpha-\beta, z).$$

Такимъ образомъ второй независимый интегралъ въ области точки 1 будетъ

$$(9) \quad y_2 = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, 1+\gamma-\alpha-\beta, 1-x) = S.$$

Въ области безконечно далекой точки, т. е. внѣ круга, описаннаго около 0 радіусомъ $=1$, существуютъ два независимые интеграла, принадлежащіе показателямъ $-\alpha$ и $-\beta$.

Выраженія ихъ весьма просто найдутся по тому же пріему, по которому найдены разложенія для $Q$, $R$ и $S$—подстановкой въ уравненіе $(H)$ $x=\frac{1}{t}$, и затѣмъ послѣдовательно

$$y = t^{\alpha} u \quad \text{и} \quad y = t^{\beta} u.$$

Интегралы будутъ имѣть видъ

$$(10) \quad \begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{x^{\alpha}} F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha-\beta+1, \frac{1}{x}\right) = T \\ y_2 &= \frac{1}{x^{\beta}} F\left(\beta, \beta+1-\gamma, \beta-\alpha+1, \frac{1}{x}\right) = U. \end{aligned}$$

Такимъ образомъ уравненіе $(H)$ имѣетъ слѣдующія системы независимыхъ интеграловъ.

Внутри круга радіуса $= 1$, очерченнаго около точки 0

$$y_1 = P = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

$$y_2 = Q = x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x)$$

Внутри круга того же радіуса, очерченнаго около точки 1

$$y_1 = R = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma, 1 - x)$$

$$y_2 = S = (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma + 1 - \alpha - \beta, 1 - x).$$

Внѣ круга того же радіуса, очерченнаго около точки 0

$$y_1 = T = \frac{1}{x^\alpha} F\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1, \frac{1}{x}\right)$$

$$y_2 = U = \frac{1}{x^\beta} F\left(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1, \frac{1}{x}\right)$$

причемъ, по условію, ни одно изъ чиселъ $1 - \gamma$, $\gamma - \alpha - \beta$, $\alpha - \beta$ не есть цѣлое число.

Всѣ шесть указанныхъ разложеній и еще 18 другихъ получаются изъ $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ путемъ послѣдовательныхъ подстановокъ въ уравненіе $(H)$ вмѣсто $x$ и $y$ соотвѣтетвенно

$$x, \ 1 - x, \ \frac{1}{x}, \ \frac{1}{1-x}, \ \frac{x}{x-1}, \ \frac{x-1}{x}$$

$$x^\rho (1 - x)^\sigma y,$$

гдѣ $\rho$ и $\sigma$ могутъ имѣть четыре системы различныхъ значенія

$$0, 0; \ 0, \gamma - \alpha - \beta; \ 1 - \gamma, 0; \ 1 - \gamma, \gamma - \alpha - \beta.$$

7. Величины $P$, $Q$, $R$, $S$, $T$, $U$ представляютъ попарно три различныя системы независимыхъ интеграловъ; интегралы каждой изъ системъ могутъ быть выражены линейными функціями съ постоянными коэффиціентами отъ интеграловъ другой системы.

Мы здѣсь выведемъ значенія постоянныхъ, связывающихъ интегралы $R$, $S$, $T$ и $U$ съ интегралами $P$ и $Q$, ограничиваясь тѣмъ случаемъ, когда вещественныя части чиселъ $1 - \gamma$ и $\gamma - \alpha - \beta$

положительны. Отъ этого частнаго случая можно перейти къ общему, воспользовавшись существующими между функціями $F$ съ параметрами, отличающимися на цѣлыя числа, зависимостями.

Изъ различныхъ значеній выраженій $x^{1-\gamma}$ и $(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}$, $x^{-\alpha}$ и $x^{-\beta}$ мы выберемъ тѣ, которыя обращаются для $x$, равнаго соотвѣтственно 1, 0, 1 и 1, въ 1.

Положимъ

$$(1)\qquad \begin{aligned} R &= AP + BQ, \quad & S &= A'P + B'Q \\ T &= CP + DQ, \quad & U &= C'P + D'Q. \end{aligned}$$

При сдѣланныхъ нами относительно $1-\gamma$ и $\gamma-\alpha-\beta$ предположеніяхъ, приведенныя выше разложенія $P$, $Q$, $R$, $S$, $T$, $U$ въ ряды не теряютъ смысла и на границахъ круговъ сходимости; въ этомъ легко убѣдиться, прилагая извѣстный признакъ Гаусса для сходимости рядовъ къ найденнымъ выше разложеніямъ. Это замѣчаніе сейчасъ же даетъ возможность найти величины $A$, $B$, $A'$ и $B'$.

Положимъ послѣдовательно $x=0$ и $x=1$; изъ уравненій (1) находимъ

$$(2)\qquad \begin{aligned} &R(0)=AP(0)+BQ(0), && F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1)=A \\ &S(0)=A'P(0)+B'Q(0), && F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma+1-\alpha-\beta,1)=A' \\ &R(1)=AP(1)+BQ(1), && 1=AF(\alpha,\beta,\gamma,1)+BF(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma,1) \\ &S(1)=A'P(1)+B'Q(1), && 0=A'F(\alpha,\beta,\gamma,1)+B'F(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma,1). \end{aligned}$$

Выраженія для $A$, $A'$, $B$ и $B'$, получаемыя изъ этихъ формулъ, могутъ быть значительно упрощены, если мы вмѣсто $P$, $Q$, $R$ и $S$ введемъ величины

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}P,\quad \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(2-\gamma)}Q,\quad \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)}R,\quad \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+1)}S,$$

гдѣ, согласно общепринятому обозначенію,

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx,$$

и затѣмъ воспользуемся извѣстными формулами

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\operatorname{Sin}\alpha\pi} \quad \text{и} \quad F(\alpha,\beta,\gamma,1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}.$$

Обозначая черезъ $a$, $b$, $a'$, $b'$ величины, соотвѣтствующія $A$, $B$, $A'$, $B'$ ф. (2), найдемъ

$$(3)\qquad \begin{aligned} a&=\frac{\operatorname{Sin}(\gamma-\alpha)\pi}{\operatorname{Sin}\gamma\pi}, & b&=-\frac{\operatorname{Sin}\beta\pi}{\operatorname{Sin}\gamma\pi};\\ a'&=\frac{\operatorname{Sin}\alpha\pi}{\operatorname{Sin}\gamma\pi}, & b'&=-\frac{\operatorname{Sin}(\gamma-\beta)\pi}{\operatorname{Sin}\gamma\pi}.\end{aligned}$$

Чтобы найти величины $C$, $D$, $C'$ и $D'$, положимъ $x=1$ въ соотвѣтственныхъ уравненіяхъ (1). Получимъ

$$(4)\qquad \begin{aligned} &T(1)=CP(1)+DQ(1),\ F(\alpha,\alpha+1-\gamma,\alpha-\beta+1,1)=\\ &\qquad =CF(\alpha,\beta,\gamma,1)+DF(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma,1)\\ &U(1)=C'P(1)+D'Q(1),\ F(\beta,\beta+1-\gamma,\beta-\alpha+1,1)=\\ &\qquad =C'F(\alpha,\beta,\gamma,1)+D'F(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma,1).\end{aligned}$$

Пусть теперь перемѣнная $x$ опишетъ окружность радіуса $=1$ около точки 0; уравненія (1) дадутъ

$$(5)\qquad \begin{aligned} e^{-2\pi\alpha i}\,T&=CP+D\,e^{2\pi i(1-\gamma)}\,Q\\ e^{-2\pi\beta i}\,U&=C'P+D'e^{2\pi i(1-\gamma)}\,Q.\end{aligned}$$

Дѣлая опять $x=1$, получимъ изъ (5) еще 2 уравненія, подобныя (4), и опредѣлимъ затѣмъ величины $C$, $C'$, $D$ и $D'$.

Введя при $T$ и $U$ множители $\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}$ и $\frac{\Gamma(\beta-\gamma+1)\,\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}$ и обозначая черезъ $c$, $d$, $c'$ и $d'$ величины, соотвѣтствующія $C$, $D$, $C'$ и $D'$, мы окончательно найдемъ:

$$(6)\qquad \begin{aligned} c&=1+e^{-\pi i(\alpha+1-\gamma)}\frac{\operatorname{Sin}\alpha\pi}{\operatorname{Sin}(1-\gamma)\pi}, & d&=-\frac{\operatorname{Sin}(\gamma-\beta)\pi}{\operatorname{Sin}(1-\gamma)\pi}\,e^{-\pi i(\alpha+1-\gamma)}\\ c'&=\frac{\operatorname{Sin}\alpha\pi}{\operatorname{Sin}(\gamma-\beta)\pi}\left(1+e^{-\pi i(\beta+1-\gamma)}\frac{\operatorname{Sin}\beta\pi}{\operatorname{Sin}(1-\gamma)\pi}\right), & d'&=-\frac{\operatorname{Sin}\beta\pi}{\operatorname{Sin}(1-\gamma)\pi}\,e^{-\pi i(\beta+1-\gamma)}.\end{aligned}$$

8. Обратимся теперь къ тому случаю, когда между числами $1-\gamma$, $\gamma-\alpha-\beta$, $\alpha-\beta$ есть цѣлыя.

Положимъ сперва, что $1-\gamma$ есть число цѣлое.

Въ такомъ случаѣ интегралы уравненія $(H)$ въ области точки 0 могутъ заключать логариѳмы.

Приложимъ указанный въ п. 1 настоящей главы пріемъ рѣшенія вопроса, входятъ ли логариѳмы въ выраженія интеграловъ въ области особенной точки.

Замѣтимъ, что если $1-\gamma>0$, то интегралъ уравненія $(H)$, несодержащій логариѳма, будетъ принадлежать показателю $1-\gamma$, какъ имѣющему наибольшую дѣйствительную часть изъ корней опредѣляющаго уравненія (гл. I п. 17, $f$ и $g$). Если же $1-\gamma<0$, то свободный отъ логариѳма интегралъ будетъ принадлежать показателю нулю; вмѣстѣ съ тѣмъ, для приложенія методы, нужно будетъ уравненіе $(H)$ преобразовать подстановкой

$$y=x^{1-\gamma}u$$

и разсматривать уравненіе относительно $u$.

Остановимся сперва на первомъ предположеніи

$a$) $1-\gamma=$ цѣлому положительному числу.

Обозначимъ

$$(1) \qquad 1-\gamma=\sigma-1,\ \gamma=2-\sigma,\ \sigma=2-\gamma$$

и будемъ искать уравненіе, которому удовлетворяютъ производныя порядка $\sigma$ отъ интеграловъ $y_1$ и $y_2$ уравненія $(H)$.

Умножимъ $(H)$ на $x(x-1)$ и продифференцируемъ $\sigma$ разъ по $x$; послѣ $m$ дифференцированій мы получимъ

$$(2) \qquad u''+\frac{(\alpha+\beta+2m+1)x-(\gamma+m)}{x(x-1)}u'+\frac{(\alpha+m)(\beta+m)}{x(x-1)}u=0,$$

гдѣ $u$ есть $m$-ная производная отъ $y$.

Если коэффиціентъ при $u$ для всѣхъ значеній $m$ отъ 0 до $\sigma-1$ не обращается въ нуль, т. е. если ни одна изъ величинъ $\alpha$ и $\beta$ не есть нуль или цѣлое отрицательное число, модуль котораго $<\sigma-1$, то съ помощью уравненія (2) мы найдемъ, что опредѣляющее уравненіе, составленное для уравненія вида (2) при $m=\sigma$, которому удовлетворяютъ производныя порядка $\sigma$ отъ интеграловъ уравненія $(H)$, будетъ

$$(3) \qquad \rho(\rho-1)+\rho(\gamma+\sigma)=0$$

и корни его — $0$ и $1-\gamma-\sigma=-1$.

Это показываетъ, что при $1-\gamma>0$ интегралъ уравненія $(H)$, принадлежащій въ области точки $0$ показателю, равному нулю, заключаетъ логариѳмъ въ выраженіи своемъ и поэтому представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$(4) \qquad y_2=\varphi(x)+Cx^{1-\gamma}\,F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma,\ x)\lg x,$$

гдѣ $\varphi(x)$ есть голоморфная функція отъ $x$, для которой $\varphi(0)$ не нуль; $C$ — нѣкоторая постоянная.

Далѣе мы дадимъ выраженіе коэффиціентовъ функціи $\varphi(x)$ при различныхъ степеняхъ $x$.

Если же одна изъ величинъ $\alpha$ и $\beta$, напр. $\alpha$, есть $0$ или цѣлое отрицательное число $=-\mu$, $\mu<\sigma-1$, то въ уравненіи (2) коэффиціентъ при $u$ для $m=-\alpha=\mu$ обратится въ нуль. Это показываетъ, что уравненію (2) удовлетворитъ нѣкоторая постоянная величина $C$ и что слѣдовательно уравненіе $(H)$ имѣетъ интегралъ, $\mu$-ая производная котораго есть постоянное число; этотъ интегралъ есть полиномъ степени $\mu$.

Уравненіе $(H)$ имѣетъ въ этомъ случаѣ слѣдующіе 2 независимые интегралы:

$$(5) \qquad \begin{aligned} y_1 &= x^{\sigma-1}F(-\mu+\sigma-1,\ \beta+\sigma-1,\ \sigma,\ x) \\ y_2 &= F(-\mu,\ \beta,\ 2-\sigma,\ x), \end{aligned}$$

изъ которыхъ 2-ой дѣйствительно есть полиномъ степени $\mu$.

*b*) Положимъ теперь, что $1-\gamma<0$. Въ такомъ случаѣ свободный отъ логариѳмовъ интегралъ будетъ принадлежать показателю $0$ и потому

$$y_1=F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x).$$

Чтобы убѣдиться, войдутъ ли въ выраженіе 2-аго интеграла логариѳмы, надо прежде всего преобразовать уравненіе $(H)$ подстановкой

$$y=x^{1-\gamma}\,u.$$

Мы получимъ уравненіе (5) п. 6.

$$(6)\qquad u''+\frac{(\alpha+\beta+3-2\gamma)\,x-(2-\gamma)}{x\,(x-1)}\,u'+\frac{(\alpha+1-\gamma)\,(\beta+1-\gamma)}{x\,(x-1)}\,u=0.$$

Помноживъ уравненіе (6) на $x\,(x-1)$, продифференцируемъ $\gamma$ разъ по $x$; послѣ $m$ дифференцированій, обозначая черезъ $v$ $m$-ную производную отъ $u$, получимъ для $v$ уравненіе

$$(7)\qquad v''+\frac{(\alpha+\beta+3-2\gamma+2m)\,x-(2-\gamma+m)}{x\,(x-1)}\,v'+\frac{(\alpha+1-\gamma+m)\,(\beta+1-\gamma+m)}{x\,(x-1)}\,u=0.$$

Подобно предъидущему убѣдимся, что если ни одна изъ величинъ $\alpha+1-\gamma$, $\beta+1-\gamma$ не есть нуль или цѣлое отрицательное число $=-\mu$, $\mu<\gamma-1$, то въ выраженіе интеграла уравненія $(H)$, принадлежащаго цѣлому отрицательному показателю $1-\gamma=1-\sigma$, войдетъ логариѳмъ, и видъ этого интеграла будетъ:

$$(8)\qquad y_2=x^{1-\gamma}\,\psi(x)+CF(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)\lg x.$$

Если же хоть одно изъ чиселъ $\alpha+1-\gamma$ и $\beta+1-\gamma$, напр. $\alpha+1-\gamma$ равно отрицательному цѣлому числу $-\mu$, $\mu<\gamma-1$, то уравненіе (6) имѣетъ интегралъ, равный полиному степени $\mu$, а уравненіе $(H)$ — раціональный интегралъ. Интегралы уравненія $(H)$ въ разсматриваемомъ случаѣ будутъ

$$y_1=F(-\mu+\gamma-1,\ \beta,\ \gamma,\ x)$$

$$y_2=\frac{F(-\mu,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma,\ x)}{x^{\gamma-1}}.$$

Послѣдній интегралъ есть дѣйствительно раціональная дробь.

Разсуждая подобнымъ же образомъ, мы убѣдимся послѣдовательно, что $c$) если $\gamma-\alpha-\beta$ есть положительное цѣлое число, то въ области точки 1 уравненіе $(H)$ имѣетъ независимые интегралы

$$(9)\qquad \begin{aligned} u_1&=(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma+1-\alpha-\beta,\ 1-x)\\ u_2&=\varphi_1(1-x)+C(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-x)\lg(1-x). \end{aligned}$$

причемъ $\varphi_1(0)$ не нуль.

Въ томъ случаѣ, если или $\alpha$ или $\beta$ — цѣлое отрицательное число, mod котораго меньше $\gamma-\alpha-\beta$, то уравненіе $(H)$ имѣетъ интеграломъ полиномъ

$$u_2 = F(-\mu,\ \beta,\ \alpha+\beta+1-\gamma,\ 1-x) \qquad (\alpha=-\mu).$$

*d*) Если $\gamma-\alpha-\beta$ есть цѣлое отрицательное число, то уравненіе $(H)$ въ области 1 имѣетъ слѣдующіе два независимые интегралы:

$$(10)\quad \begin{aligned} u_1 &= F(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta+1-\gamma,\ 1-x) \\ u_2 &= (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\psi_1(1-x) + CF(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-x)\lg(1-x). \end{aligned}$$

Въ томъ случаѣ, когда или $\gamma-\alpha$, или $\gamma-\beta$ есть цѣлое отрицательное число, mod. котораго $<$ mod $(\gamma-\alpha-\beta)$, уравненіе $(H)$ имѣетъ раціональный интегралъ

$$u_2' = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(-\mu, \gamma-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, 1-x) \qquad (\gamma-\alpha=-\mu)$$

*e*) Если $\alpha-\beta =$ цѣлому положительному числу, то уравненіе $(H)$, въ области безконечно далекой точки, имѣетъ интегралы

$$(11)\quad \begin{aligned} v_1 &= t^\alpha F(\alpha,\ \alpha+1-\gamma,\ \alpha-\beta+1,\ t) \qquad \left(t=\frac{1}{x}\right) \\ v_2 &= t^\beta \varphi_2(t) + Ct^\alpha F(\alpha,\ \alpha+1-\gamma,\ \alpha-\beta+1,\ t)\lg t. \end{aligned}$$

Если же при этомъ или $\beta$, или $\beta+1-\gamma$ — цѣлое отрицательное число, модуль котораго меньше $\alpha-\beta$, то уравненіе $(H)$ имѣетъ интегралъ

$$v_2 = t^{-\mu} F(-\mu,\ \beta+1-\gamma,\ \beta-\alpha+1,\ t) \quad (\beta=-\mu).$$

*f*) Наконецъ, если $\alpha-\beta =$ цѣлому отрицательному числу, то уравненіе $(H)$ въ области $\infty$ имѣетъ интегралы

$$(12)\quad \begin{aligned} v_1 &= t^\beta F(\beta,\ \beta+1-\gamma,\ \beta-\alpha+1,\ t) \\ v_2 &= t^\alpha \psi_2(t) + Ct^\beta F(\beta,\ \beta+1-\gamma,\ \beta-\alpha+1,\ t)\lg t \end{aligned}$$

Если же, вмѣстѣ съ тѣмъ, или $\alpha$, или $\alpha+1-\gamma$ есть цѣлое отрицательное число, модуль котораго меньше $\beta-\alpha$, то уравненіе $(H)$ имѣетъ интегралъ

$$v_2 = t^{-\mu} F(-\mu,\ \alpha+1-\gamma,\ \alpha-\beta+1,\ t) \qquad (\alpha=-\mu).$$

9. Намъ остается опредѣлить функціи $\varphi$ и $\psi$ въ формулахъ (4) и (8 — 12) п. 8 и тогда намъ будутъ извѣстны, во всѣхъ возможныхъ случаяхъ, выраженія интеграловъ уравненія $(H)$ въ области его особенныхъ точекъ.

Положимъ сперва $\gamma=1$.

Оба интеграла въ области точки 0 будутъ принадлежать показателю, равному нулю. Мы можемъ положить

$$(1)\qquad \begin{aligned} y_1 &= F(\alpha,\beta,1,x)=\sum_0^\infty A_m x^m \\ y_2 &= \varphi(x)+CF(\alpha,\beta,1,x)\lg x=\sum_0^\infty B_m x^m + C\sum_0^\infty A_m x^m \lg x. \end{aligned}$$

Подставимъ $y_2$ въ уравненіе $(H)$; коэффиціентъ при $\lg x$ представитъ лѣвую часть уравненія $(H)$, въ которой $y$ замѣнено $F(\alpha, \beta, \gamma, 1, x)$; такъ какъ эта величина есть интегралъ уравненія $(H)$, то $\lg x$ не войдетъ въ полученное отъ подстановки выраженіе.

Приравнявъ нулю коэффиціенты при равныхъ степеняхъ $x$, мы получимъ

$$B_{m+1}=B_m\frac{(\alpha+m)(\beta+m)}{(m+1)^2}+C\left(A_m\frac{2m+\alpha+\beta}{(m+1)^2}-A_{m+1}\frac{2(m+1)}{(m+1)^2}\right)$$

или

$$(2)\qquad B_{m+1}=B_m\frac{A_{m+1}}{A_m}+CA_{m+1}\left(\frac{1}{\alpha+m}+\frac{1}{\beta+m}-2\frac{1}{m+1}\right).$$

$B_0$ остается произвольной величиной; для простоты формулъ мы можемъ принять ее за 0; равнымъ образомъ можемъ положить $C=1$.

Въ такомъ случаѣ изъ формулы (2) легко найдемъ

$$(3)\qquad B_{m+1}=A_{m+1}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}+\ldots+\frac{1}{\alpha+m}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta+1}+\ldots+\frac{1}{\beta+m}-2\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m+1}\right)\right).$$

Обозначимъ черезъ $S_m(\lambda)$ сумму

$$(4)\qquad S_m(\lambda)=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda+1}+\ldots+\frac{1}{\lambda+m-1}=\frac{d}{d\lambda}\lg\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+m-1)=\frac{d}{d\lambda}\lg(\lambda+m-1)_m.$$

$B_{m+1}$ представится тогда окончательно въ видѣ

$$(5)\qquad B_{m+1} = A_{m+1}\left(S_{m+1}(\alpha) + S_{m+1}(\beta) - 2\,S_{m+1}(1)\right)$$

и интегралъ $y_2$ — въ видѣ

$$(6)\quad y_2 = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m)}{[1.2.3\ldots(m+1)]^2}\left(S_{m+1}(\alpha)+S_{m+1}(\beta)-2\,S_{m+1}(1)\right)x^{m+1} +$$
$$+ F(\alpha,\ \beta,\ 1,\ x)\lg x.$$

Если бы мы оставили $B_0$ произвольной величиной, то въ послѣдней формулѣ второй членъ обратился бы въ $(\lg x + B_0)\ F(\alpha, \beta, 1, x)$ и соотвѣтствующій интегралъ $y_2'$ былъ бы $y_2 + B_0 y_1$.

Полученный результатъ можетъ быть сейчасъ же приложенъ къ линейному дифференціальному уравненію, связывающему интегралъ

$$\omega = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

равный половинѣ вещественнаго періода эллиптической функціи $\lambda$, съ модулемъ $k$.

Уравненіе это имѣетъ видъ

$$k(1-k^2)\,\omega_k'' + (1-3k^2)\,\omega_k' - k\omega = 0.$$

Если положить $\omega = y$, $k = \sqrt{x}$, то оно приметъ видъ

$$(7)\qquad y'' + \frac{2x-1}{x(x-1)}\,y' + \frac{1}{4x.x-1}\,y = 0.$$

Это уравненіе есть частный случай уравненія $(H)$, гдѣ положено

$$\alpha = \frac{1}{2},\ \beta = \frac{1}{2},\ \gamma = 1.$$

Уравненіе (7) на основаніи формулъ (1) и (6) имѣетъ въ области $x = 0$ два независимыхъ интеграла

$$y_1 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, x\right) = \sum_0^\infty \left(\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots 2m}\right)^2 x^m$$

$$y_2 = F\lg x + \varphi(x) = \sum_{m=0}^{m=\infty}\left(\frac{1.3\ldots(2m-1)}{2.4\ldots 2m}\right)^2 x^m \lg x + 2\sum_{m=1}^{m=\infty}\left(\frac{1.3\ldots(2m-1)}{2.4\ldots 2m}\right)^2\left(S_m\left(\frac{1}{2}\right) - S_m(1)\right)x^m,$$

причемъ коэффиціентъ при $x^m$ въ выраженіи $F$ для $m=0$ надо положить равнымъ единицѣ.

Положимъ теперь, что $1-\gamma$ есть цѣлое положительное число $s$. Уравненіе $(H)$ имѣетъ въ такомъ случаѣ слѣдующіе независимые интегралы:

$$(8)\quad \begin{aligned} y_1 &= x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x) = x^s F(\alpha+s, \beta+s, s+1, x) \\ y_2 &= \varphi(x) + Cx^s F(\alpha+s, \beta+s, s+1, x) \lg x. \end{aligned}$$

Обозначивъ черезъ $A_m$ извѣстный намъ коэффиціентъ при $x^m$ въ ряду $F(\alpha+s, \beta+s, s+1, x)$, мы можемъ положить

$$y_2 = \sum_0^\infty B_m x^m + Cx^s \lg x \sum_0^\infty A_m x^m.$$

Подставляя $y_2$ въ уравненіе $(H)$ и приравнивая нулю коэффиціенты при различныхъ степеняхъ $x$, найдемъ

$$k \leqq s-2, \quad B_k = B_{k+1} \frac{(k+1)(k+1-s)}{(\alpha+k)(\beta+k)}; \quad B_{s-1} = \frac{s}{(\alpha+s-1)(\beta+s-1)};$$

отсюда

$$B_0 = \frac{1.2\ldots s(1-s)(2-s)\ldots(-2)(-1)}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+s-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+s-1)} = (-1)^{s-1} \frac{(1.2\ldots s-1)^2 s}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+s-1)\beta(\beta+1\ldots\beta+s-1)}$$

$$B_k = \frac{(k+1)(k+2)\ldots s(k+1-s)(k+2-s)\ldots(-2)(-1)}{(\alpha+k)\ldots(\alpha+s-1)(\beta-k)\ldots(\beta+s-1)}.$$

Далѣе находимъ:

$$B_{s-1} = B_0 \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+s-2)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+s-2)}{1.2\ldots(s-1)(-s+1)(-s+2)\ldots(-1)}, \quad B_s = \text{произв. постоян.}$$

и наконецъ

$$B_{s+m+1} = B_{s+m} \frac{(\alpha+s+m)(\beta+s+m)}{(m+1)(s+m+1)} + C\left(A_m \frac{\alpha+\beta+2(m+s)}{(m+1)(s+m+1)} - A_{m+1} \frac{s+2(m+1)}{(m+1)(s+m+1)}\right)$$

или

$$B_{s+m+1} = B_{s+m} \frac{A_{m+1}}{A_m} + CA_{m+1} \left\{\frac{1}{\alpha+s+m} + \frac{1}{\beta+s+m} - \frac{1}{m+1} - \frac{1}{s+m+1}\right\}.$$

Обозначая попрежнему через $S_m(\lambda)$ сумму

$$S_m(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda+1} + \ldots + \frac{1}{\lambda+m-1}$$

и полагая въ предъидущей формулѣ послѣдовательно $m=0,1,2,\ldots m$, мы найдемъ

$$(9) \qquad B_{s+m+1} = B_{m+1}\left[B_s + C\left(\underset{m+1}{S}(\alpha+s) + \underset{m+1}{S}(\beta+s) - \underset{m+1}{S}(1) - \underset{m+1}{S}(s+1)\right)\right].$$

Для упрощенія формулъ мы можемъ положить:

$$B_s = 0; \quad C = 1.$$

Въ такомъ случаѣ окончательно можемъ написать:

$$(10) \qquad \begin{aligned} \varphi(x) = &\sum_{k=0}^{k=s-2} \frac{(k+1)(k+2)\ldots(s-1)\,s\,(-1)(-2)\ldots(k+1-s)}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+s-1)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+s-1)} x^k + \frac{s}{(\alpha+s-1)(\beta+s-1)} x^{s-1} + \\ &+ \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\alpha+s)\ldots(\alpha+s+m)(\beta+s)\ldots(\beta+s+m)}{1.2\ldots(m+1)(s+1)\ldots s+m+1}\left(\underset{m+1}{S}(\alpha+s) + \underset{m+1}{S}(\beta+s) - \underset{m+1}{S}(1) - \underset{m+1}{S}(s+1)\right) x^{s+m+1}. \end{aligned}$$

Пусть, наконецъ, $1-\gamma$ есть число отрицательное, равное $-s$; свободный отъ логариѳма интегралъ уравненія $(H)$ будетъ въ этомъ случаѣ

$$y_1 = F(\alpha, \beta, s+1, x).$$

Второй независимый интегралъ будетъ

$$(11) \qquad y_2 = x^{-s}\psi(x) + CF(\alpha, \beta, s+1, x)\lg x = x^{-s}\sum_{m=0}^{m=\infty} B_m x^m + C\lg x \sum_{m=0}^{m=\infty} A'_m x^m.$$

Поступая подобно предъидущему, мы найдемъ для $\psi(x)$ слѣдующее выраженіе:

$$(12) \qquad \begin{aligned} \psi(x) = &\sum_{k=0}^{k=s-2} \frac{(k+1)\ldots(s-1)\,s\,(-1)(-2)\ldots(k+1-s)}{(\alpha-s)(\alpha-s+1)\ldots(\alpha-2)(\beta-s)\ldots(\beta-2)} x^k + \frac{s}{(\alpha-1)(\beta-1)} x^{s-1} + \\ &+ \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m)}{1.2\ldots(m+1)(s+1)\ldots(s+m+1)}\left(\underset{m+1}{S}(\alpha) + \underset{m+1}{S}(\beta) - \underset{m+1}{S}(1) - \underset{m+1}{S}(s+1)\right) x^{m+1}. \end{aligned}$$

Выраженія интеграловъ уравненія ($H$) въ областяхъ точекъ 1 и $\infty$, когда числа $\gamma-\alpha-\beta$ или $\alpha-\beta$ будутъ цѣлыми, получатся по тому же пріему, который былъ примѣненъ къ опредѣленію интеграловъ въ области точки 0 при $1-\gamma=$ цѣл. ч. Эти выраженія будутъ отличаться отъ вышеуказанныхъ замѣной $x$ на $1-x$ и $\frac{1}{x}$, и, соотвѣтственно, $\gamma$ на $\alpha+\beta+1-\gamma$ и $\alpha-\beta+1$.

10. Остановимся теперь на разсмотрѣніи тѣхъ случаевъ, когда

*a*) общій интегралъ уравненія ($H$) будетъ цѣлой или раціональной функціей.

*b*) одинъ или оба интеграла могутъ быть представлены корнемъ нѣкоторой степени изъ раціональной функціи, и

*c*) общій интегралъ будетъ алгебраическимъ, если которое нибудь изъ чиселъ: $1-\gamma$, $\gamma-\alpha-\beta$, $\alpha-\beta$ —цѣлое.

Чтобы уравненіе ($H$) имѣло общимъ интеграломъ—цѣлую функцію, на основаніи п. 4 настоящей главы, необходимо и достаточно, чтобы

1) числа $1-\gamma$ и $\gamma-\alpha-\beta$ были цѣлыя и положительныя, а числа $\alpha$ и $\beta$ — цѣлыя и отрицательныя.

2) логариѳмы не входили въ выраженія интеграловъ въ области особенныхъ точекъ.

Положимъ

$$1-\gamma=\sigma-1>0;\quad \alpha=-n;\quad \beta=-m;\quad \gamma-\alpha-\beta=2-\sigma+n+m>0.$$

Чтобы при $1-\gamma$ цѣломъ и положительномъ интегралы уравненія ($H$) не заключали въ области точки 0 логариѳмовъ, необходимо и достаточно, чтобы одно изъ чиселъ $\alpha$ или $\beta$ было отрицательнымъ, по численному значенію меньше $\sigma-1$ (п. 8).

Замѣтимъ здѣсь, что числа $\alpha$ и $\beta$ входятъ въ уравненіе ($H$) и въ выраженія интеграловъ симметрично; поэтому если при извѣстномъ частномъ значеніи $\alpha$ и какомъ нибудь $\beta$ уравненіе ($H$) имѣетъ какое либо свойство, то оно будетъ имѣть то же свойство при такомъ же значеніи $\beta$ и какомъ нибудь $\alpha$; на этомъ основаніи мы будемъ въ дальнѣйшемъ разсматривать только половину всѣхъ возможныхъ предположеній.

Положимъ

$$-\beta=m<\sigma-1.$$

Чтобы при $\gamma-\alpha-\beta$ цѣломъ и положительномъ интегралы уравненія ($H$) не заключали логариѳмовъ въ области точки 1, необходимо и достаточно, чтобы одно изъ чиселъ $\alpha$ или $\beta$ было числомъ цѣлымъ, отрицательнымъ, численное значеніе котораго меньше $\gamma-\alpha-\beta$ (п. 8).

Если мы положимъ

$$m<\gamma-\alpha-\beta=2-\sigma+n+m,$$

то получимъ, что

$$2-\sigma+n>0, \quad n \geqq \sigma-1.$$

Если же положимъ $n<2-\sigma+n+m$, то получимъ $2-\sigma+m>0$, что противорѣчитъ предположенію $m<\sigma-1$.

При $1-\gamma=\sigma-1$, $\alpha=-n$, $\beta=-m$, $m<\sigma-1$, $n \leqq \sigma-1$ интегралы въ области безконечно-далекой точки также не будутъ заключать логариѳмовъ. Въ самомъ дѣлѣ, въ разсматриваемомъ случаѣ для отсутствія логариѳма необходимо, чтобы или $\alpha$, или $\alpha+1-\gamma$ было число отрицательное, по численному значенію меньше $n-m$; но $\alpha+1-\gamma$ есть число отрицательное, а модуль его $n-\sigma+1$ дѣйствительно меньше $n-m$.

Изъ этого слѣдуетъ, что уравненіе ($H$) имѣетъ общій интегралъ— цѣлую функцію, тогда и только тогда, если всѣ три числа $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — цѣлыя и отрицательныя, и если между численными ихъ значеніями существуютъ неравенства

$$\text{числ. зн. } \beta<1-\gamma \leqq \text{ числ. зн. } \alpha.$$

Не трудно провѣрить, что въ этомъ случаѣ уравненіе ($H$) имѣетъ дѣйствительно два независимыхъ интеграла, изъ которыхъ каждый есть полиномъ:

$y_1=F(-n,\ -m,\ 2-\sigma,\ x)$ —полиномъ степени $m$

$y_2=x^{\sigma-1}F(-n+\sigma-1,-m+\sigma-1,\sigma,x)$ —полиномъ степени $n-\sigma+1+\sigma-1=n$.

Чтобы общій интегралъ уравненія ($H$) былъ раціональной функціей, необходимо и достаточно, чтобы

1) числа $1-\gamma$, $\gamma-\alpha-\beta$, $\alpha$, $\beta$ — были цѣлыя, положительныя или отрицательныя,

2) чтобы логариѳмы не входили въ выраженія интеграловъ въ области особенныхъ точекъ.

При этомъ могутъ представиться 4 случая

$$1-\gamma>0,\ \gamma-\alpha-\beta>0; \qquad 1-\gamma>0,\ \gamma-\alpha-\beta<0.$$

$$1-\gamma<0,\ \gamma-\alpha-\beta>0; \qquad 1-\gamma<0,\ \gamma-\alpha-\beta<0.$$

Первый случай только что разсмотрѣнъ; остается изслѣдовать, при какихъ условіяхъ въ каждомъ изъ трехъ остальныхъ случаевъ общій интегралъ ($H$) будетъ раціональнымъ.

Пусть $\sigma-1=1-\gamma>0$; $\gamma-\alpha-\beta=2-\sigma-\alpha-\beta<0$.

Чтобы въ области точки 0 не вошли логариѳмы въ выраженіе системы независимыхъ интеграловъ, необходимо и достаточно, какъ мы видѣли выше, чтобы одно изъ чиселъ $\alpha$ или $\beta$ было цѣлымъ и отрицательнымъ числомъ, по численному значенію меньше $\sigma-1$; пусть

$$\beta=-m,\ m<\sigma-1.$$

Чтобы при $\gamma-\alpha-\beta<0$ логариѳмы не вошли въ систему интеграловъ въ области точки 1, необходимо и достаточно, чтобы одно изъ чиселъ $\gamma-\alpha$, $\gamma-\beta$ было цѣлымъ отрицательнымъ числомъ (п. 8, $d$), численное значеніе котораго было бы меньше численнаго значенія $\gamma-\alpha-\beta$.

Если мы положимъ $\gamma-\alpha=-\mu$, $\mu<\alpha+\beta-\gamma$, то изъ неравенства $\gamma-\alpha>\gamma-\alpha-\beta$ найдемъ $0<-\beta$, $0>m$, что невозможно.

Если же положимъ $\gamma-\beta=-\mu$, $\mu<\alpha+\beta-\gamma$, то изъ неравенства

$$\gamma-\beta>\gamma-\alpha-\beta$$

найдемъ условіе $0>-\alpha$; $\alpha>0$; положимъ $\alpha=n$.

Въ области безконечнодалекой точки при указанныхъ значеніяхъ $\alpha$ и $\beta$ логариѳмы не войдутъ въ выраженіе интеграловъ ($\beta=$ отрицательному числу $-m$, $m<\alpha-\beta=n+m$).

Такимъ образомъ, при $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — цѣлыхъ числахъ и при

$$1-\gamma>0,\ \gamma-\alpha-\beta<0,$$

уравненіе $(H)$ имѣетъ общій интегралъ раціональный, если

$$\beta=-m,\ m<\sigma-1=1-\gamma;\ \alpha=n,\ n>0.$$

При этихъ значеніяхъ параметровъ уравненіе $(H)$ дѣйствительно имѣетъ 2 независимыхъ раціональныхъ интеграла:

$y_1=F(n,\ -m,\ 2-\sigma,\ x)$ — полиномъ степени $m$.

$y_2=(1-x)^{2-\sigma-n+m}F(2-\sigma-n,\ 2-\sigma+m,\ 3-\sigma-n+m,\ 1-x)$

— раціональная дробь.

Положимъ теперь

$$1-\gamma<0,\ \gamma-\alpha-\beta>0.$$

Чтобы въ области $x=0$ не вошли логариѳмы, необходимо и достаточно, чтобы одно изъ чиселъ $\alpha+1-\gamma$ или $\beta+1-\gamma$ было отрицательнымъ цѣлымъ числомъ, численное значеніе котораго было бы меньше $\gamma-1$. Положимъ

$$\alpha+1-\gamma=-\mu,\ \alpha=\gamma-1-\mu;\ \mu<\gamma-1,\ \alpha>0.$$

Чтобы въ области $x=1$ небыло логариѳмовъ, при $\gamma-\alpha-\beta>0$, необходимо и достаточно, чтобы одно изъ чиселъ $\alpha$ или $\beta$ было отрицательнымъ цѣлымъ числомъ, численное значеніе котораго меньше $\gamma-\alpha-\beta$. Но $\alpha>0$; поэтому можемъ только предположить

$$\beta=-\nu,\ \nu<\gamma-\alpha-\beta.$$

Раціональные интегралы въ этомъ случаѣ будутъ

$y_1=F(\gamma-1-\mu,\ -\nu,\ \gamma,\ x)$ — полиномъ степени $\nu$,

$y_2=x^{1-\gamma}F(-\mu,\ -\nu+1-\gamma,\ 2-\gamma,\ x)$ — раціональная дробь.

Такимъ же образомъ, при $1-\gamma<0$, $\gamma-\alpha-\beta<0$, найдемъ, что если положить $\alpha+1-\gamma=-\mu$, $\mu<\gamma-1$; $\gamma-\beta=-\nu$,

$\nu < \alpha + \beta - \gamma$, то будутъ существовать два независимые раціональные интегралы уравненія $(H)$

$$y_1 = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\mu+1, \ -\nu, \ -\gamma+\mu-\nu+2, \ 1-x)$$

$$y_2 = x^{1-\gamma} F(-\mu, \ \nu+1, \ 2-\gamma, \ x).$$

$b$) Разсмотримъ теперь случаи, когда уравненіе $(H)$ имѣетъ интегралъ, нѣкоторая степень котораго есть раціональная функція отъ $x$.

Такъ какъ интегралы уравненія $(H)$ не могутъ имѣть другихъ особенныхъ точекъ, кромѣ особенныхъ точекъ уравненія, то самый общій видъ искомаго интеграла долженъ быть

$$y = x^p (1-x)^q (A_0 + A_1 x + \ldots + A_r x^r)$$

$p$ и $q$—нѣкоторыя раціональныя числа, а $r$—цѣлое и положительное число.

Числа $p$, $q$, $r$ связаны между собой однимъ изъ соотношеній $p+q+r = -\alpha$ или $-\beta$. Положимъ

$$(1) \qquad p+q+r = -\alpha.$$

Относительно значеній $p$ и $q$ можно сдѣлать четыре предположенія:

$$p = 0, \ q = 0; \qquad\qquad p = 0, \ q = \gamma-\alpha-\beta;$$

$$p = 1-\gamma, \ q = 0; \qquad\qquad p = 1-\gamma, \ q = \gamma-\alpha-\beta.$$

1. Положимъ $p = 0$, $q = 0$; уравненіе (1) даетъ

$$r = -\alpha$$

и мы получаемъ очевидно рѣшеніе

$$y = F(-r, \beta, \gamma, x).$$

Если при этомъ окажется, что $\gamma =$ отрицательному цѣлому числу $= -s$, $s < r$, то рѣшеніе будетъ вида

$$y = x^{s+1} F(-r+1+s, \ \beta+s+1, \ s+2, \ x).$$

2. Пусть $p=0$, $q=\gamma-\alpha-\beta$. Изъ уравненія (1) найдемъ

$$\gamma-\beta=-r;$$

рѣшеніе искомаго вида будетъ

$$y=(1-x)^q F(\gamma-\alpha,\ -r,\ q+1,\ 1-x).$$

Если $\gamma+1-\alpha-\beta=q+1=-r-\alpha+1$ есть цѣлое отрицательное число $-s$, $s<r$, то $y=F(s-r+1,\ \beta,\ \gamma,\ x)$. Если еще $\gamma=-\sigma$, $\sigma<r-s-1$, то рѣшеніе будетъ

$$y=x^{1+\sigma} F(s-r+1+\sigma+2,\ \beta,\ 2+\sigma,\ x).$$

3. Если $p=1-\gamma$, $q=0$, то изъ соотношенія (1) имѣемъ

$$1-\gamma+r=-\alpha;\ \gamma-\alpha=r+1.$$

Поэтому рѣшеніе искомаго вида будетъ

$$y=x^p F(-r,\ \beta+p,\ p+1,\ x);$$

если $p+1=-\sigma$, $\sigma<r$, то $\alpha=\sigma-r+1$ и искомый интегралъ будетъ

$$y=F(\sigma-r+1,\ \beta,\ 2+\sigma,\ x).$$

4. Если $p=1-\gamma$, $q=\gamma-\alpha-\beta$, то уравненіе (1) даетъ

$$1-\alpha-\beta+r=-\alpha;\ \beta=r+1.$$

По виду приведенныхъ въ п. 6 интеграловъ $P, Q, R, S, T$ и $U$ нельзя рѣшить, будетъ ли въ этомъ случаѣ уравненіе $(H)$ дѣйствительно имѣть интегралъ указаннаго вида. Но не трудно провѣрить, что этому уравненію удовлетворитъ функція

$$y=x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(1-\alpha,\ 1-\beta,\ 2-\gamma,\ x);$$

Эта функція при указанныхъ значеніяхъ параметровъ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ обратится въ

$$y=x^p(1-x)^q F(1-\alpha,\ -r,\ p+1,\ x),$$

которая удовлетворяетъ условіямъ вопроса, если $2-\gamma=p+1$ не есть отрицательное число, по численному значенію меньше $r$. Если $p+1=-s$, $s<r$, то за $y$ можно принять функцію

$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x)=(1-x)^q F(2+s-\alpha, s-r+1, 2+s, x),$$

которая также удовлетворяетъ уравненію $(H)$.

$c$) На основаніи сдѣланныхъ выше замѣчаній весьма просто могутъ быть найдены условія, достаточныя и необходимыя для того, чтобы уравненіе $(H)$, въ которомъ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — числа раціональныя, а одно и только одно изъ чиселъ $1-\gamma$, $\gamma-\alpha-\beta$, $\alpha-\beta$ цѣлое, имѣло общій интегралъ алгебраическій.

Разсмотримъ для примѣра какой нибудь одинъ случай; пусть, напр., $\gamma-\alpha-\beta$ равно цѣлому числу $s$, $s>0$.

Чтобы общій интегралъ былъ алгебраическій, необходимо, чтобы системы независимыхъ интеграловъ не заключали логариѳмовъ; въ данномъ случаѣ, логариѳмы въ области точки 1 не войдутъ только тогда, если $\alpha$ или $\beta$ будетъ цѣлымъ отрицательнымъ числомъ, численное значеніе котораго меньше $s$. Пусть $\beta=-m$, $m<s$.

Въ такомъ случаѣ

$$\gamma-\alpha=s-m;\quad \alpha+1-\gamma=m-s+1 \gtreqless 0$$

Эти условія достаточны, потому что мы сейчасъ же получимъ два алгебраическихъ независимыхъ интеграла

$$y_1=F(\alpha, \ -m, \ \gamma, \ x);$$
$$y_2=x^{1-\gamma}F(m-s+1, \ -m+1-\gamma, \ 2-\gamma, \ x).$$

Если бы еще одно изъ чиселъ $1-\gamma$, $\alpha-\beta$ было цѣлое число, то вопросъ привелся бы къ разсмотрѣннымъ случаямъ раціональнаго общаго интеграла.

Вопросъ объ общемъ алгебраическомъ интегралѣ уравненія $(H)$ для того случая, когда ни одно изъ чиселъ $1-\gamma$, $\gamma-\alpha-\beta$, $\alpha-\beta$ не есть цѣлое, будетъ разсмотрѣнъ далѣе, въ главѣ III.

# ГЛАВА III.

1. Настоящая глава посвящена вопросу объ алгебраическихъ интегралахъ линейнаго уравненія 2$^{\text{аго}}$ порядка.

Алгебраическія функціи, оставаясь непрерывными на всей плоскости независимаго перемѣннаго, имѣютъ конечное число полюсовъ и алгебраическихъ особенныхъ точекъ и въ каждой точкѣ плоскости имѣютъ конечное число различныхъ значеній.

На основаніи положеній главы (I) и (II) можно легко указать, какія условія необходимы для того, чтобы линейное дифференціальное уравненіе (I) имѣло $n$ независимыхъ интеграловъ, слѣдовательно, и общій интегралъ, алгебраическіе.

Для этого, прежде всего, нужно:

1) чтобы въ области каждой особенной точки уравненія (I) всѣ интегралы его были правильные;

2) чтобы корни опредѣляющаго уравненія относительно каждой особенной точки были числа раціональныя;

3) чтобы въ области каждой особенной точки логариѳмы не входили въ выраженія интеграловъ и

4) чтобы число особенныхъ точекъ было конечное.

Эти условія однако недостаточны, такъ какъ и при соблюденіи ихъ число различныхъ значеній, получаемыхъ интеграломъ уравненія при обходѣ перемѣнной по всѣвозможнымъ контурамъ вокругъ особенныхъ точекъ, можетъ не быть конечнымъ.

Вопросъ объ алгебраическихъ интегралахъ линейныхъ уравненій приводится такимъ образомъ къ отысканію признаковъ, по которымъ возможно было бы судить, получаетъ ли какая нибудь система независимыхъ интеграловъ уравненія, удовлетворяющаго указаннымъ выше условіямъ, при всѣхъ возможныхъ сомкнутыхъ контурахъ, описываемыхъ независимой перемѣнной, конечное число различныхъ значеній, или безконечно большое.

Пусть $y_1, y_2, \ldots y_n$ будетъ какая нибудь система независимыхъ интеграловъ уравненія (I). Намъ уже извѣстно, что каждый интегралъ этой системы, при обходѣ независимой перемѣнной вокругъ одной или нѣсколькихъ особенныхъ точекъ, обращается въ линейную функцію остальныхъ

$$(1)\qquad [y_k] = A_{k,1} y_1 + A_{k,2} y_2 + \ldots + A_{k,n} y_n, \qquad k = 1, 2, \ldots n.$$

Слѣдовательно, *при каждомъ такомъ обходѣ независимой перемѣнной величины $y_1, y_2, \ldots y_n$ испытываютъ нѣкоторую линейную подстановку.*

Такого рода подстановки мы будемъ обозначать слѣдующимъ образомъ

$$(2)\qquad S = \left| \begin{array}{l} y_1, \ldots A_{1,1} y_1 + A_{1,2} y_2 + \ldots + A_{1,n} y_n \\ y_2, \ldots A_{2,1} y_1 + A_{2,2} y_2 + \ldots + A_{2,n} y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n, \ldots A_{n,1} y_1 + A_{n,2} y_2 + \ldots + A_{n,n} y_n \end{array} \right|.$$

Каждому контуру, описанному перемѣнной, отвѣчаетъ своя подстановка.

Если перемѣнная опишетъ сперва контуръ $A$, а затѣмъ контуръ $B$, которымъ соотвѣтствуютъ подстановки $S$ и $T$

$$S = \left| \begin{array}{l} y_1, \ldots \sum_1^n A_{1,k} y_k \\ y_2, \ldots \sum_1^n A_{2,k} y_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n, \ldots \sum_1^n A_{n,k} y_k \end{array} \right|, \quad T = \left| \begin{array}{l} y_1, \ldots \sum_1^n B_{1,k} y_k \\ y_2, \ldots \sum_1^n B_{2,k} y_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n, \ldots \sum_1^n B_{n,k} y_k \end{array} \right|,$$

то система интеграловъ $y_1, y_2, \ldots y_n$ въ результатѣ испытаетъ подстановку $TS$, равную произведенію подстановокъ $S$ и $T$

$$TS = \left| \begin{array}{l} y_1, \ldots \sum_1^n A_{1,k} \sum_1^n B_{k,m} y_m = \sum_1^n C_{1,j} y_j \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n, \ldots \sum_1^n A_{n,k} \sum_1^n B_{k,m} y_m = \sum_1^n C_{n,j} y_j \end{array} \right| .$$

Совокупность подстановокъ, соотвѣтствующихъ всѣмъ возможнымъ контурамъ, описываемымъ перемѣнной около особенныхъ точекъ, составитъ группу *).

Если число различныхъ подстановокъ (т. е. число различныхъ системъ значеній величинъ $A_{j,k}$ въ $S$), входящихъ въ группу (порядокъ ея)—конечно, то, очевидно, число различныхъ значеній, получаемыхъ интегралами независимой системы, будетъ конечно; и наоборотъ. Поэтому, *условіе достаточное и необходимое для того, чтобы общій интегралъ даннаго дифференціальнаго линейнаго уравненія, удовлетворяющаго всѣмъ указаннымъ выше необходимымъ условіямъ, былъ алгебраическимъ, заключается въ томъ, чтобы группа линейныхъ подстановокъ, испытываемыхъ интегралами нѣкоторой независимой системы при всѣхъ возможныхъ сомкнутыхъ контурахъ, описываемыхъ независимой перемѣнной, была конечнаго порядка.*

Построеніе группъ конечнаго порядка линейныхъ подстановокъ (т. е. опредѣленіе числа подстановокъ и значеній коэффиціентовъ $A_{j,k}$) съ $n$ перемѣнными представляется вопросомъ чрезвычайно сложнымъ.

Мы ограничимся построеніемъ группъ конечнаго порядка съ двумя перемѣнными и разсмотрѣніемъ алгебраическихъ интеграловъ уравненія $2^{\text{аго}}$ порядка.

2. Сдѣлаемъ предварительно нѣсколько общихъ замѣчаній относительно уравненій $2^{\text{аго}}$ порядка, допускающихъ алгебраическіе интегралы.

---

*) Группой мы будемъ называть рядъ подстановокъ, обладающій тѣмъ свойствомъ, что произведеніе какихъ угодно подстановокъ ряда будетъ принадлежать тому же ряду.

Пусть дано уравненіе

$$(A) \qquad y'' + py' + qy = 0.$$

Чтобы это уравненіе имѣло всѣ интегралы правильные, а число особенныхъ точекъ конечное, необходимо (п. 3, гл. II), чтобы

$$(1) \qquad p = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\alpha_k}{x-a_k}, \quad q = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\beta_k}{(x-a_k)^2} + \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\gamma_k}{x-a_k}, \quad \sum \gamma_k = 0\ ^{*}).$$

Опредѣляющее уравненіе относительно особенной точки уравненія $a_k$ будетъ

$$\rho(\rho-1) + \alpha_k \rho + \beta_k = 0.$$

Оба корня этого уравненія должны быть раціональны, поэтому числа $\alpha_k$ и $\beta_k$ должны быть также раціональны.

Подставимъ въ уравненіе $(A)$

$$(2) \qquad y = e^{-\frac{1}{2}\int p\,dx} u = \prod_{k=1}^{k=m} \left(x - a_k\right)^{-\frac{\alpha_k}{2}} u.$$

Оно обратится въ

$$u'' - \left(\frac{1}{2}p' + \frac{1}{4}p^2 - q\right) u = 0$$

$$(B) \qquad u'' = Pu, \quad P = \frac{1}{2}p' + \frac{1}{4}p^2 - q.$$

Такимъ образомъ, *если $(A)$ имѣетъ всѣ интегралы алгебраическіе, то числа $\alpha_k$ и $\beta_k$ — раціональныя, и интегралы уравненія $(B)$ всѣ алгебраическіе; легко убѣдиться, что и наоборотъ, если всѣ интегралы уравненія $(B)$ алгебраическіе, а числа $\alpha_k$, $\beta_k$—раціональныя, то уравненіе $(A)$ имѣетъ всѣ интегралы алгебраическіе.*

Разсмотрѣніе алгебраическихъ интеграловъ уравненія $(B)$ вмѣсто уравненія $(A)$, при указанномъ выше приведеніи вопроса къ построенію группъ линейныхъ подстановокъ конечнаго порядка, имѣетъ одно важное удобство.

---

*) Иначе въ области $\infty$ интегралы будутъ неправильные.

Пусть $u_1$ и $u_2$—два независимыхъ интеграла уравненія ($B$); какъ мы видѣли (п. 16 гл. I) опредѣлитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1', & u_1 \\ u_2', & u_2 \end{vmatrix} = C e^{-\int p_1 dx} = C.$$

Если перемѣнная независимая опишетъ нѣкоторый сомкнутый контуръ вокругъ одной или нѣсколькихъ особенныхъ точекъ, то, какъ извѣстно, $u_1$ и $u_2$ обратятся

$$[u_1] = \alpha u_1 + \beta u_2, \quad [u_2] = \gamma u_1 + \delta u_2.$$

Составляя для $[u_1]$ и $[u_2]$ опредѣлитель $\Delta$, найдемъ

$$C = \begin{vmatrix} [u_1]', & [u_1] \\ [u_2]', & [u_2] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1', & u_1 \\ u_2', & u_2 \end{vmatrix} = (\alpha\delta - \beta\gamma)\, C;$$

слѣдовательно опредѣлитель

$$(3) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

каковъ бы ни былъ описанный независимой перемѣнной контуръ.

Такъ какъ задача объ алгебраическихъ интегралахъ приводится, какъ выше указано, къ нахожденію всѣхъ возможныхъ системъ значеній $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, дающихъ группы конечнаго порядка, то соотношеніе (3) облегчаетъ рѣшеніе вопроса.

Если основное уравненіе $\Omega = 0$ (гл. I, п. 11) относительно какой нибудь особенной точки уравненія ($B$) имѣетъ два различныхъ корня $\omega_1$ и $\omega_2$, то въ области этой точки существуетъ два независимыхъ интеграла, которые, при обходѣ независимой перемѣнной вокругъ особенной точки, обращаются

$$(4) \qquad [u_1] = \omega_1 u_1, \quad [u_2] = \omega_2 u_2.$$

Если же уравненіе $\Omega = 0$ имѣетъ двукратный корень $\omega$, то, на основаніи изложенныхъ въ п. 13 гл. I положеній, могутъ представиться два случая:

$$(5) \qquad [u_1] = \omega u_1, \quad [u_2] = \omega u_2 + u_1$$

$$(6) \qquad [u_1] = \omega u_1, \quad [u_2] = \omega u_2.$$

Если имѣетъ мѣсто первый случай, то въ выраженіе интеграла $u_2$ въ области особенной точки войдутъ логариѳмы, и поэтому общій интегралъ уже не можетъ быть алгебраическою функціей.

Равнымъ образомъ, если $\omega_1$, $\omega_2$ и $\omega$ въ формулахъ (4) и (6) не будутъ корнями изъ единицы, то очевидно, что интегралы $u_1$ и $u_2$ при обходахъ независимой перемѣнной вокругъ разсматриваемой особенной точки получатъ безконечное число различныхъ значеній и поэтому не будутъ уже алгебраическими функціями.

Будемъ говорить, что подстановка

$$S = \begin{vmatrix} u_1, \ldots \alpha u_1 + \beta u_2 \\ u_2, \ldots \gamma u_1 + \delta u_2 \end{vmatrix}$$

приведена къ каноническому виду, если $S$ представляется въ видѣ

$$S = \begin{vmatrix} u_1, \ldots \omega_1 u_1 \\ u_2, \ldots \omega_2 u_2 \end{vmatrix}.$$

На основаніи сдѣланныхъ въ настоящемъ пунктѣ замѣчаній мы въ дальнѣйшемъ *можемъ ограничиться изслѣдованіемъ группъ конечнаго порядка, составленныхъ изъ линейныхъ подстановокъ съ 2 перемѣнными, имѣющихъ опредѣлитель равный единицѣ; подстановки эти, по приведеніи ихъ къ каноническому виду, будутъ вида или*

$$S = \begin{vmatrix} u_1, \ldots \omega_1 u_1 \\ u_2, \ldots \omega_2 u_2 \end{vmatrix}, \text{ или } S' = \begin{vmatrix} u_1, \ldots \omega u_1 \\ u_2, \ldots \omega u_2 \end{vmatrix},$$

*гдѣ числа $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega$ — корни изъ единицы*:

Подстановки вида $S$, соотвѣтствующія формуламъ (4), мы будемъ называть обыкновенными; подстановки вида $S'$, соотвѣтствующія формуламъ (6) — элементарными.

Относительно этихъ послѣднихъ замѣтимъ, что такъ какъ опредѣлитель для каждой подстановки равенъ единицѣ, то

$$\omega^2 = 1, \quad \omega = \pm 1.$$

Подстановки

$$\begin{vmatrix} u_1, \ldots u_1 \\ u_2, \ldots u_2 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} u_1, \ldots -u_1 \\ u_2, \ldots -u_2 \end{vmatrix}$$

мы назовемъ соотвѣтственно положительной (или тождественной) и отрицательной элементарными подстановками; первая изъ нихъ войдетъ въ каждую группу линейныхъ подстановокъ.

Мы будемъ говорить, что обыкновенная линейная подстановка $S$—порядка $m$, если $S^m$ представляетъ которую нибудь изъ элементарныхъ подстановокъ, а $S^k$ для всякаго $k < m$ — обыкновенную подстановку *).

3. Обратимся теперь къ разсмотрѣнію различныхъ типовъ группъ линейныхъ подстановокъ конечнаго порядка.

*Чтобы двѣ обыкновенныя линейныя подстановки $S$ и $T$ съ двумя перемѣнными $y_1$ и $y_2$ были обмѣнивающіяся (échangeables) **), необходимо и достаточно, чтобы онѣ одновременно приводились къ каноническому виду.*

Приведемъ $S$ къ каноническому виду; пусть при этомъ

$$S = \begin{vmatrix} y_1, \ldots a y_1 \\ y_2, \ldots b y_2 \end{vmatrix}, \; T = \begin{vmatrix} y_1, \ldots \alpha y_1 + \beta y_2 \\ y_2, \ldots \gamma y_1 + \delta y_2 \end{vmatrix}, \; ab = 1, \quad a \text{ неравно } b.$$

Произведенія

$$TS = \begin{vmatrix} y_1, \ldots a(\alpha y_1 + \beta y_2) \\ y_2, \ldots b(\gamma y_1 + \delta y_2) \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad ST = \begin{vmatrix} y_1, \ldots \alpha a y_1 + \beta b y_2 \\ y_2, \ldots \gamma a y_1 + \delta b y_2 \end{vmatrix}$$

по условію равны. Такъ какъ $a$ неравно $b$, то это, очевидно, можетъ случиться только тогда, если одновременно

$$\beta = 0, \quad \gamma = 0.$$

---

*) $S^0 = 1$ представляетъ, по общепринятому порядку, тождественную подстановку.

**) Мы будемъ называть двѣ подстановки $T$ и $S$ обмѣнивающимися, если произведенія $TS$ и $ST$ равны.

Слѣдовательно $T$ имѣетъ видъ

$$\begin{vmatrix} y_1, \dots \alpha y_1 \\ y_2, \dots \delta y_2 \end{vmatrix}.$$

Въ группахъ конечнаго порядка числа $a$, $b$, $\alpha$, $\delta$ суть корни изъ единицы.

Изъ этой теоремы вытекаетъ, что если подстановки $A$ и $B$ обмѣнивающіяся съ подстановкой $C$, то они обмѣнивающіяся и между собой. Кромѣ того изъ доказательства теоремы легко убѣдиться, что элементарныя подстановки — обмѣнивающіяся съ каждой линейной подстановкой.

Доказанная теорема даетъ возможность выдѣлить самый простой типъ группъ конечнаго порядка; который мы будемъ называть первымъ (I): группа состоитъ изъ обмѣнивающихся подстановокъ $S_k$, приводящихся одновременно къ каноническому виду

$$S_k = \begin{vmatrix} y_1, \dots a_k y_1 \\ y_2, \dots b_k y_2 \end{vmatrix}, \qquad a_k b_k = 1.$$

Числа $a_k$ и $b_k$ суть корни изъ единицы; пусть, напр. $a_k^{m_k} = 1$; если мы наименьшее кратное чиселъ $m_k$ обозначимъ черезъ $m$, а корень $m^{\text{ой}}$ степени изъ единицы — черезъ $\varepsilon$, то *всѣ подстановки группы будутъ имѣть видъ*

(I) $$S_k = S^k = \begin{vmatrix} y_1, \dots \pm \varepsilon^k \; y_1 \\ y_2, \dots \pm \varepsilon^{-k} y_2 \end{vmatrix} {}^{*)} \qquad k = 1, 2, \dots m.$$

Обозначимъ черезъ $\eta$ отношеніе интеграловъ $y_1$ и $y_2$,

$$\eta = \frac{y_1}{y_2}.$$

Если къ $y_1$ и $y_2$ приложимъ всѣ подстановки указанной группы, то $\eta$ испытаетъ подстановки, которыя мы обозначимъ:

(C) $$\eta' = \varepsilon^{2k} \eta, \qquad k = 1, 2, \dots m.$$

---

*) Нижній знакъ (—) отпадетъ, если группа не содержитъ отрицательной элементарной подстановки.

Не трудно замѣтить, что разсмотрѣнная нами группа линейныхъ подстановокъ соотвѣтствуетъ дифференціальному линейному уравненію $2^{\underline{аго}}$ порядка, имѣющему два независимыхъ интеграла, изъ которыхъ каждый есть корень раціональной функціи.

4. *Пусть $G$ есть группа перваго типа, заключающая хоть одну обыкновенную подстановку; пусть подстановки ея приведены къ каноническому виду; группа $G'$, конечнаго порядка, перестановочная (permutable)* *) *съ $G$, будетъ заключать или только приведенныя къ каноническому виду подстановки, или, кромѣ нихъ, еще и подстановки вида*

$$\begin{vmatrix} y_1, \dots \beta y_2 \\ y_2, \dots \gamma y_1 \end{vmatrix} \qquad -\beta\gamma=1.$$

Пусть $S$—одна изъ обыкновенныхъ подстановокъ группы $G$

$$S=\begin{vmatrix} y_1, \dots a y_1 \\ y_2, \dots b y_2 \end{vmatrix}; \qquad a \text{ неравно } b.$$

Пусть $T=\begin{vmatrix} y_1, \dots \alpha y_1+\beta y_2 \\ y_2, \dots \gamma y_1+\delta y_2 \end{vmatrix}$ — подстановка группы $G'$.

По условію, группа $G'$ перестановочна съ $G$; поэтому подстановка

$$T^{-1}ST=\begin{vmatrix} y_1, \dots (\alpha\delta a-\beta\gamma b)\, y_1-\alpha\beta\,(a-b)\, y_2 \\ y_2, \dots \gamma\delta\,(a-b)\, y_1+(\alpha\delta b-\beta\gamma a)\, y_2 \end{vmatrix}$$

должна имѣть видъ

$$S'=\begin{vmatrix} y_1, \dots a' y_1 \\ y_2, \dots b' y_2 \end{vmatrix}.$$

---

*) Операцію $T^{-1}\,ST$ мы будемъ называть преобразованіемъ $S$ черезъ $T$. Группа $G'$ перестановочна съ $G$, если каждая подстановка $T$ первой группы преобразовываетъ каждую подстановку $S$ второй группы въ подстановку, принадлежащую этой послѣдней (т. е. $T^{-1}ST=S'$, гдѣ $S'$ входитъ въ группу $G$).

Это можетъ имѣть мѣсто только въ двухъ случаяхъ:

1) $\beta=0$, $\gamma=0$, $\alpha$ и $\delta$ не нули. 2) $\alpha=0$, $\delta=0$, $\beta$ и $\gamma$ не нули.

Въ первомъ случаѣ

$$T=\left|\begin{matrix} y_1, \dots \alpha y_1 \\ y_2, \dots \delta y_2 \end{matrix}\right|, \qquad \alpha\delta=1,$$

т. е. имѣетъ также каноническій видъ.

Во второмъ случаѣ

$$T=\left|\begin{matrix} y_1, \dots \beta y_2 \\ y_2, \dots \gamma y_1 \end{matrix}\right|, \qquad \beta\gamma=-1,$$

что и требовалось доказать.

Всегда возможно, не измѣняя каноническаго вида подстановокъ $G$, считать $\beta=1$, а слѣдовательно $\gamma=-1$.

Подстановку вида $T$ мы будемъ называть обращенною. Легко замѣтить, что если обращенная подстановка входитъ въ группу, то послѣдняя заключаетъ и отрицательную подстановку.

Доказанная теорема даетъ намъ возможность установить второй (II) типъ группъ линейныхъ подстановокъ конечнаго порядка.

Группа втораго типа состоитъ изъ группы $G$ типа (I) и произведеній подстановокъ группы $G$ на обращенную подстановку. *Общій видъ подстановокъ группы этого типа будетъ*

$$S_k=S^k=\left|\begin{matrix} y_1, \dots \pm\varepsilon^k\ y_1 \\ y_2, \dots \pm\varepsilon^{-k}\ y_2 \end{matrix}\right| \text{ и } T_k=\left|\begin{matrix} y_1, \dots \pm\varepsilon^k\ y_2 \\ y_2, \dots \mp\varepsilon^{-k}\ y_1 \end{matrix}\right|, \quad \varepsilon^m=1, \quad k=1,2,\dots m.$$

Группа неоднородныхъ подстановокъ будетъ состоять изъ подстановокъ вида:

$$(D.\,P.) \qquad \eta'=\varepsilon^{2k}\eta, \quad \eta'=-\frac{\varepsilon^{2k}}{\eta}, \qquad k=1,2,\dots m.$$

5. Обращаясь къ построенію группъ болѣе сложнаго характера, докажемъ прежде всего слѣдующую лемму.

*Всякая группа конечнаго порядка, не заключающая въ себѣ обращенной подстановки, будетъ перваго типа* (I).

Пусть $G$ будетъ группа конечнаго порядка $N$; пусть $S$ одна изъ обыкновенныхъ подстановокъ группы $G$.

Приведемъ $S$ къ каноническому виду; къ тому же виду приведутся и всѣ подстановки $G$, обмѣнивающіяся съ $S$; совокупность ихъ составитъ нѣкоторую группу $F$, заключающуюся въ $G$; въ нее войдетъ и отрицательная подстановка, если она входитъ въ группу $G$. Порядокъ $F$ обозначимъ черезъ $\mu m$, гдѣ $\mu = 1$ или 2, смотря по тому, входитъ ли отрицательная подстановка или нѣтъ.

Возьмемъ теперь подстановку $S'$, не входящую въ $F$, и соберемъ въ одну группу всѣ подстановки $G$, обмѣнивающіяся съ $S'$; обозначимъ новую группу черезъ $F'$; въ нее войдетъ и отрицательная подстановка, если она входитъ въ $G$; но общихъ обыкновенныхъ подстановокъ группы $F$ и $F'$ не могутъ имѣть. Пусть, напр., обыкновенная подстановка $T$ содержится въ $F$ и $F'$; подстановки $F$, обмѣнивающіяся съ $T$, будутъ обмѣнивающимися съ подстановками $F'$, съ которыми обмѣнивается $T$ (п. 3); поэтому $F$ заключается въ $F'$; такимъ же образомъ убѣдимся, что $F'$ заключается въ $F$, и слѣдовательно $F$ и $F'$ тождественны, что противно положенію, что $S'$ не входитъ въ $F$.

Взявъ подстановку $S''$, не входящую въ $F$ и $F'$, составимъ группу обмѣнивающихся подстановокъ $F''$, которая также не будетъ имѣть общихъ обыкновенныхъ подстановокъ съ $F$ и $F'$; такимъ путемъ мы можемъ исчерпать всѣ подстановки группы $G$, которая разложится на рядъ группъ $F$, $F'$, $F''$ . . . . , не имѣющихъ общихъ обыкновенныхъ подстановокъ.

Теперь произведемъ группировку подстановокъ группы $G$ другимъ способомъ.

Возьмемъ которую нибудь изъ выше указанныхъ группъ обмѣнивающихся подстановокъ, напр. $F$, и будемъ преобразовывать ее всѣми подстановками группы $G$.

Мы получимъ, по числу подстановокъ $G$, $N$ группъ $F, F_1, F_2, \ldots F_{N-1}$, изъ которыхъ каждая будетъ состоять изъ обмѣнивающихся подстановокъ (такъ какъ какова бы ни была подстановка $T$, если подстановки $S$ и $S'$—обмѣнивающіяся, т. е. если $SS' = S'S$, то $T^{-1}ST$ и $T^{-1}S'T$ будутъ очевидно обладать тѣмъ же свойствомъ). Но между этими группами будетъ по $\mu m$ тождественныхъ ($\mu m =$ порядку группы $F$). Въ самомъ дѣлѣ, группа $G$ можетъ быть представлена слѣдующей таблицей:

$$\begin{array}{llll}
A_0=1, & S_1, & S_2, \ldots\ldots\ldots & S_{\frac{N}{\mu m}-1} \\
A_1, & A_1 S_1, & A_1 S_2, \ldots\ldots & A_1 S_{\frac{N}{\mu m}-1} \\
A_2, & A_2 S_1, & A_2 S_2, \ldots\ldots & . \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
A_{\mu m-1}, & A_{\mu m-1} S_1, & A_{\mu m-1} S_2, \ldots & A_{\mu m-1} S_{\frac{N}{\mu m}-1},
\end{array}$$

гдѣ $A_0, A_1, \ldots A_{\mu m-1}$—подстановки группы $F$, а $S_1, S_2, \ldots S_{\frac{N}{\mu m}-1}$ суть обыкновенныя подстановки $G$, выбранныя такъ, чтобы каждая изъ нихъ не заключалась ни въ одномъ изъ предшествующихъ столбцевъ. Не трудно убѣдиться, что эта таблица заключаетъ всѣ подстановки $G$ и притомъ по одному разу.

Группы, получаемыя преобразованіемъ группы $F$ съ помощью подстановокъ одного и того же столбца, будутъ тождественны; чтобы это установить, стоитъ только замѣтить, что $A_j^{-1} A_l A_j$ и $A_i^{-1} A_n A_i$, для всякихъ значеній $i$, $j$, $l$ и $n$ находятся въ первомъ столбцѣ и что поэтому подстановки

$$(A_j S_k)^{-1} A_l A_j S_k = S_k^{-1} A_j^{-1} A_l A_j S_k$$

и

$$(A_i S_k)^{-1} A_n A_i S_k = S_k^{-1} A_i^{-1} A_n A_i S_k$$

войдутъ въ одну группу—преобразованіе подстановокъ $A$ подстановкой $S_k$.

Вмѣстѣ съ тѣмъ группы, представляющія преобразованія $F$ съ помощью подстановокъ различныхъ столбцовъ, навѣрно будутъ различны.

Обозначимъ $\frac{N}{\mu m}$ различныхъ группъ, полученныхъ изъ $F$ указаннымъ образомъ, черезъ $F, F_1, F_2, \ldots F_{\frac{N}{\mu m}-1}$.

Рядъ группъ $F, F_1, F_2, \ldots$ можетъ не исчерпывать всего ряда группъ $F, F', F'', \ldots$. Положимъ $F'$ не заключается въ ряду $F, F_1, F_2, \ldots$. Въ такомъ случаѣ, преобразовывая подстановки $F'$

подстановками группы $G$, получимъ $\frac{N}{\mu m}$ различныхъ группъ обмѣнивающихся подстановокъ $F'$, $F_1'$, $F_2'$, . . ., порядка $\mu m'$ каждая.

Продолжая далѣе такимъ же образомъ, мы исчерпаемъ весь рядъ $F$, $F'$, $F''$, . . . и слѣдовательно всю группу $G$.

Въ каждой группѣ $F$, $F_1$, $F_2$, . . . число обыкновенныхъ подстановокъ равно $\mu m - \mu = \mu(m-1)$; число этихъ группъ ровно $\frac{N}{\mu m}$; поэтому число различныхъ обыкновенныхъ подстановокъ, заключающихся въ группахъ ряда $F$, $F_1$, $F_2$, . . . будетъ

$$\frac{N}{\mu m}\mu(m-1) = \frac{N}{m}(m-1).$$

Такимъ же образомъ найдемъ, что число различныхъ подстановокъ, заключающихся въ группахъ $F'$, $F_1'$, $F_2'$ . . . будетъ

$$\frac{N}{\mu m'}\mu(m'-1) = \frac{N}{m'}(m'-1) \qquad \text{и т. д.}$$

$N$ — общее число подстановокъ групы $G$, будетъ

$$N = \mu + \frac{N}{m}(m-1) + \frac{N}{m'}(m'-1) + \ldots \tag{1}$$

$$N = \frac{\mu}{1-\left(1-\frac{1}{m}+1-\frac{1}{m'}+\ldots\right)} \tag{2}$$

$N$—цѣлое число, положительное и конечное; тоже и числа $m$, $m'$, и т. д. Чтобы $N$, опредѣляемое формулой (2), удовлетворило этимъ условіямъ, необходимо, чтобы въ знаменателѣ въ скобкахъ заключался только одинъ членъ $1-\frac{1}{m}$; но тогда $N = \mu m$ и вся группа $G$ совпадаетъ съ группой $F$ перваго типа, что и требовалось доказать.

6. *Пусть $G$ есть группа конечнаго порядка $N$, непринадлежащая ни къ первому, ни ко второму типу; въ такомъ случаѣ $N = 2r$, гдѣ $r$ равно 12, 24 или 60.*

Для доказательства теоремы мы воспользуемся тѣмъ же способомъ подсчета числа подстановокъ, входящихъ въ группу $G$, который былъ подробно изложенъ въ предъидущемъ пунктѣ. Разница будетъ лишь въ томъ, что въ группу $G$ теперь навѣрно входитъ и обращенная подстановка относительно какой нибудь изъ заключающихся въ $G$

группъ обмѣнивающихся подстановокъ. Пусть $F$ будетъ та группа обмѣнивающихся подстановокъ, относительно которой въ $G$ существуетъ обращенная подстановка. Если мы будемъ преобразовывать ее подстановками $G$, то число различныхъ группъ порядка $2m$ *) будетъ вдвое меньше, такъ какъ не только подстановки каждаго столбца (стр. 94) будутъ давать тождественныя группы, но и произведенія этихъ подстановокъ на обращенную относительно $F$ подстановку дадутъ такія же группы.

Формулы (1) и (2) предъидущаго пункта примутъ въ настоящемъ случаѣ видъ

$$(1)\qquad N=2+\frac{N}{2m}(m-1)+\frac{N}{k'm'}(m'-1)+\frac{N}{k''m''}(m''-1)+\ldots,\qquad k',k'',\ldots=1 \text{ или } 2.$$

$$(2)\qquad N=\frac{2}{1-\frac{1}{2m}(m-1)-\frac{1}{k'm'}(m'-1)-\frac{1}{k''m''}(m''-1)-\ldots}.$$

Числа $N$, $m$, $m'$, $m''$ . . . цѣлыя положительныя; $N > 2m$, $2m'$, $2m''$, . . . . Поэтому число членовъ отрицательныхъ не можетъ быть болѣе 3 $\left(\text{каждый изъ нихъ} \geqq \frac{1}{4}\right)$. Разсматривая отдѣльно случаи, когда число этихъ членовъ равно 1, 2 или 3, приходимъ къ слѣдующимъ заключеніямъ:

$a$) случай одного члена невозможенъ, такъ какъ тогда $N \leqq 2m$, что противно положенію;

$b$) если въ знаменателѣ два члена и $k'=2$, то $N \leqq 2m$, что противно положенію; если же $k'=1$, то $m'$ должно быть равно 3, а $m=2$; слѣдовательно

$$N=2.12;$$

$c$) если въ знаменателѣ три отрицательныхъ члена, то ни одно изъ чиселъ $k'$ и $k''$ не можетъ быть равнымъ единицѣ, такъ какъ въ такомъ случаѣ $N$ было бы $< 0$; при $k'=k''=2$, одно изъ чиселъ $m$, $m'$ и $m''$, напр. $m''$ должно быть равно 2, другое, напр., $m'=3$, и третье $m$ можетъ быть равнымъ 3, 4 и 5.

---

*) $\mu=2$, такъ какъ теперь, на основаніи одного замѣчанія п. 4, отрицательная подстановка должна входить въ группу $G$.

Всѣ прочія предположенія ведутъ къ противорѣчіямъ.

При указанныхъ значеніяхъ чиселъ $m$, $m'$ и $m''$ $N$ соотвѣтственно равно

$$N = 2.12,\ 2.24,\ 2.60.$$

что и требовалось доказать.

Каждому значенію $N$ соотвѣтствуетъ особый типъ группъ линейныхъ подстановокъ конечнаго порядка.

7. Теперь обратимся къ опредѣленію вида подстановокъ, входящихъ въ группы порядка $N = 2r = 2.12,\ 2.24,\ 2.60$, не принадлежащія первымъ двумъ типамъ; изслѣдованіе это мы поведемъ въ слѣдующемъ порядкѣ: вмѣстѣ съ группою $G$ порядка $2r$ будемъ разсматривать группу $g$ соотвѣтственныхъ неоднородныхъ подстановокъ $\left(\eta = \frac{y_1}{y_2}\right)$, порядка $r$; группа $g$, очевидно, изоморфна *) съ $G$. По особымъ для каждаго значенія числа $r$ соображеніямъ мы убѣдимся, что группа $g$ состоитъ изъ $s$ группъ обмѣнивающихся подстановокъ, по $t$ членовъ въ каждой. Обозначимъ эти группы, взятыя въ какой нибудь послѣдовательности, буквами $\alpha_1, \alpha_1, \ldots \alpha_s$. Будемъ подстановки $g$ преобразовывать ея же подстановками; подстановки, входящія въ одну изъ группъ $\alpha$, послѣ преобразованія составятъ опять какую нибудь группу того же ряда; такимъ образомъ послѣ каждаго преобразованія буквы $\alpha$ будутъ получать новыя размѣщенія; каждой подстановкѣ $g$ будетъ соотвѣтствовать подстановка, измѣняющая одно размѣщеніе буквъ $\alpha$ въ другое; совокупность всѣхъ такихъ подстановокъ, соотвѣтствующихъ всѣмъ подстановкамъ $g$, составитъ нѣкоторую группу Г. Новая группа, очевидно, изоморфна съ $g$ и $G$; она будетъ кромѣ того транзитивна **). Число $s$, какъ мы увидимъ дальше, равно 4 или 6, а порядокъ Г — 12 и 24 въ первомъ случаѣ и 60 во второмъ; построеніе группъ подстановокъ изъ 4 и 6 буквъ, порядка 12, 24 и 60 — вполнѣ извѣстно; пользуясь соотношеніями,

*) Если каждой подстановкѣ группы $A$ соотвѣтствуетъ одна или нѣсколько подстановокъ группы $B$ и, вмѣстѣ съ тѣмъ, если произведенію двухъ подстановокъ $A$ соотвѣтствуетъ произведеніе соотвѣтственныхъ подстановокъ $B$, то говорятъ, что группы $A$ и $B$ изоморфны.

**) Группа называется транзитивной, если подстановки ея позволяютъ хоть одной изъ буквъ занять мѣсто каждой изъ остальныхъ; порядокъ транзитивной группы подстановокъ между $k$ буквами всегда есть кратное числа $k$.

существующими между подстановками такой группы и благодаря изоморфности Г, $g$ и $G$, мы и составимъ подстановки двухъ послѣднихъ группъ.

Предварительно сдѣлаемъ слѣдующія два замѣчанія:

*a*) Группа $g$ не можетъ заключать въ себѣ группы, порядокъ которой есть число простое, и которая была бы перестановочна со всѣми подстановками $g$. Въ самомъ дѣлѣ, пусть существуетъ такая группа $g'$; она представитъ степени одной подстановки; соотвѣтствующая въ $G$ группа будетъ состоять также изъ степеней одной подстановки, взятыхъ со знакомъ $\pm$; съ ней будутъ перестановочны всѣ подстановки $G$ — поэтому $G$ будетъ втораго типа, что противорѣчитъ положенію.

*b*) Пусть $N$ нѣкоторое конечное число, содержащее множителемъ простое число $n$ въ степени $\alpha$; всякая группа подстановокъ порядка $N$ будетъ заключать въ себѣ $np+1$ группъ порядка $n^\alpha$ и число $N$ представится въ видѣ $n^\alpha \nu (np+1)$, гдѣ $n^\alpha \nu$ есть порядокъ самой общей группы, входящей въ данную группу и перестановочной со всѣми ея подстановками.

Теорема эта есть обобщеніе извѣстной теоремы Cauchy; она доказана впервые Sylow'ымъ въ V т. Mathematische Annalen. Другое доказательство дано Frobenius'омъ въ Crelle's Journal, B. 100, S. 179—181.

Теперь мы можемъ обратиться къ построенію группъ каждаго изъ указанныхъ типовъ.

8. $N = 2.12$, $r = 12$.

По теоремѣ Sylow'а должно быть

$$12 = 3\,\nu (3p+1).$$

Единственныя возможныя для $\nu$ и $p$ значенія: $\nu = 1$, $p = 1$; группа $g$ заключаетъ поэтому 4 группы $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$ обмѣнивающихся подстановокъ, порядка 3-яго каждая ($s = 4$, $t = 3$). Порядокъ $\mu$ группы Г подстановокъ изъ 4 буквъ, изоморфной съ $g$ и $G$ и транзитивной, долженъ быть, съ одной стороны, кратнымъ отъ 4, съ другой — дѣлителемъ 12; такимъ образомъ $\mu = \frac{12}{l}$, гдѣ $l$, на основаніи предъидущаго, или 3, или 1. Если бы $l$ было равно 3, то каждой подстановкѣ Г отвѣчало бы 3 подстановки $g$, которыя составляли бы группу. Подстановка Г, равная 1 (тождественная) — перестановочна со всей группой Г; соотвѣтствующія ей 3 подстановки $g$ были бы также перестановочны со всѣми подстановками $g$; но этого быть не можетъ; поэтому $l=1$ и $\mu=12$.

Изъ 4 буквъ $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, и $\alpha_4$ можно составить одну только транзитивную группу 12^аго^ порядка, — такъ называемую знакоперемѣнную группу*). Эта группа можетъ быть образована, какъ извѣстно и какъ не трудно убѣдиться непосредственнымъ составленіемъ ея, съ помощью слѣдующихъ трехъ подстановокъ:

$$A'=(\alpha_1\alpha_2)(\alpha_3\alpha_4),\ B'=(\alpha_2\alpha_3)(\alpha_1\alpha_4),\ C'=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=(\alpha_1\alpha_3)(\alpha_3\alpha_2),$$

соотвѣтственно 2, 2 и 3^аго^ порядковъ ($A'^2=B'^2=C'^2=1$).

Подстановкамъ $A'$, $B'$, $C'$ будутъ отвѣчать въ группѣ $g$ по одной подстановкѣ, а въ группѣ $G$ — по двѣ.

Обозначимъ одну изъ подстановокъ, соотвѣтствующихъ $A'$ въ группѣ $G$, черезъ $A$ и приведемъ её къ каноническому виду; пусть

$$A=\begin{vmatrix} y_1, \ldots ay_1 \\ y_2, \ldots by_2 \end{vmatrix}, \quad ab=1, \quad a \text{ неравно } b.$$

На основаніи условія $A'^2=1$, $A^2$ будетъ равно $\pm 1$, т. е.

$$A^2=\begin{vmatrix} y_1, \ldots a^2 y_1 \\ y_2, \ldots b^2 y_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1, \ldots \pm y_1 \\ y_2, \ldots \pm y_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} a^2=\pm 1;\ b^2=\pm 1. \\ a^2 b^2=a^4=1. \end{matrix}$$

Если $a^2=1$, то $a=\pm 1$; условіе $ab=1$ требуетъ, чтобы и $b$ было бы равно $\pm 1$, а это противорѣчитъ положенію, что $a$ неравно $b$; поэтому

$$a^2=-1;\ a=\pm i,\ b=\mp i.$$

---

*) Назовемъ круговую перестановку 2 буквы $\alpha$ и $\beta$ транспозиціей и обозначимъ черезъ $(\alpha\beta)$. Знакоперемѣнную группу составляютъ всѣ тѣ размѣщенія, которыя могутъ быть получены изъ первоначальнаго съ помощью четнаго числа транспозицій.

Такимъ образомъ за $A$ можетъ быть принята одна изъ подстановокъ

$$\left|\begin{matrix} y_1, \ldots & iy_1 \\ y_2, \ldots & -iy_2 \end{matrix}\right| \quad \text{или} \quad \left|\begin{matrix} y_1, \ldots & -iy_1 \\ y_2, \ldots & iy_2 \end{matrix}\right|,$$

изъ которыхъ каждая равна другой, умноженной на отрицательную элементарную подстановку. Мы въ дальнѣйшемъ примемъ за $A$ подстановку

$$A = \left|\begin{matrix} y_1, \ldots & iy_1 \\ y_2, \ldots & -iy_2 \end{matrix}\right|. \tag{1}$$

Пусть $B$ — одна изъ подстановокъ $G$, соотвѣтствующихъ подстановкѣ $B'$ группы $\Gamma$, и пусть

$$B = \left|\begin{matrix} y_1, \ldots & \alpha y_1 + \beta y_2 \\ y_2, \ldots & \gamma y_1 + \delta y_2 \end{matrix}\right|, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Соотношеніе $A'B' = B'A'$ или $B'^{-1}A'B' = A'$ показываетъ, что $B^{-1}AB = \pm A$, т. е.

$$B^{-1}AB = \left|\begin{matrix} y_1, \ldots & (\alpha\delta + \beta\gamma)\, iy_1 - 2i\alpha\beta\, y_2 \\ y_2, \ldots & 2i\gamma\delta\, y_1 - i(\alpha\delta + \beta\gamma)\, y_2 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} y_1, \ldots & \pm iy_1 \\ y_2, \ldots & \mp iy_2 \end{matrix}\right|.$$

Если бы $B^{-1}AB = + A$, то изъ уравненій

$$\alpha\delta + \beta\gamma = 1, \ \ \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \ \ \alpha\beta = 0, \ \ \gamma\delta = 0$$

слѣдовало бы

$$\beta = 0, \ \ \gamma = 0, \ \ \alpha\delta = 1; \ \text{и, т. к.} \ \ B'^2 = 1, \ \ B^2 = \pm 1, \ \text{то} \ \ \alpha^2 = \delta^2.$$

Но тогда $B$ совпадала бы или съ $A$, или съ $-A$, что невозможно. Поэтому надо считать

$$B^{-1}AB = -A.$$

Въ такомъ случаѣ получаются уравненія

$$\alpha\beta = 0, \ \ \gamma\delta = 0, \ \ \alpha\delta + \beta\gamma = -1, \ \ \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Кромѣ того, такъ какъ $B^2 = \pm 1$, то

$$\alpha = 0,\ \delta = 0,\ \beta\gamma = -1,$$

$$\beta^2 = \gamma^2,\ \beta = \pm 1,\ \gamma = \mp 1.$$

Для $B$ получаются два выраженія, изъ которыхъ каждое есть произведеніе другаго на отрицательную подстановку. Примемъ за $B$ подстановку

$$B = \begin{vmatrix} y_1, \dots & y_2 \\ y_2, \dots & -y_1 \end{vmatrix}.$$

Для опредѣленія подстановки $C$, соотвѣтствующей въ $G$ подстановкѣ $C'$ группы $\Gamma$, имѣемъ соотношенія

$$C'^{-1} A' C' = B',\ C'^{-1} B' C' = A' B'.$$

Откуда

$$C^{-1} AC = \pm B,\quad C^{-1} BC = \pm AB \quad \text{или} \quad AC = \pm CB,\quad BC = \pm CAB.$$

Изъ предъидущихъ замѣчаній ясно, что мы можемъ выбрать произвольно одинъ изъ знаковъ $\pm$ для $AC$ или $BC$. Положимъ $AC = BC$. Пусть

$$C = \begin{vmatrix} y_1, \dots \alpha y_1 + \beta y_2 \\ y_2, \dots \gamma y_1 + \delta y_2 \end{vmatrix}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

$$AC = \begin{vmatrix} y_1, \dots \alpha i y_1 - \beta i y_2 \\ y_2, \dots \gamma i y_1 - \delta i y_2 \end{vmatrix} = CB = \begin{vmatrix} y_1, \dots & \gamma y_1 + \delta y_2 \\ y_2, \dots & -(\alpha y_1 + \beta y_2) \end{vmatrix}.$$

Отсюда

$$\alpha i = \gamma,\quad \gamma i = -\alpha,\quad -\beta i = \delta,\quad -\delta i = -\beta.$$

$$BC = \begin{vmatrix} y_1, \dots \alpha y_2 - \beta y_1 \\ y_2, \dots \gamma y_2 - \delta y_1 \end{vmatrix} = \pm CAB = \begin{vmatrix} y_1, \dots \pm(-i)(\gamma y_1 + \delta y_2) \\ y_2, \dots \pm(-i)(\alpha y_1 + \beta y_2) \end{vmatrix},$$

откуда

$$-\beta = \mp i\gamma,\quad \gamma = \mp i\beta,\quad \alpha = \mp i\delta,\quad -\delta = \mp i\alpha.$$

Изъ полученныхъ соотношеній слѣдуетъ, что

$$\gamma = \alpha i, \quad \beta = \delta i, \quad \alpha = \mp \beta.$$

Такъ какъ $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, то $\alpha^2$, въ зависимости отъ того, будетъ ли $BC = \pm CAB$, получитъ соотвѣтственно слѣдующія значенія

$$\alpha^2 = \mp \frac{i}{2}, \quad \alpha = \pm \frac{1 \mp i}{2}.$$

Такимъ образомъ получаемъ для подстановки $C$ четыре вида:

$$\left| \begin{matrix} y_1, \ldots \pm \frac{1-i}{2}(y_1 - y_2) \\ y_2, \ldots \pm \frac{1+i}{2}(y_1 + y_2) \end{matrix} \right|, \quad \left| \begin{matrix} y_1, \ldots \pm \frac{1+i}{2}(y_1 + y_2) \\ y_2, \ldots \mp \frac{1-i}{2}(y_1 - y_2) \end{matrix} \right|.$$

Сейчасъ же можно убѣдиться, что группа $G$, содержащая подстановки $A$, $B$, и одну изъ четырехъ вышеуказанныхъ, непремѣнно будетъ заключать и три остальныя.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы положимъ

$$C = \left| \begin{matrix} y_1, \ldots \frac{1-i}{2}(y_1 - y_2) \\ y_2, \ldots \frac{1+i}{2}(y_1 + y_2) \end{matrix} \right|,$$

то приведенныя выше подстановки будутъ соотвѣтственно

$$\pm C, \quad \pm CB.$$

*Группа $G$ порядка $2.12$ будетъ, такимъ образомъ, состоять изъ подстановокъ*

$$\text{(III)} \qquad \begin{matrix} \pm 1, & \pm A, & \pm B, & \pm AB \\ \pm C, & \pm CA, & \pm CB, & \pm CAB \\ \pm C^2, & \pm C^2 A, & \pm C^2 B, & \pm C^2 AB. \end{matrix}$$

Для подстановокъ группы $g$ мы выпишемъ полныя выраженія, такъ какъ впослѣдствіи будемъ ими пользоваться:

$$\text{(Tetr)}\qquad \begin{array}{llll} \eta' = \eta, & -\eta, & -\dfrac{1}{\eta}, & \dfrac{1}{\eta} \\ -i\dfrac{\eta-1}{\eta+1}, & i\dfrac{\eta-1}{\eta+1}, & -i\dfrac{\eta+1}{\eta-1}, & i\dfrac{\eta+1}{\eta-1} \\ -\dfrac{\eta-i}{\eta+i}, & \dfrac{\eta-i}{\eta+i}, & \dfrac{\eta+i}{\eta-i}, & -\dfrac{\eta+i}{\eta-i}. \end{array}$$

Эту группу можно еще представить и въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{array}{l} \eta, \ -\eta, \ -\dfrac{1}{\eta}, \ \dfrac{1}{\eta}, \\ \sigma, \ -\sigma, \ -\dfrac{1}{\sigma}, \ \dfrac{1}{\sigma}, \qquad \sigma = -i\dfrac{\eta-1}{\eta+1}. \\ \sigma^2, -\sigma^2, -\dfrac{1}{\sigma^2}, \ \dfrac{1}{\sigma^2}, \end{array}$$

9. $N = 2.24$; $r = 24$.

По теоремѣ Sylow'a

$$24 = 3\nu(3p+1).$$

Единственныя возможныя значенія для $p$ и $\nu$: $p = 1$ и $\nu = 2$. Поэтому группа $g$ заключаетъ 4 группы $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ и $\alpha_4$ 3^{aro} порядка ($s = 4$, $t = 3$). Порядокъ $\mu$ группы Γ есть кратное четырехъ и дѣлитель 24, такъ что $\mu = \frac{24}{l}$, а $l$ можетъ быть равно 1, 2, 3 или 6. Невозможность предположеній $l = 2$ или 3 мы докажемъ по предъидущему; если же $l = 6$, то $g$ должно содержать группу $g'$ порядка 6^{aro}, съ которой будутъ перестановочны всѣ подстановки $g$; $g'$ будетъ содержать (по теоремѣ Sylow'a) одну группу $g''$ 3^{aro} порядка; такимъ образомъ $g$ будетъ содержать группу $g''$ порядка 3^{aro}, съ которой ея подстановки перестановочны, а это, какъ выше указано, невозможно. Такимъ образомъ $l$ должно быть равно 1, а $\mu = 24$.

Группа Γ подстановокъ изъ четырехъ буквъ, порядка 24, есть группа, составленная изъ всѣхъ возможныхъ между 4 буквами подстановокъ. Эта группа можетъ быть получена изъ знакоперемѣнной группы присоединеніемъ къ ней подстановки

$$D' = (\alpha_1\ \alpha_3\ \alpha_2\ \alpha_4).$$

Видъ $D$, одной изъ подстановокъ $G$, соотвѣтствующихъ $D'$, опредѣлится слѣдующими соотношеніями:

$$D'^4 = 1,\ A'D' = D'A',$$

откуда

$$D^4 = \pm 1;\ AD = \pm DA.$$

Мы выберемъ за $D$ ту подстановку, для которой

$$AD = DA.$$

Пусть $D = \begin{vmatrix} y_1, \ldots \alpha y_1 + \beta y_2 \\ y_2, \ldots \gamma y_1 + \delta y_2 \end{vmatrix}$, $\quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$

$$AD = \begin{vmatrix} y_1, \ldots \alpha i y_1 - \beta i y_2 \\ y_2, \ldots \gamma i y_1 - \delta i y_2 \end{vmatrix} = DA = \begin{vmatrix} y_1, \ldots\ i(\alpha y_1 + \beta y_2) \\ y_2, \ldots -i(\gamma y_1 + \delta y_2) \end{vmatrix}.$$

Отсюда $\beta = 0$, $\gamma = 0$ и $D = \begin{vmatrix} y_1, \ldots \alpha y_1 \\ y_2, \ldots \delta y_2 \end{vmatrix}$, $\quad \alpha\delta = 1.$

Изъ условія $D^4 = \pm 1$ слѣдуетъ $\alpha^4 = \delta^4 = \pm 1$, $\alpha^8 = 1$.

Обозначая черезъ $j$ корень 8^ой^ степени изъ единицы, получаемъ для $D$ выраженіе

$$D = \begin{vmatrix} y_1, \ldots j\ \ y_1 \\ y_2, \ldots j^{-1} y_2 \end{vmatrix}.$$

*Группа $G$ порядка 2.24 будетъ состоять изъ подстановокъ*

$$\begin{array}{lllllllll} & \pm 1, & \pm A, & \pm B, & \pm AB, & \pm D, & \pm AD, & \pm BD, & \pm ABD, \\ \text{(IV)} & \pm C, & \pm CA, & \pm CB, & \pm CAB, & \pm CD, & \pm CAD, & \pm CBD, & \pm CABD, \\ & \pm C^2, & \mp C^2A, & \pm C^2B, & \pm C^2AB. & \pm C^2D, & \pm C^2AD, & \pm C^2BD, & \pm C^2ABD. \end{array}$$

Подстановки группы $g$ представятся въ слѣдующемъ видѣ:

$$\eta' = \eta, \quad -\eta, \quad -\frac{1}{\eta}, \quad \frac{1}{\eta}, \quad i\eta, \quad -i\eta, -\frac{i}{\eta}, \quad \frac{i}{\eta},$$

$$(\text{Oct}). \quad -i\frac{\eta-1}{\eta+1}, \; i\frac{\eta-1}{\eta+1}, -i\frac{\eta+1}{\eta-1}, \; i\frac{\eta+1}{\eta-1}, \quad \frac{\eta-1}{\eta+1}, -\frac{\eta-1}{\eta+1}, \frac{\eta+1}{\eta-1}, -\frac{\eta+1}{\eta-1},$$

$$-\frac{\eta-i}{\eta+i}, \; \frac{\eta-i}{\eta+i}, \; \frac{\eta+i}{\eta-i}, -\frac{\eta+i}{\eta-i}, \; -i\frac{\eta-i}{\eta+i}, \; i\frac{\eta-i}{\eta+i}, \frac{\eta+i}{\eta-i}, -i\frac{\eta+i}{\eta-i},$$

или

$$\eta' = \eta, \; -\eta, \; -\frac{1}{\eta}, \frac{1}{\eta}, \; i\eta, \; -i\eta, \; -\frac{i}{\eta}, \frac{i}{\eta},$$

$$\sigma, \; -\sigma, \; -\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{\sigma}, \; i\sigma, \; -i\sigma, \; -\frac{i}{\sigma}, \frac{i}{\sigma}, \qquad \sigma = -i\frac{\eta-1}{\eta+1}.$$

$$\sigma^2, -\sigma^2, -\frac{1}{\sigma^2}, \frac{1}{\sigma^2}, \; i\sigma^2, -i\sigma^2, -\frac{i}{\sigma^2}, \frac{i}{\sigma^2},$$

10. $N = 2.60$; $r = 60$.

Подобно предъидущимъ случаямъ установимъ, что

1) группа $g$ будетъ содержать 6 группъ изъ 5 подстановокъ каждая ($s = 6$, $t = 5$).

2) группа $\Gamma$ будетъ транзитивная группа изъ 6 буквъ порядка 60; она изоморфна съ знакоперемѣнной группой изъ 5 буквъ*).

Знакоперемѣнная группа изъ 5 буквъ можетъ быть построена, между прочимъ, съ помощью слѣдующихъ подстановокъ

$$A' = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5), \quad B' = (\alpha_2\alpha_5)(\alpha_3\alpha_4), \quad C' = (\alpha_2\alpha_4)(\alpha_2\alpha_5),$$

порядокъ которыхъ соотвѣтственно равенъ 2, 2 и 5 ($B'^2 = C'^2 = A'^5 = 1$).

Пусть $A$ есть одна изъ подстановокъ $G$, соотвѣтствующихъ $A'$; изъ условія $A'^5 = 1$ слѣдуетъ, что $A^5 = \pm 1$. Пусть каноническій видъ $A$

$$A = \begin{vmatrix} y_1, \ldots a y_1 \\ y_2, \ldots b y_2 \end{vmatrix}, \qquad ab = 1.$$

*) Serret. Traité d'Algèbre Supérieure.

Veronese. Interprétation géométrique de la théorie des substitutions de $n$ lettres, et particulièrement pour $n=3, 4, 5, 6$. Annali di Matematica, 2 s., t. 11.

Отсюда

$$A^5 = \begin{vmatrix} y_1, \ldots a^5 y_1 \\ y_2, \ldots b^5 y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1, \ldots \pm y_1 \\ y_2, \ldots \pm y_2 \end{vmatrix}, \quad a^5 = b^5 = \pm 1.$$

Положимъ

$$a^5 = b^5 = -1.$$

Обозначая черезъ $\varepsilon$ корень $5^{\text{ой}}$ степени изъ отрицательной единицы $(-1)$, мы найдемъ, что

$$A = \begin{vmatrix} y_1, \ldots \varepsilon y_1 \\ y_2, \ldots \varepsilon^{-1} y_2 \end{vmatrix}.$$

Для опредѣленія подстановки $B$, соотвѣтствующей въ $G$ подстановкѣ $B'$, можемъ воспользоваться соотношеніями

$$A'B' = B'A'^{-1}, \; B'^2 = 1; \quad AB = \pm BA^{-1}, \; B^2 = \pm 1.$$

Возьмемъ $B^2 = -1$; пусть

$$B = \begin{vmatrix} y_1, \ldots \alpha y_1 + \beta y_2 \\ y_2, \ldots \gamma y_1 + \delta y_2 \end{vmatrix}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1;$$

$$AB = \begin{vmatrix} y_1, \ldots \alpha\varepsilon y_1 + \beta\varepsilon^{-1} y_2 \\ y_2, \ldots \gamma\varepsilon y_1 + \delta\varepsilon^{-1} y_2 \end{vmatrix} = \pm BA^{-1} = \pm \begin{vmatrix} y_1, \ldots \varepsilon^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) \\ y_2, \ldots \varepsilon\;(\gamma y_1 + \delta y_2) \end{vmatrix}.$$

Отсюда

$$\alpha\varepsilon = \pm \alpha\varepsilon^{-1}, \; \beta\varepsilon^{-1} = \pm \beta\varepsilon^{-1}; \quad \gamma\varepsilon = \pm \gamma\varepsilon, \; \delta\varepsilon^{-1} = \pm \delta\varepsilon.$$

Если $\alpha$ и $\delta$ не нули, то $\varepsilon^4 = 1$, что невозможно; поэтому $\alpha = \delta = 0$; $\beta$ и $\gamma$ въ такомъ случаѣ уже не могутъ быть нулями $(-\beta\gamma = 1)$; поэтому изъ двухъ знаковъ въ формулахъ $\gamma\varepsilon = \pm\gamma\varepsilon$, $\beta\varepsilon^{-1} = \pm\beta\varepsilon^{-1}$ надо выбрать верхній.

Кромѣ того $\beta^2 = \gamma^2$, $\beta \gtrless \gamma$; поэтому окончательно можемъ положить

$$B = \begin{vmatrix} y_1, \ldots y_2 \\ y_2, \ldots -y_1 \end{vmatrix}.$$

Теперь остается опредѣлить $C$—одну изъ подстановокъ группы $G$, соотвѣтствующихъ подстановкѣ $C'$ группы Г.

Для этого имѣемъ соотношенія

$$C'^2=1,\ (B'C')^2=1,\ (A'^2C')^3=1;\ C^2=\pm1,\ (BC)^2=\pm1,\ (A^2C)^3=\pm1.$$

Пусть

$$C=\begin{vmatrix} y_1, \ldots \alpha y_1+\beta y_2 \\ y_2, \ldots \gamma y_1+\delta y_2 \end{vmatrix}.$$

Положимъ, что мы привели $C$ къ каноническому виду

$$\begin{vmatrix} y_1, \ldots a y_1 \\ y_2, \ldots b y_2 \end{vmatrix}, \quad a \text{ неравно } b, \quad ab=1.$$

Изъ условія $C^2=\pm1$, слѣдуетъ, что $a=-b=\pm i$, $a+b=0$.

Но $a$ и $b$ суть корни уравненія

$$\begin{vmatrix} \alpha-s, & \beta \\ \gamma, & \delta-s \end{vmatrix}=0.$$

Поэтому уравненіе $a+b=0$ влечетъ уравненіе:

$$\alpha+\delta=0.$$

Разсуждая совершенно также относительно $BC$, мы найдемъ

$$-\beta+\gamma=0.$$

Приведемъ $A^2C$ къ каноническому виду; пусть

$$A^2C=\begin{vmatrix} y_1, \ldots a' y_1 \\ y_2, \ldots b' y_2 \end{vmatrix}, \quad a' \text{ неравно } b', \quad a'b'=1.$$

Такъ какъ $(A^2C)^3=\pm1$, то $a'^3=b'^3=\pm1$. Выберемъ изъ двухъ значеній, которыя имѣетъ подстановка $A^2C$, соотвѣтствующая $A'^2C'$, то, для котораго

$$a'^3=-1.$$

Отсюда слѣдуетъ, что $a'$ и $b'$ будутъ корни уравненія $\frac{a^3+1}{a+1}=$ $=a^2-a+1$, и поэтому

$$a'+b'=1.$$

Но $A^2C=\begin{vmatrix} y_1, \ldots \alpha\varepsilon^2 y_1+\beta\varepsilon^{-2}y_2 \\ y_2, \ldots \gamma\varepsilon^2 y_1+\delta\varepsilon^{-2}y_2 \end{vmatrix}$;

поэтому $a'$ и $b'$ суть корни уравненія

$$\begin{vmatrix} \alpha\varepsilon^2-s, & \beta\varepsilon^{-2} \\ \gamma\varepsilon^2, & \delta\varepsilon^{-2}-s \end{vmatrix}=0;$$

соотношеніе $a'+b'=1$ даетъ

$$\alpha\varepsilon^2+\delta\varepsilon^{-2}=1.$$

Такимъ образомъ для опредѣленія $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ имѣемъ уравненія

$$\alpha+\delta=0, \quad -\beta+\gamma=0, \quad \alpha\varepsilon^2+\delta\varepsilon^{-2}=1, \quad \alpha\delta-\beta\gamma=1.$$

Отсюда

$$\alpha=-\delta=\frac{1}{\varepsilon^2-\varepsilon^{-2}}, \quad \beta=\gamma, \quad \alpha^2+\beta^2+1=0.$$

Изъ послѣдняго уравненія для $\beta$ получается два значенія.

Група $G$ линейныхъ подстановокъ порядка $N=2.60$ можетъ быть построена 2 способами: съ помощью подстановокъ $A$, $B$, $C$ и $A$, $B$ и $C_1$, гдѣ

$$C=\begin{vmatrix} y_1, \ldots \alpha y_1+\beta y_2 \\ y_2, \ldots \beta y_1-\alpha y_2 \end{vmatrix}, \quad C_1=\begin{vmatrix} y_1, \ldots \alpha y_1-\beta y_2 \\ y_2, \ldots -\beta y_1-\alpha y_2 \end{vmatrix}.$$

Не трудно, однако, замѣтить, что, если черезъ $S$ мы обозначимъ подстановку

$$\begin{vmatrix} y_1, \ldots y_1 \\ y_2, \ldots -y_2 \end{vmatrix},$$

то $S^{-1}C_1S=C$, а поэтому двѣ группы будутъ отличаться только обозначеніемъ.

Такимъ образомъ окончательно за $C$ мы можемъ принять подстановку

$$C = \begin{vmatrix} y_1, \dots \dfrac{1}{\varepsilon^2(1+\varepsilon)} y_1 + \dfrac{1}{\varepsilon(1+\varepsilon^3)} y_2 \\ y_2, \dots \dfrac{1}{\varepsilon(1+\varepsilon^3)} y_1 - \dfrac{1}{\varepsilon^2(1+\varepsilon)} y_2 \end{vmatrix}, \qquad \varepsilon^5 = -1.$$

*Вся группа $G$ порядка $2.60$ будетъ состоять изъ подстановокъ*

$$\text{(V)} \qquad \pm A^k,\ \pm A^k B,\ \pm A^k C A^j,\ \pm A^k C A^j B, \qquad k, j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Въ этомъ числѣ будутъ подстановки

$2^{\text{аго}}$ порядка — $A^k B$, $A^k C A^j$, если $k + j \equiv 0 \pmod 5$;
$A^k C A^j B$, если $3k + 2j \equiv 0 \pmod 5$;

$3^{\text{аго}}$ порядка — $A^k C A^j$, если $k + j \pm 1 \equiv 0 \pmod 5$;
$A^k C A^j B$, если $3k + 2j \pm 1 \equiv 0 \pmod 5$;

$5^{\text{аго}}$ порядка — $A^k$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$; $A^k C A^j$, $A^k C A^j B$, если предъидущія сравненія неудовлетворяются.

Группа $g$ неоднородныхъ подстановокъ будетъ имѣть видъ

$$\text{(Ikos)} \quad \begin{aligned} &\eta' = \varepsilon^{2k} \eta; &&\eta' = -\frac{\varepsilon^{2k}}{\eta}, &&k = 1, 2, 3, 4, 5. \\ &\eta' = \varepsilon^{2k} \frac{\alpha\varepsilon^{2j}\eta + \beta}{\beta\varepsilon^{2j}\eta - \alpha}, &&\eta' = -\varepsilon^{-2k} \frac{\beta\varepsilon^{2j}\eta - \alpha}{\alpha\varepsilon^{2j}\eta + \beta}, &&j, k = 1, 2, 3, 4, 5. \end{aligned}$$

Такимъ образомъ группы линейныхъ подстановокъ конечнаго порядка съ двумя перемѣнными теперь намъ извѣстны вполнѣ.

11. Пусть $y_1$ и $y_2$ — независимые интегралы линейнаго уравненія $2^{\text{аго}}$ порядка вида $(B)$ п. 2.

Возьмемъ какую нибудь величину $u_0$; приложимъ къ ней всѣ подстановки группы $g$, и составимъ такимъ образомъ $r$ величинъ

$$(1) \qquad u_0, u_1, u_2, \dots u_{r-1}.$$

Съ помощью ихъ и интеграловъ $y_1$ и $y_2$ составимъ форму

$$(2) \qquad U = (y_1 - u_0 y_2)(y_1 - u_1 y_2) \dots (y_1 - u_{r-1} y_2).$$

*Форма $U$ не измѣнитъ своего вида, если мы къ $y_1$ и $y_2$ приложимъ какую угодно подстановку группы $G$.*

Въ самомъ дѣлѣ, приложимъ къ $y_1$ и $y_2$ подстановку группы $G$

$$S = \begin{vmatrix} y_1, \ldots \alpha y_1 + \beta y_2 \\ y_2, \ldots \gamma y_1 + \delta y_2 \end{vmatrix},$$

порядка $m$; число $m$ есть дѣлитель чиселъ $N$ и $r$.

Расположимъ двучлены нашей формы въ слѣдующемъ порядкѣ: пусть $s$ есть соотвѣтствующая $S$ неоднородная подстановка

$$\eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}.$$

Прилагая къ $u_0$ послѣдовательно подстановки $s^0 = 1, s, s^2 \ldots s^{m-1}$, составимъ рядъ

$$(3) \qquad u_0,\ u_0',\ u_0'',\ldots u_0^{(m-1)},$$

всѣ члены котораго, очевидно, различны. Пусть $u_1$ есть одна изъ величинъ ряда (1), невходящихъ въ рядъ (3). Приложимъ къ ней подстановки $1,\ s,\ s^2, \ldots s^{m-1}$ и составимъ рядъ

$$(4) \qquad u_1,\ u_1',\ u_1'',\ldots u_1^{(m-1)}.$$

Всѣ члены новаго ряда различны между собою; ни одинъ изъ нихъ не совпадаетъ съ членами ряда (3). Продолжая далѣе поступать такимъ же образомъ, мы исчерпаемъ весь рядъ (1), который распадется слѣдовательно на $\frac{r}{m}$ рядовъ, подобныхъ (3), (4) и т. д. Затѣмъ сгруппируемъ вмѣстѣ двучлены, коэффиціенты коихъ принадлежатъ одному и тому же изъ рядовъ (3), (4).... Форма представится въ видѣ:

$$(5) \quad U = (y_1 - u_0 y_2)(y_1 - u_0' y_2) \ldots (y_1 - u_0^{(-m1)} y_2)(y_1 - u_1 y_2) \ldots (y_1 - u_1^{(m-1)} y_2) \ldots (y_1 - u_{\frac{r}{m}-1}^{(m-1)} y_2).$$

Разсмотримъ въ этомъ выраженіи $U$ одинъ какой нибудь циклъ изъ $m$ членовъ, напр., первый.

Изъ предъидущаго слѣдуетъ, что

$$(6) \quad u_0^{(k+1)} = \frac{\alpha u_0^{(k)} + \beta}{\gamma u_0^{(k)} + \delta},\quad u_0^{(k)} = \frac{\delta u_0^{(k+1)} - \beta}{\alpha - \gamma u_0^{(k+1)}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots m-1;$$

$$u_0^{(0)} = u_0^{(m)} = u_0.$$

Обозначимъ еще

$$u_0^{(k+1)} = \frac{\alpha_{k+1} u_0 + \beta_{k+1}}{\gamma_{k+1} u_0 + \delta_{k+1}}. \tag{7}$$

Изъ формулъ (6) и (7) вытекаетъ, что

$$u_0^{(k+1)} = \frac{(\alpha\alpha_k + \beta\gamma_k) u_0 + \alpha\beta_k + \beta\delta_k}{(\gamma\alpha_k + \delta\gamma_k) u_0 + \gamma\beta_k + \delta\delta_k}, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} u_0 + \beta_{k+1} &= c\left((\alpha\alpha_k + \beta\gamma_k) u_0 + \alpha\beta_k + \beta\delta_k\right) \\ \gamma_{k+1} u_0 + \delta_{k+1} &= c\left((\gamma\alpha_k + \delta\gamma_k) u_0 + \gamma\beta_k + \delta\delta_k\right), \end{aligned} \tag{9}$$

причемъ $c^2 = 1$.

Приложимъ теперь на самомъ дѣлѣ подстановку $S$ къ этому циклу; какой нибудь членъ цикла

$$y_1 - u_0^{(k+1)} y_2$$

послѣ подстановки получитъ видъ

$$(\alpha - u_0^{(k+1)}\gamma) y_1 - (\delta u_0^{(k+1)} - \beta) y_2 = (\alpha - u_0^{(k+1)}\gamma)\left(y_1 - \frac{\delta u_0^{(k+1)} - \beta}{\alpha - u_0^{(k+1)}\gamma} y_2\right) =$$

$$= (\alpha - u_0^{(k+1)}\gamma)(y_1 - u_0^{(k)} y_2).$$

Но $(\alpha - u_0^{(k+1)}\gamma) = \alpha - \gamma \dfrac{\alpha u_0^{(k)} + \beta}{\gamma u_0^{(k)} + \delta} = \dfrac{1}{\gamma u_0^{(k)} + \delta} =$

$$= \frac{\gamma_k u_0 + \delta_k}{(\alpha_k \gamma + \delta\gamma_k) u_0 + \gamma\beta_k + \delta\delta_k} = c\,\frac{\gamma_k u_0 + \delta_k}{\gamma_{k+1} u_0 + \delta_{k+1}}.$$

Отсюда очевидно, что каждый циклъ формы $U$ послѣ подстановки $S$ получитъ первоначальное свое значеніе, умноженное на $c = \pm 1$; вся же форма получитъ свое первоначальное значеніе, умноженное на $c$ въ степени $\frac{r}{m}$.

Число $m$, соотвѣтственно типу группы, можетъ имѣть слѣдующія значенія:

**(I, C.) — $m$; (II, D. P.) — 2, $m$; (III, Tetr.) — 2, 3;**

**(IV, Oct.) — 2, 3, 4 и (V, Ikos.) — 2, 3, 5.**

Поэтому число цикловъ $\frac{r}{m}$ будетъ для группы (I) — нечетное (одинъ), для (II) — или нечетное, или четное, и для прочихъ — всегда четное. Формы $U^2$ для первыхъ двухъ и $U$—для трехъ остальныхъ типовъ не будутъ совершенно измѣняться при подстановкахъ соотвѣтственныхъ группъ. Съ помощью указанныхъ формъ мы можемъ составлять множество новыхъ функцій отъ величинъ $y_1$ и $y_2$, которыя будутъ обладать тѣмъ же свойствомъ.

Если величины $y_1$ и $y_2$ — алгебраическіе интегралы уравненія $(B)$, то *разсмотрѣнныя въ настоящемъ пунктѣ формы $U^2$ для группы* (I) *и* (II) *типовъ и $U$ — для остальныхъ суть раціональныя функціи отъ $x$.*

Въ самомъ дѣлѣ: такъ какъ $y_1$ и $y_2$—алгебраическія функціи $x$, то и $U$ — алгебраическая функція $x$. Но $U$ (или $U^2$) остается, по доказанному, безъ измѣненій при всѣхъ возможныхъ подстановкахъ соотвѣтственной группы, т. е. при всѣхъ возможныхъ контурахъ, описываемыхъ $x$; такимъ образомъ $U$ (или $U^2$) есть однозначная алгебраическая функція отъ $x$ — т. е. раціональная его функція.

12. Зная выраженія всѣхъ подстановокъ $g$ для каждаго типа группъ конечнаго порядка (п. п. 3, 4, 8, 9 и 10), мы можемъ сейчасъ же составить принадлежащую ему форму $U$. Видъ формъ $U$, однако, можно значительно упростить, воспользовавшись слѣдующимъ ихъ свойствомъ: назовемъ главнымъ значеніемъ подстановки $s$ порядка $m$ (п. 11) то значеніе $\eta$, для котораго $\eta' = \eta = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$, т. е. каждый изъ корней уравненія

$$\gamma\eta^2 + (\delta - \alpha)\,\eta - \beta = 0. \tag{1}$$

Главное значеніе какой нибудь степени $k$ подстановки $s$ будетъ то же, что и для $s$. Въ самомъ дѣлѣ: нетрудно убѣдиться непосредственно, что для $s^2$ главное значеніе опредѣляется также уравненіемъ (1); допустимъ, что для $s^k$ это значеніе опредѣлится тѣмъ же уравненіемъ.

Въ такомъ случаѣ, очевидно (см. обознач. п. 11),

$$\gamma_k = \mu\gamma,\ \ \delta_k - \alpha_k = \mu(\delta - \alpha),\ \ \beta_k = \mu\beta.$$

Главное значеніе для $s^{k+1}$ будетъ опредѣляться изъ уравненія

$$(\gamma_k\alpha + \delta_k\gamma)\,\eta^2 + (\delta_k\delta - \alpha_k\alpha)\,\eta - (\alpha_k\beta + \delta\beta_k) =$$
$$= (\mu\alpha + \delta_k)\left(\gamma\eta^2 + (\delta - \alpha)\,\eta - \beta\right) = 0.$$

Такимъ образомъ дѣйствительно главное значенiе для всѣхъ степеней подстановки $s$ одно и то же.

Если поэтому мы за $u_0$ возьмемъ главное значенiе подстановки $s$, то первый циклъ нашего полинома $U$ обратится въ

$$(y_1 - u_0 y_2)^m.$$

Расположимъ теперь остальные двучлены $U$ нѣсколько иначе именно 2-ой циклъ составимъ изъ подстановокъ вида $v$, $vs$,... $vs^{m-1}$, гдѣ $v$—подстановка $g$, не входящая въ первый циклъ; 3-iй циклъ—$w$, $ws$,... $ws^{m-1}$, гдѣ $w$—подстановка, не входящая въ 1 и 2-ой циклы, и т. д. Если затѣмъ, при выборѣ для $u_0$ главнаго значенiя $s$, подстановки $v$, $w$,... обращаются въ $v_0$, $w_0$,..., то, очевидно, $U$ представится въ видѣ

$$U = \{(y_1 - u_0 y_2)(y_1 - v_0 y_2)(y_1 - w_0 y_2)\ldots\}^m \text{*)}.$$

Если группа $g$ имѣетъ кромѣ $s$ еще подстановку $t$ порядка $p$ и если мы черезъ $u_0'$ обозначимъ ея главное значенiе, то $U$ получитъ видъ

$$V = \{(y_1 - u_0' y_2)(y_1 - v_0' y_2)(y_1 - w_0' y_2)\ldots\}^p$$

и т. д.

Составленiе формъ $U$ для всѣхъ типовъ группъ линейныхъ подстановокъ конечнаго порядка не представитъ теперь никакихъ затрудненiй.

*A*) Форма $U$ для группы типа (I) имѣетъ одинъ циклъ; она представляется въ видѣ

$$U = \prod_{k=1}^{k=m} (y_1 - \varepsilon^{2k} u_0 y_2) = y_1^m \pm (-u_0 y_2)^m.$$

Если за $u_0$ возьмемъ 0, главное значенiе подстановки $\eta' = \varepsilon^{2k}\eta$, то $U$ обратится въ $y_1^m$.

---

*) Если случится, что которое нибудь изъ чиселъ $v_0$, $w_0$,... обращается въ $\infty$, то соотвѣтственный циклъ составится изъ степени $y_2$.

*B*) Группа $g$ типа (II) (п. 5) заключаетъ подстановки порядка 2 и $m$; поэтому можемъ для $U$ получить выраженіе въ видѣ квадрата нѣкоторой формы степени $m$ и въ видѣ $m^{\text{ой}}$ степени нѣкоторой формы $2^{\text{ой}}$ степени.

Общій видъ $U$

$$U=\prod_{k=1}^{k=m}(y_1-\varepsilon^{2k}u_0y_2)\left(y_1+\frac{\varepsilon^{2k}}{u_0}y_2\right).$$

Если за $u_0$ возьмемъ 0, главное значеніе подстановки $\eta'=\varepsilon^{2k}\eta$, то $U$ получитъ видъ

$$U_1=(y_1y_2)^m.$$

Если же за $u_0$ возьмемъ $\pm i$ — главное значеніе входящей въ группу обращенной подстановки $\eta'=-\frac{1}{\eta}$, то для $U$ найдемъ соотвѣтственно:

$$U_2=(y_1^m+(-i)^m y_2^m)^2,\quad U_3=(y_1^m+i^m y_2^m)^2.$$

*C*) Группа $g$ типа (III) (п. 8) заключаетъ подстановки $2^{\text{аго}}$ и $3^{\text{аго}}$ порядковъ; соотвѣтствующая форма $U$ можетъ быть представлена въ видѣ квадрата нѣкоторой формы $6^{\text{ой}}$ степени и куба нѣкоторой формы $4^{\text{ой}}$ степени. Общій видъ $U$, какъ не трудно убѣдиться изъ таблицы п. 8:

$$U=\Pi_k(y_1^2-u_k^2y_2^2)\left(y_1^2-\frac{1}{u_k^2}y_2^2\right),\qquad k=0,1,2,$$

$$u_1=-i\frac{u_0-1}{u_0+1},\quad u_2=-\frac{u_0-i}{u_0+i}.$$

Если за $u_0$ примемъ 0, главное значеніе подстановки $2^{\text{аго}}$ порядка $\eta'=-\eta$, то для $U$ найдемъ

$$U_1=\{y_1y_2(y_1^4-y_2^4)\}^2=f^2(y_1,y_2).$$

Если же за $u_0$ примемъ $-\frac{1+i}{2}\left(1\mp\sqrt{3}\right)$ — главное значеніе подстановки $3^{\text{аго}}$ порядка $\eta'=-i\frac{\eta-1}{\eta+1}$, то для $U$ получимъ соотвѣтственно

$$U_2=\{y_1^4+2i\sqrt{3}\,y_1^2y_2^2+y_2^4\}^3,\quad U_3=\{y_1^4-2i\sqrt{3}\,y_1^2y_2^2+y_2^4\}^3.$$

*D*) Группа $g$ типа (IV) (п. 9) заключаетъ подстановки порядковъ $2^{\text{аго}}$, $3^{\text{аго}}$ и $4^{\text{аго}}$. Формы, принадлежащія этому типу, могутъ быть представлены въ видѣ 2, 3 и $4^{\text{ой}}$ степени отъ формъ $12^{\text{ой}}$, 8 и $6^{\text{ой}}$ степени.

Общій видъ $U$

$$U = \Pi\,(y_1^4 - u_k^4 y_2^4)\left(y_1^4 - \frac{1}{u_k^4} y_2^4\right), \qquad k = 0, 1, 2,$$

$$u_1 = -i\,\frac{u_0 - 1}{u_0 + 1}, \qquad u_2 = -\frac{u_0 - i}{u_0 + i}.$$

Если $u_0$ положимъ $= \frac{1-i}{\sqrt{2}}$, главному значенію подстановки $2^{\text{аго}}$ порядка $\eta' = -\frac{i}{\eta}$, то $U$ получитъ видъ

$$U_1 = \{y_1^{12} - 33\,y_1^8 y_2^4 - 33\,y_1^4 y_2^8 + y_2^{12}\}^2.$$

Если за $u_0$ примемъ $-\frac{1+i}{2}(1+\sqrt{3})$, главное значеніе подстановки $3^{\text{аго}}$ порядка $\eta' = -i\,\frac{\eta-1}{\eta+1}$, то

$$U_2 = \{y_1^8 + 14\,y_1^4 y_2^4 + y_2^8\}^3 = \varphi^3(y_1, y_2).$$

Если, наконецъ, за $u_0$ примемъ 0, главное значеніе подстановки $4^{\text{аго}}$ порядка $\eta' = i\eta$, то

$$U_3 = \{y_1 y_2 (y_1^4 - y_2^4\}^4.$$

*E*) Группа $g$ типа (V) заключаетъ подстановки порядковъ 2, 3 и 5; форма $U$ можетъ быть представлена въ видѣ квадрата, куба и $5^{\text{ой}}$ степени формъ 30, 20 и 12 степеней.

Общій видъ $U$

$$U = (y_1^5 - u_0^5 y_2^5)\left(y_1 + \frac{1}{u_0^5}\, y_2^5\right) \prod_{j=1}^{j=5} (y_1^5 - u_j^5 y_2^5)\left(y_1^5 + \frac{1}{u_j^5}\, y_2^5\right),$$

$$u_j = \frac{\alpha\varepsilon^{2j} u_0 + \beta}{\beta\varepsilon^{2j} u_0 - \alpha}, \qquad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Если мы за $u_0$ примемъ 0 — главное значеніе подстановки $5^{\text{аго}}$ порядка $\eta' = \varepsilon^{2k}\eta$, то $U$ приметъ видъ

$$U_1 = \left\{y_1 y_2 \left(y_1^5 + \frac{\beta^5}{\alpha^5}\, y_2^5\right)\left(y_1^5 - \frac{\alpha^5}{\beta^5}\, y_2^5\right)\right\}^5.$$

Изъ формулъ

$$\varepsilon^5 = -1, \ \alpha = \frac{1}{\varepsilon^2(1+\varepsilon)}, \ \beta = \frac{1}{\varepsilon(1+\varepsilon^3)}$$

не трудно найти:

$$\alpha\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \ \alpha^{10} - \beta^{10} = \frac{11}{25\sqrt{5}}; \ \alpha^{10} + \beta^{10} = -\frac{1}{5},$$

$$U_1 = \{y_1 y_2 (y_1^{10} + 11\, y_1^5 y_2^5 - y_2^{10})\}^5 = \psi^5(y_1, y_2).$$

Такимъ же образомъ, положивъ $u_0 = i$—главному значенію подстановки 2$^{\text{аго}}$ порядка $\eta' = -\frac{1}{\eta}$, найдемъ

$$U_2 = \{y_1^{30} + 522 y_1^{25} y_2^5 - 10005 y_1^{10} y_2^{10} (y_1^{10} + y_2^{10}) + 522\, y_1^5 y_2^{25} + y_2^{30}\}^2.$$

Вычисленіе формы 20$^{\text{ой}}$ степени изъ общаго выраженія $U$ нѣсколько сложнѣе потому, что ни одна изъ подстановокъ 3$^{\text{аго}}$ порядка не представляется въ каноническомъ видѣ и главное значеніе каждой изъ нихъ вслѣдствіе этого имѣетъ болѣе сложный видъ. Для нахожденія ея проще воспользоваться слѣдующимъ замѣчаніемъ: если форма $f(y_1, y_2)$ при всѣхъ подстановкахъ группы $G$ не измѣняетъ своего вида, а получаетъ только постоянный множитель, то всякій коваріантъ ея также не измѣнитъ при этихъ подстановкахъ своей формы, а получитъ только степень того множителя, который получаетъ и сама форма. Къ числу коваріантовъ формы $f(y_1, y_2)$ относится опредѣлитель*)

$$H = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2} \\[2mm] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2}, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} \end{vmatrix}.$$

Опредѣлитель этотъ, составленный для формы 12$^{\text{ой}}$ степени, стоящей въ большихъ скобкахъ въ выраженіи $U_1$, дастъ форму двадцатой степени:

$$U_3 = \left(-\frac{H}{121}\right)^3 = (y_1^{20} - 228\, y_1^5 y_2^{15} + 494\, y_1^{10} y_2^{10} + 228\, y_1^5 y_2^{15} + y_2^{20})^3.$$

*) G. Salmon. Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen. (Fiedler) § 141.

13. Изъ доказанной въ концѣ п. 11 теоремы слѣдуетъ, что величины $U_1$, $U_2$, $U_3$ въ случаяхъ $C$, $D$ и $E$ п. 12 суть раціональныя функціи отъ $x$, а выраженія, стоящія въ ихъ правыхъ частяхъ въ скобкахъ, — вообще говоря, корни изъ раціональныхъ функцій. *Но относительно трехъ изъ нихъ, а именно*

$$f(y_1, y_2) = y_1 y_2 (y_1^4 - y_2^4)$$

$$\varphi(y_1, y_2) = y_1^8 + 14 y_1^4 y_2^4 + y_2^8$$

$$\psi(y_1, y_2) = y_1 y_2 (y_1^{10} + 11 y_1^5 y_2^5 - y_2^{10})$$

*можно легко убѣдиться, что они будутъ сами раціональными функціями отъ $x$.*

Замѣтимъ, что, по доказанному, при всѣхъ подстановкахъ соотвѣтствующей группы видъ формъ $f$, $\varphi$ и $\psi$ не измѣнится; онѣ могутъ только получать при этомъ множитель, который долженъ быть корнемъ соотвѣтственно 2ой, 3ей и 5ой степени изъ единицы.

Такимъ образомъ для доказательства теоремы достаточно убѣдиться, что этотъ множитель для всѣхъ подстановокъ есть единица.

Остановимся сперва на формѣ $\psi$, принадлежащей группѣ $g$ порядка 60аго.

Всѣ подстановки соотвѣтствующей ей группы $G$ будутъ (п. 10)

$$A^k, \ A^k B, \ A^k C A^j, \ A^k C A^j B, \qquad k, j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$A^k = \begin{vmatrix} y_1, \ldots \varepsilon^k \ y_1 \\ y_2, \ldots \varepsilon^{-k} y_2 \end{vmatrix}, \ A^k B = \begin{vmatrix} y_1, \ldots \varepsilon^{-k} y_2 \\ y_2, \ldots -\varepsilon^k \ y_1 \end{vmatrix}, \ A^k C A^j = \begin{vmatrix} y_1, \ldots \varepsilon^j \ (\alpha\varepsilon^k y_1 + \beta\varepsilon^{-k} y_2) \\ y_2, \ldots \varepsilon^{-j} (\beta\varepsilon^k y_1 - \alpha\varepsilon^{-k} y_2) \end{vmatrix},$$

$$A^k C A^j B = \begin{vmatrix} y_1, \ldots \varepsilon^{-j} (\beta\varepsilon^k y_1 - \alpha\varepsilon^{-k} y_2) \\ y_2, \ldots -\varepsilon^j \ (\alpha\varepsilon^k y_1 + \beta\varepsilon^{-k} y_2) \end{vmatrix}, \ \varepsilon^5 = -1; \quad \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{\varepsilon^2(1+\varepsilon)}, \\ \beta = \frac{1}{\varepsilon(1+\varepsilon^3)}. \end{array}$$

Очевидно, что $\psi(y_1, y_2)$ не измѣняется совершенно при подстановкахъ вида $A^k$, $A^k B$; остается провѣрить это для остальныхъ подстановокъ группы.

Не трудно замѣтить, что $\psi(y_1, y_2)$ можетъ быть представлена въ слѣдующемъ видѣ

$$\psi(y_1, y_2) = y_1 y_2 \prod_{j=1}^{j=5} \left(y_1 + \varepsilon^{2j} \frac{\beta}{\alpha} y_2\right)\left(y_1 - \varepsilon^{-2j} \frac{\alpha}{\beta} y_2\right).$$

Если мы приложимъ къ $\psi(y_1, y_2)$ подстановку $A^k C A^m$, то $y_1 + \varepsilon^{2j}\frac{\beta}{\alpha} y_2$ и $y_1 - \varepsilon^{-2j}\frac{\alpha}{\beta} y_2$ перейдутъ соотвѣтствено въ

$$\frac{\alpha^2 \varepsilon^{k+m} + \beta^2 \varepsilon^{k-m+2j}}{\alpha} y_1 + \beta\left(\varepsilon^{m-k} - \varepsilon^{2j-m-k}\right) y_2$$

и

$$\alpha\left(\varepsilon^{m+k} - \varepsilon^{-2j+k-m}\right) y_1 + \frac{\beta^2 \varepsilon^{m-k} + \alpha^2 \varepsilon^{-k-m-2j}}{\beta} y_2.$$

Произведеніе $y_1 y_2$ получится изъ произведенія этихъ двухъ выраженій при $m = j$ и $m + j = 5$.

Постоянный множитель, который будетъ стоять при формѣ, имѣетъ слѣдующій видъ:

$$c = \alpha\beta\varepsilon^{2k} \prod_{j=1}^{j=5} \varepsilon^{k-m} \left(\frac{\alpha^2 \varepsilon^{2m} + \beta^2 \varepsilon^{2j}}{\alpha}\right) \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} \varepsilon^{m-k} \prod \left(\alpha\varepsilon^{k-m}\left(\varepsilon^{2m} - \varepsilon^{-2j}\right)\right),$$

гдѣ послѣднее произведеніе распространено на всѣ значенія $j = 1$, 2, 3, 4, 5, кромѣ $j + m = 5$. Не трудно видѣть, что

$$c = \varepsilon^{-8m} (\alpha^2 + \beta^2) \prod_1^5 (\alpha^2 \varepsilon^{2m} + \beta^2 \varepsilon^{2j}) \prod_{j+m \lessgtr 5} (\varepsilon^{2m} - \varepsilon^{-2j})$$

$$\prod_1^5 \left(\alpha^2 \varepsilon^{2m} + \beta^2 \varepsilon^{2j}\right) = \alpha^{10} + \beta^{10}$$

$$\prod_{j+m \gtrless 5} \left(\varepsilon^{2m} - \varepsilon^{-2j}\right) = \varepsilon^{8m} - \sum \varepsilon^{-2j} \varepsilon^{6m} + \sum \varepsilon^{-2j} \varepsilon^{-2j'} \varepsilon^{4m} -$$

$$- \sum \varepsilon^{-2j} \varepsilon^{-2j'} \varepsilon^{-2j''} \varepsilon^{2m} + \varepsilon^{-2(j+j'+j''+j''')} = 5\varepsilon^{8m},$$

(значенія $j, j', \ldots$ и предѣлы суммъ понятны сами по себѣ).

Такимъ образомъ

$$c = 5\,(\alpha^2 + \beta^2)\,(\alpha^{10} + \beta^{10}) = 1.$$

Для доказательства, что форма $\varphi(y_1, y_2)$ при всѣхъ подстановкахъ группы IV$^{\text{аго}}$ типа остается совершенно неизмѣнной, нужно будетъ убѣдиться, что полиномъ

$$\alpha^8 + 14\alpha^4\gamma^4 + \gamma^8,$$

гдѣ $\alpha$ и $\gamma$ суть коэффиціенты при $y_1$ въ подстановкахъ группы $G$ (IV) равенъ единицѣ.

Изъ таблицы (IV) п. 9 легко убѣдиться, что числа $\alpha$ и $\gamma$ имѣютъ слѣдующія системы значеній:

1) одно изъ нихъ есть нуль, а другое—одинъ изъ корней 8$^{\text{ой}}$ степени изъ 1 ($A^k B^j D^m$, $k$, $j$, $m = 0, 1$);

2) оба суть корни 4$^{\text{ой}}$ степени изъ $-\frac{1}{4}$ ($C^k A^j B^m$, $j$, $m = 0, 1$; $k = 1, 2$);

3) оба—корни 4$^{\text{ой}}$ степени изъ $-\frac{1}{4}$, умноженные на корни 8$^{\text{ой}}$ степени изъ 1 ($C^k A^j B^l D^m$, $j$, $l$, $m = 0, 1$; $k = 1, 2$).

Во всѣхъ этихъ случаяхъ указанный полиномъ дѣйствительно равенъ единицѣ.

Также просто провѣрить наше положеніе относительно $f(y_1, y_2)$.

14. Изъ всего вышеизложеннаго вытекаетъ слѣдующее положеніе: *если уравненіе 2$^{\text{аго}}$ порядка* (п. 2)

$$(B) \qquad y'' = Py,$$

*имѣетъ общій интегралъ алгебраическій, то, разумѣя подъ $y_1$ и $y_2$ какую нибудь систему его независимыхъ интеграловъ, можно утверждать, что*

1) *или каждый интегралъ есть корень изъ раціональной функціи* (п. 12, $A$) *отъ независимой перемѣнной $x$,*

2) *или произведеніе 2 интеграловъ есть корень раціональной функціи* (п. 12, $B$),

3) *или нѣкоторыя формы $f(y_1, y_2)$, $\varphi(y_1, y_2)$, $\psi(y_1, y_2)$* (п. 12, $C$, $D$, $E$), *степеней* 6, 8 *и* 12 *относительно каждаго интеграла, будутъ раціональными функціями.*

Обратная теорема для перваго случая, очевидно, справедлива.

*Для втораго случая она справедлива съ нѣкоторыми дополнительными условіями; для третьяго случая она совершенно справедлива.*

Докажемъ послѣднія два положенія: пусть

(1) $y_1 y_2 = f(x) = \sqrt[k]{R(x)}$, $R(x)$=раціональной функціи отъ $x$.

Раньше мы имѣли формулу (п. 2)

(2) $$y_1' y_2 - y_2' y_1 = C.$$

Дифференцируя (1) по $x$, находимъ

(3) $$y_1' y_2 + y_2' y_1 = f'(x).$$

Дифференцируя (2) и (3), найдемъ

(4) $$y_1'' y_2 = y_2'' y_1 \text{ и } y_1'' y_2 + 2y_1' y_2' + y_1 y_2'' = f''(x).$$

Изъ этихъ формулъ, пользуясь еще выраженіемъ $y_2'' = Py_2$, мы найдемъ

(5) $$-C^2 = \left\{2\left(\frac{f'}{f}\right)' + \left(\frac{f'}{f}\right)^2 - 4P\right) f^2.$$

Стоящее въ скобкахъ выраженіе есть раціональная функція отъ $x$, такъ какъ логариѳмическая производная отъ корня изъ раціональной функціи есть раціональная функція, а $P$ — раціональная функція по положенію. Поэтому $f^2$ есть также раціональная функція ($k = 2$). Обозначивъ $\frac{C^2}{4f^2}$ черезъ $\varphi(x)$, найдемъ

(6) $$P = \varphi(x) + \frac{5}{16}\left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)^2 - \frac{\varphi''(x)}{4\varphi(x)}.$$

Легко повѣрить, что уравненіе

$$y'' = \left(\varphi(x) + \frac{5}{16}\left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)^2 - \frac{\varphi''(x)}{4\varphi(x)}\right) y$$

будетъ имѣть два слѣдующихъ независимыхъ интеграла

(7) $$y_1 = \varphi(x)^{-\frac{1}{4}} e^{\int \sqrt{\varphi(x)}\, dx}, \quad y_2 = \varphi(x)^{-\frac{1}{4}} e^{-\int \sqrt{\varphi(x)}\, dx}.$$

Чтобы интегралы были алгебраическими, необходимо, чтобы $\int \sqrt{\varphi(x)}\, dx$ былъ логариѳмомъ алгебраической функціи.

Это и есть дополнительное условіе для того, чтобы обратная теорема во 2<sup>омъ</sup> изъ указанныхъ въ теоремѣ случаевъ была справедлива.

Теперь обратимся къ 3<sup>му</sup> случаю. По положенію, нѣкоторая форма, степени выше 4<sup>ой</sup>, составленная изъ нѣсколькихъ произведеній вида $(\alpha_i y_1 + \beta_i y_2)^{a_i}$, причемъ $a_i$ не имѣютъ общаго дѣлителя, есть раціональная функція отъ $x$.

Требуется показать, что каждый изъ независимыхъ интеграловъ $y_1$ и $y_2$ будетъ алгебраической функціей того же перемѣннаго. Пусть

$$(8) \qquad \Phi(y_1, y_2) = y_1^k + b_1 y_1^{k-1} y_2 + b_2 y_1^{k-2} y_2^2 + \ldots + b_k y_2^k = r(x), \; k > 4$$

Обозначимъ черезъ

$$(9) \qquad \eta = \frac{y_1}{y_2}; \; f(\eta) = \eta^k + b_1 \eta^{k-1} + b_2 \eta^{k-2} + \ldots + b_k; \; f(\eta) = \frac{r(x)}{y_2^k}.$$

Дифференцируя логариѳмически послѣднее изъ уравненій (9) и пользуясь формулой (2), найдемъ

$$(10) \qquad C \frac{f'(\eta)}{f(\eta)} = y_2^2 \frac{r'(x)}{r(x)} - k y_2 y_2'.$$

Дифференцируя (10) и опять пользуясь (2), получимъ

$$C^2 \left( \frac{f'(\eta)}{f(\eta)} \right)' = y_2^2 \left\{ 2 y_2 y_2' \frac{r'(x)}{r(x)} + y_2^2 \left( \frac{r'(x)}{r(x)} \right)' - k y_2'^2 - k y_2 y_2'' \right\}.$$

Подставляя въ правую часть $y_2''$ изъ уравненяі $y_2'' = P y_2$ и $y_2'$ изъ равенства (10), получимъ

$$(11) \qquad C^2 \left( k \left( \frac{f'(\eta)}{f(\eta)} \right)' + \left( \frac{f'(\eta)}{f(\eta)} \right)^2 \right) = y_2^4 \left( \left( \frac{r'(x)}{r(x)} \right)^2 + k \left( \frac{r'(x)}{r(x)} \right)' - k^2 P \right)$$

$$(12) \qquad C^2 \left[ k \left( \frac{f'(\eta)}{f(\eta)} \right)' + \left( \frac{f'(\eta)}{f(\eta)} \right)^2 \right] f(\eta)^{\frac{4}{k}} = r(x)^{\frac{4}{k}} \left[ \left( \frac{r'(x)}{r(x)} \right)^2 + k \left( \frac{r'(x)}{r(x)} \right)' - k^2 P \right].$$

Изъ послѣдняго уравненія видно, что $\eta$ есть алгебраическая функція отъ $x$; изъ уравненія $f(\eta) = \frac{r(x)}{y_2^k}$ и $\eta = \frac{y_1}{y_2}$ мы найдемъ, что $y_2$ и $y_1$ будутъ алгебраическими функціями $x$.

Остается только провѣрить, не обращается ли лѣвая часть уравненія (12) тождественно въ нуль или постоянную величину $A$.

Если лѣвая часть (12) равна нулю, то $f(\eta)=B(\eta-a)^k$, гдѣ $B$ и $a$ постоянныя; но это противорѣчитъ положенію, что $f$ состоитъ изъ нѣсколькихъ различныхъ множителей.

Если

$$f(\eta)^{\frac{4}{k}}\left\{k\left(\frac{f'(\eta)}{f(\eta)}\right)'+\left(\frac{f'(\eta)}{f(\eta)}\right)^2\right\}=A,$$

то $f(\eta)^{\frac{4}{k}}$ была бы раціональная функція отъ $\eta$, такъ какъ стоящій въ скобкахъ множитель раціоналенъ относительно $\eta$; отсюда вытекало бы, что числа $a_i$ въ произведеніи

$$f(\eta)=\Pi(\alpha_i\eta+\beta_i)^{a_i}$$

имѣютъ общаго дѣлителя, что также противорѣчитъ положенію. Поэтому, равенство (12) не обращается тождественно ни въ нуль, ни въ другую постоянную, и величины $y_1$ и $y_2$ опредѣлятся съ помощью его какъ алгебраическія функціи отъ $x$.

Теорема такимъ образомъ доказана вполнѣ.

15. Пусть $y$ есть какой нибудь интегралъ уравненія $(B)\, y''=Py$ и

$$u=y^{\mu}.$$

По извѣстной теоремѣ Liouville'я*) $u$ удовлетворитъ линейному дифференціальному уравненію порядка $\mu+1$

$$(1)\qquad u^{(\mu+1)}+P_1u^{(\mu-1)}+P_2u^{(\mu-2)}+\ldots+P_\mu u=0.$$

Уравненіе это, какъ не трудно провѣрить, получается послѣдовательнымъ исключеніемъ величинъ $u_1, u_2, \ldots u_\mu$ изъ уравненій

$$\frac{du_{i+1}}{dx}=(i+1)(\mu-i)Pu_i+u_{i+2},\quad i=0,\ 1,\ldots\mu-1;\quad u_0=u,\quad u_{\mu+1}=0.$$

Относительно уравненія (1) можно доказать, что *если* $y_1$ *и* $y_2$ *представляютъ два независимыхъ интеграла уравненія* $(B)$, *то*

*) Journal de Liouville, t. IV.

*уравненію* (1) *удовлетворитъ какая угодно форма степени* $\mu$, *составленная изъ этихъ интеграловъ, и величины*

$$y_1^{\mu}, y_1 y_2^{\mu-1}, \ldots y_2^{\mu}$$

*составятъ систему независимыхъ интеграловъ.*

По условію, уравненію (1) удовлетворяетъ $\mu^{\text{ая}}$ степень какого угодно интеграла уравненія ($B$); поэтому ему удовлетворятъ и функціи

$$(\alpha_k y_1 + \beta_k y_2)^{\mu}, \qquad \sum_{k=1}^{k=\mu+1} A_k (\alpha_k y_1 + \beta_k y_2)^{\mu},$$

гдѣ $\alpha_k$, $\beta_k$, $A_k$ — какія угодно постоянныя числа. Если произвольно выбранную форму степени $\mu$ относительно $y_1$ и $y_2$ представить въ видѣ

$$U = a_1 y_1^{\mu} + a_2 y_1^{\mu-1} y_2 + \ldots + a_k y_1^{\mu-k+1} y_2^{k-1} + \ldots + a_{\mu+1} y_2^{\mu},$$

то всегда возможно подобрать числа $A_k$, $\alpha_k$ и $\beta_k$ такъ, чтобы удовлетворились уравненія

$$\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-l+1)}{1.2..\,l} \sum_{k=1}^{k=\mu+1} A_k \alpha_k^{\mu-l+1} \beta_k^{l-1} = a_l, \qquad l=1,2,\ldots \mu+1.$$

и чтобы, такимъ образомъ, $U$ была интеграломъ уравненія (1).

Отсюда слѣдуетъ, что дѣйствительно

$$(2) \qquad y_1^{\mu},\ y_1^{\mu-1} y_2, \ldots y_2^{\mu}$$

суть интегралы уравненія (1).

Если бы между величинами (2) существовала линейная зависимость

$$C_1 y_1^{\mu} + C_2 y_1^{\mu-1} y^2 + \ldots + C_{\mu+1} y_2^{\mu} = 0,$$

то отношеніе $\frac{y_1}{y_2}$ было бы постоянной величиной и $y_1$ и $y_2$ не были бы независимыми интегралами уравненія ($B$), что противно положенію.

Теорема, такимъ образомъ, доказана вполнѣ.

16. Всѣ изложенныя въ настоящей главѣ соображенія показываютъ, что *изслѣдованіе вопроса, имѣетъ ли линейное уравненіе* $2^{\text{аго}}$ *порядка, вида* ($B$) $y'' = Py$, *общій интегралъ алгебраическій, приводится къ слѣдующимъ операціямъ:*

1) *къ рѣшенію вопроса, имѣетъ ли это уравненіе два независимыхъ интеграла, изъ которыхъ каждый есть корень раціональной функціи.*

Этотъ вопросъ въ свою очередь, на основаніи замѣчаній гл. II, приводится къ повѣркѣ, съ помощью неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, можетъ ли уравненіе $(B)$ удовлетвориться 2 независимыми интегралами вида

$$y_1 = (x - a_1)^{\rho_1} \ldots (x - a_m)^{\rho_m} (A_0 + A_1 x + \ldots + A x^{\lambda}),$$
$$y_2 = (x - a_1)^{r_1} \ldots (x - a_m)^{r_m} (B_0 + B_1 x + \ldots + B_l x^l),$$

гдѣ $a$—особенныя точки уравненія, $\rho_1, r_1, \rho_2, r_2, \ldots \rho_m, r_m$ показатели, которымъ принадлежатъ интегралы въ области каждой особенной точки — числа раціональныя, $\lambda$ и $l$—цѣлыя числа, связанныя съ $\rho$ и $r$ условіями

$$\Sigma\rho + \lambda = -\sigma, \quad \Sigma r + l = -s$$

гдѣ $\sigma$ и $s$ показатели, которымъ принадлежатъ интегралы $(B)$ въ области безконечно-далекой точки.

Если окажется, что такихъ интеграловъ уравненіе $(B)$ не имѣетъ, то вопросъ приводится

2) *къ испытанію, не будетъ ли произведеніе двухъ независимыхъ интеграловъ $y_1$ и $y_2$ уравненія $(B)$ корнемъ квадратнымъ изъ раціональной функціи.*

Функція $u = y_1 y_2$ удовлетворитъ, какъ легко провѣрить, линейному уравненію 3$^{\text{яго}}$ порядка

$$u''' = 2\,(2Pu' + P'u).$$

Надо, слѣдовательно, испытать, съ помощью неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, будетъ ли это уравненіе имѣть одинъ интегралъ, равный корню квадратному изъ раціональной функціи. Пусть интегралъ будетъ

$$u = y_1 y_2 = f(x).$$

Въ такомъ случаѣ надо еще провѣрить, будетъ ли $\int \frac{dx}{f(x)}$ логариѳмомъ отъ алгебраической функціи.

Если всѣ условія удовлетворятся, то интегралы $(B)$ найдутся по формуламъ (7) п. 14.

Если же условія не будутъ удовлетворены, то слѣдуетъ перейти:

3) *къ послѣдовательному составленію, по пріему, указанному въ п. 15, линейныхъ уравненій порядковъ $7^{\text{аго}}$, $9^{\text{аго}}$ и $13^{\text{аго}}$, которымъ удовлетворяютъ 6, 8 и 12 степени какого угодно изъ интеграловъ уравненія $(B)$. Если хоть одно изъ этихъ уравненій имѣетъ интеграломъ раціональную функцію $r(x)$, то формулы (8) п. 14, гдѣ подъ функціей $\Phi(y_1, y_2)$ слѣдуетъ разумѣть, соотвѣтственно степени уравненія, формы $f(y_1, y_2)$, $\varphi(y_1, y_2)$ и $\psi(y_1, y_2)$ п. 13, укажутъ, какими алгебраическими функціями $x$ будутъ интегралы $y_1$ и $y_2$.*

Если же ни одно изъ этихъ уравненій раціональнаго интеграла не имѣетъ, то уравненіе $(B)$ не имѣетъ общаго алгебраическаго интеграла.

17. Нами выше найдены всѣ типы группъ конечнаго порядка изъ подстановокъ, испытываемыхъ интегралами уравненія (п. 2)

$$(B) \qquad u'' = Pu$$

въ то время, когда независимая перемѣнная описываетъ всѣ возможные контуры вокругъ особенныхъ точекъ уравненія.

Посмотримъ теперь, чѣмъ будутъ отличаться отъ найденныхъ группы конечнаго порядка изъ подстановокъ, испытываемыхъ интегралами уравненія вида (п. 2)

$$(A) \qquad y'' + py' + qy = 0,$$

изъ котораго, преобразованіемъ $y = ue^{-\frac{1}{2}\int p dx}$, получается уравненіе $(B)$.

Пусть $u_1$ и $u_2$ — два независимыхъ интеграла уравненія $(B)$. Величины

$$(1) \qquad y_1 = u_1 e^{-\frac{1}{2}\int p dx}, \quad y_2 = u_2 e^{-\frac{1}{2}\int p dx}$$

будутъ независимыми интегралами уравненія ($A$). Такъ какъ $p = \sum \frac{\alpha_k}{x - a_k}$, то отсюда

$$(2) \qquad y_1 = \Pi_k (x - a_k)^{-\frac{\alpha_k}{2}} u_1, \quad y_2 = \Pi_k (x - a_k)^{-\frac{\alpha_k}{2}} y_2.$$

Если независимая перемѣнная опишетъ какой нибудь сомкнутый контуръ, заключающій одну или нѣсколько особенныхъ точекъ, то величины $u_1$ и $u_2$ испытаютъ подстановку

$$S = \begin{vmatrix} u_1, \ldots \alpha u_1 + \beta u_2 \\ u_2, \ldots \gamma u_1 + \delta u_2 \end{vmatrix},$$

принадлежащую къ одному изъ 5 поименованныхъ выше типовъ.

Величины $y_1$ и $y_2$, какъ видно изъ формулъ (2), испытаютъ подстановку $S$, всѣ коэффиціенты которой будутъ умножены на одну и ту же постоянную величину (если, напр., внутри контура заключается только одна особенная точка $a_k$ и перемѣнная обѣжитъ около нея только одинъ разъ, то постоянный множитель $= e^{-\alpha_k \pi i}$).

По положенію, числа $\alpha_k$ раціональны и число особенныхъ точекъ $a_k$ конечно; поэтому число различныхъ значеній указанныхъ множителей будемъ тоже конечное; если порядокъ группы $G$ подстановокъ для $y_1$ и $y_2$ мы назовемъ черезъ $N$, то порядокъ группы $G'$ для $u_1$ и $u_2$ будетъ нѣкоторое $N\omega$.

Если мы въ формахъ $U$, разсмотрѣнныхъ нами въ п. п. 11—14, будетъ разумѣть подъ $y_1$ и $y_2$ независимые интегралы уравненія ($A$) и засимъ приложимъ къ нимъ подстановки группы конечнаго порядка $G'$, принадлежащей этому уравненію, то формы будутъ получать нѣкоторыхъ множителей, которые очевидно будутъ корнями изъ единицы; формы эти будутъ, такимъ образомъ, корнями нѣкоторыхъ раціональныхъ функцій отъ $x$.

Съ другой стороны, если мы, взявъ какую нибудь величину $v_0$, съ ея помощью составимъ форму $V$, также какъ составили $U$ (п. 11) съ помощью $u_0$, то отношеніе этихъ формъ $\frac{U}{V}$ останется неизмѣннымъ при всѣхъ подстановкахъ группы $G'$, такъ какъ числитель и знаменатель получаютъ при этомъ одинаковые множители, а сама дробь остается неизмѣняемою. Поэтому, если $y_1$ и $y_2$ будутъ алгебраическими интегралами уравненія ($A$), то указанная дробь будетъ раціональной функціей $x$.

Раздѣляя числителя и знаменателя дроби $\frac{U}{V}$ на $y_2$, мы можемъ представить ее въ видѣ частнаго двухъ полиномовъ

$$\frac{U}{V}=\frac{(\eta-u_0)(\eta-u_1)\ldots(\eta-u_{r-1})}{(\eta-v_0)(\eta-v_1)\ldots(\eta-v_{r-1})},\quad \eta=\frac{y_1}{y_2}.$$

Можно всегда найти постоянное число $\lambda$ такое, чтобы $\psi=\frac{U}{V}+\lambda$ обращалось въ нуль для заданной величины $\eta=w_0$. Если мы къ $\psi$ приложимъ послѣдовательно всѣ подстановки группы $g$ неоднородныхъ подстановокъ, то $\psi$ не будетъ измѣняться; поэтому оно будетъ обращаться въ нуль и для всѣхъ величинъ $w_1, w_2, \ldots w_{r-1}$, получаемыхъ изъ $w_0$ съ помощью тѣхъ же подстановокъ. Обозначая полиномъ $W=(\eta-w_0)(\eta-w_1)\ldots(\eta-w_{r-1})$, степени $r$, мы можемъ утверждать, что между полиномами $U$, $V$, $W$ существуетъ тождество

$$U+\lambda V+\lambda' W=0.$$

При дальнѣйшемъ изложеніи мы будемъ разумѣть группы $G$ и соотвѣтственныя имъ $G'$ и $g$ порядковъ $2r$, $2r\omega$ и $r$ — II, III, IV и V типовъ, а для группы I^аго типа укажемъ только окончательный результатъ (въ противномъ случаѣ формулировка нѣкоторыхъ положеній требовала бы особыхъ для послѣдней группы оговорокъ). По соображеніямъ, изложеннымъ въ п. 12 настоящей главы, полиномы $U$, $V$, $W$, если за начальныя значенія $u_0$, $v_0$, $w_0$ принять главныя значенія входящихъ въ группу $g$ подстановокъ порядка $l$, $m$, $n$, обратятся соотвѣтственно въ $l$, $m$ и $n$ степень полиномовъ степеней $\frac{r}{l}$, $\frac{r}{m}$ и $\frac{r}{n}$.

Обозначимъ послѣдніе полиномы соотвѣтственно черезъ $u$, $v$ и $w$.

На основаніи сдѣланныхъ выше замѣчаній дроби $\frac{u^l}{v^m}$ и $\frac{w^n}{v^m}$ — раціональныя функціи отъ $x$.

Пользуясь тождествомъ

$$u^l+\lambda v^m+\lambda' w^n=0,$$

мы всегда можемъ выбрать постоянныя $A$ и $B$ такъ, чтобы, положивъ

$$A\frac{u^l}{v^m}=R(x)=X, \tag{*}$$

имѣть въ то же время

$$(**)\qquad B\frac{w^n}{v^m}=R(x)-1=X-1.$$

На разсмотрѣніи нѣкоторыхъ слѣдствій, вытекающихъ отсюда, мы и остановимся.

18. Будемъ разсматривать $\eta$ какъ функцію отъ $X$, опредѣляемую уравненіемъ $(*)$ или $(**)$.

Особенныя точки для $\eta$, какъ функціи отъ $X$, будутъ, прежде всего, $X=0$, $1$ и $\infty$.

Для каждаго изъ этихъ величинъ $\eta$ будетъ имѣть $r$ значеній, распредѣляющихся *)

при $X=0$ — на $\frac{r}{l}$ цикловъ (круговыхъ системъ), по $l$ вѣтвей въ каждомъ,

при $X=\infty$ — на $\frac{r}{m}$ цикловъ, по $m$ вѣтвей въ каждомъ,

при $X=1$ — на $\frac{r}{n}$ цикловъ, по $n$ вѣтвей въ каждомъ.

Другихъ точекъ развѣтвленія функція $\eta$ не будетъ имѣть; въ самомъ дѣлѣ: число точекъ развѣтвленія для $\eta$, какъ функціи отъ $X$, опредѣляемой уравненіемъ $\frac{\varphi(\eta)}{\psi(\eta)}=X$, равно степени опредѣлителя $\varphi'\psi-\psi'\varphi$.

Для уравненій $(*)$ и $(**)$ степень опредѣлителя равна $2r-2$, (такъ какъ коэффиціенты при $x^r$ въ $u$ и $v$ одинаковы). Каждому $\mu$ кратному корню уравненія $\varphi'\psi-\psi'\varphi$ отвѣчаетъ $\mu+1$ вѣтвей функціи $\eta$. Такимъ образомъ, если $\eta$ не имѣетъ другихъ точекъ развѣтвленія, кромѣ указанныхъ, то числа $l$, $m$ и $n$ должны удовлетворить соотношенію

$$\frac{r}{l}(l-1)+\frac{r}{m}(m-1)+\frac{r}{n}(n-1)=2r-2$$

и наоборотъ.

Сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ (1) п. 6, мы сейчасъ же замѣчаемъ, что числа $l$, $m$ и $n$ дѣйствительно ему удовлетворяютъ**).

---

*) Briot et Bouquet. Théorie des fonctions elliptiques, ch. II.

**) Можно, конечно, и прямо провѣрить, что системы

$$\left.\begin{array}{cccc} l, & m, & n, & r \\ 2, & n, & 2, & 2n \\ 3, & 3, & 2, & 12 \\ 3, & 4, & 2, & 24 \\ 3, & 5, & 2, & 60 \end{array}\right\}$$ и только онѣ удовлетворяютъ указанному условію.

Вблизи каждаго изъ значеній $X=0$, 1 и $\infty$ величина $\eta$ можетъ быть разложена въ рядъ

$$(1)\quad \eta-\eta_0=a(X-X_0)^{\frac{1}{\mu}}+b(X-X_0)^{\frac{2}{\mu}}+c(X-X_0)^{\frac{3}{\mu}}+\ldots$$

При $X=\infty$ двучленъ $\eta-\eta_0$ должно замѣнить черезъ $\frac{1}{\eta}$, а $X-X_0$ черезъ $\frac{1}{X}$; число $\mu$, при $X_0=0, \infty$ и 1, равно соотвѣтственно $l$, $m$ и $n$.

Въ предъидущихъ разсужденіяхъ подъ $\eta$ мы разумѣли отношеніе двухъ независимыхъ интеграловъ $y_1$ и $y_2$ уравненія $(A)$.

Отношеніе двухъ какихъ угодно интеграловъ уравненія $(A)$, въ самомъ общемъ случаѣ, можетъ быть, очевидно, представлено въ видѣ

$$\zeta=\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta},$$

гдѣ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\delta$ — произвольныя постоянныя.

Продолжая считать $\eta$ функціей $X$, продифференцируемъ три раза по $X$ уравненіе

$$\gamma\zeta\eta+\delta\zeta-\alpha\eta-\beta=0$$

$$\gamma(\zeta'\eta+\eta'\zeta)+\delta\zeta'-\alpha\eta'=0$$

$$\gamma(\zeta''\eta+2\eta'\zeta'+\eta''\zeta)+\delta\zeta''-\alpha\eta''=0$$

$$\gamma(\zeta'''\eta+3\eta'\zeta''+3\eta''\zeta'+\eta'''\zeta)+\delta\zeta'''-\alpha\eta'''=0.$$

Приравнивая нулю опредѣлитель изъ коэффиціентовъ, стоящихъ въ этихъ уравненіяхъ при $\alpha$, $\gamma$, $\delta$ и раздѣляя перемѣнныя, находимъ

$$(2)\qquad (\zeta)_X=\frac{\zeta'''}{\zeta'}-\frac{3}{2}\left(\frac{\zeta''}{\zeta'}\right)^2=\frac{\eta'''}{\eta'}-\frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2=(\eta)_X,$$

гдѣ всѣ производныя взяты по $X$.

На основаніи уравненія $(*)$ $\eta$ есть алгебраическая функція отъ $X$. Дифференціальное выраженіе

$$(\eta)_X=\frac{\eta'''}{\eta'}-\frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2$$

есть также алгебраическая функція отъ $X$; если $x$, а вмѣстѣ съ нимъ $X = R(x)$, опишутъ какой нибудь сомкнутый контуръ, то $\eta$ обратится въ $\zeta = \frac{\alpha\,\eta+\beta}{\gamma\,\eta+\delta}$, а $(\eta)_X$ не измѣнится; поэтому $(\eta)_X$ есть раціональная функція $X$.

Такимъ образомъ, *разсматривая* $\eta$, *какъ функцію* $X$, *опредѣляемую уравненіемъ* (*) (*или* (**)), *мы нашли, что она разлагается по дробнымъ степенямъ* $X$ *въ ряды вида* (1) *и что дифференціальное выраженіе* $(\eta)_X$ *есть раціональная функція отъ* $X$.

Эти два результата даютъ намъ возможность весьма просто выразить $(\eta)_X$ черезъ $X$.

Подставляя въ $(\eta)_X$ вмѣсто производныхъ отъ $\eta$ выраженія ихъ, получаемыя изъ ряда (1), мы легко замѣтимъ, что коэффиціенты при $\frac{1}{X^2}$ и $\frac{1}{(X-1)^2}$ будутъ соотвѣтственно $\frac{l^2-1}{2l^2}$ и $\frac{n^2-1}{2n^2}$ и что цѣлыхъ положительныхъ степеней $X$ въ разложеніе не войдетъ.

Такъ какъ по доказанному $(\eta)_X$ есть раціональная функція отъ $X$, то, на основаніи сдѣланнаго замѣчанія, можно положить, что

$$(\eta)_X = \frac{l^2-1}{2l^2X^2} + \frac{A}{X} + \frac{n^2-1}{2n^2(X-1)^2} + \frac{B}{X-1} + C.$$

Постоянныя $A$, $B$ и $C$ опредѣляются тѣмъ условіемъ, что $(\eta)_X$ въ разложеніи по степенямъ $\frac{1}{X}$ должна начинаться членомъ

$$\frac{m^2-1}{2m^2X^2}.$$

Отсюда $C = 0$; $A + B = 0$; $\frac{l^2-1}{2l^2} + \frac{n^2-1}{2n^2} + 2B = \frac{m^2-1}{2m^2}$.

Такимъ образомъ

$$(\eta)_X = \frac{l^2-1}{2l^2X^2} + \frac{n^2-1}{2n^2(X-1)^2} + \frac{\frac{1}{l^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} - 1}{2X(X-1)}.$$

Для группъ 1[аго] типа мы получили бы, идя тѣмъ же путемъ, что

$$(\eta)_X = \frac{m^2-1}{2m^2X^2},$$

гдѣ $m$ — порядокъ группы.

19. Полученными результатами можно слѣдующимъ образомъ воспользоваться для изслѣдованія вопроса объ алгебраическихъ интегралахъ уравненія $(A)$.

Составимъ уравненіе, которому удовлетворяетъ отношеніе 2 независимыхъ интеграловъ $(A)$ $\eta = \frac{y_1}{y_2}$. Изъ уравненій

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0, \quad y_2'' + py_2' + qy_2 = 0,$$

мы найдемъ

$$y_1''y_2 - y_2''y_1 + p(y_1'y_2 - y_1y_2') = (\eta' y_2^2)' + p\eta' y_2^2 = 0; \quad \frac{\eta''}{\eta'} = -p - 2\frac{y_2'}{y_2};$$

$$\frac{\eta'''}{\eta'} - \left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = -p' - 2\frac{y_2''y_2 - y_2'^2}{y_2^2} = -p' + 2q - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2;$$

$$(1) \qquad \frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = (\eta)_x = 2q - \frac{1}{2}p^2 - p'.$$

Лѣвая часть уравненія (1), какъ мы знаемъ изъ предъидущаго (п. 18), не измѣнится, если вмѣсто $\eta$ мы подставимъ $\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$, гдѣ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ — какія угодно постоянныя. Отсюда слѣдуетъ, что если уравненіе $(A)$ имѣетъ оба интеграла $y_1$ и $y_2$ алгебраическіе, то и уравненіе (1) будетъ имѣть алгебраическій общій интегралъ.

Съ другой стороны мы имѣемъ

$$y_1 = \eta y_2, \quad y_2^2 = \frac{C}{\eta'} e^{-\int p\,dx}, \quad y_2 = \sqrt{\frac{C}{\eta'}}\, e^{-\frac{1}{2}\int p\,dx}.$$

Поэтому, если коэффиціентъ $p$ въ уравненіи $(A)$ удовлетворяетъ всѣмъ необходимымъ условіямъ для того, чтобы общій интегралъ $(A)$ могъ быть алгебраическимъ (т. е. имѣетъ видъ $p = \sum \frac{\alpha_k}{x - a_k}$, гдѣ $\alpha_k$ — числа раціональныя), то и обратно: если уравненіе (1) имѣетъ общій интегралъ алгебраическій, то и уравненіе $(A)$ имѣетъ общій интегралъ алгебраическій.

Вмѣстѣ съ тѣмъ, если $y_1$ и $y_2$ — алгебраическіе интегралы уравненія $(A)$, то или $\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^m = \eta^m$, или частное двухъ полиномовъ относительно $\eta$ вида (п. 17) $\frac{u^l}{v^m}$, $\frac{w^n}{v^m}$ будетъ раціональною функціею $X$ отъ $x$; $\eta$ при этомъ удовлетворитъ соотвѣтственно одному изъ уравненій

$$(2)\qquad \begin{aligned} (\eta)_X &= \frac{m^2-1}{2m^2 X^2} \\ (\eta)_X &= \frac{l^2-1}{2l^2 X^2} + \frac{n^2-1}{2n^2 (X-1)^2} + \frac{\frac{1}{l^2}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}-1}{2X(X-1)}. \end{aligned}$$

Замѣчая, что вообще, если $X$ есть функція отъ $x$, то выраженіе

$$(\eta)_x = (X)_x + X'^2 (\eta)_X,$$

мы окончательно приходимъ къ слѣдующему заключенію:

*Когда уравненіе (A) имѣетъ два независимыхъ интеграла $y_1$ и $y_2$ алгебраическіе, то тогда, и только тогда, существуетъ нѣкоторая раціональная функція $X$ отъ $x$, для которой или*

$$\frac{X'''}{X'} - \frac{3}{2}\left(\frac{X''}{X'}\right)^2 + X'^2 \frac{m^2-1}{2m^2 X^2} = 2q - \frac{1}{2}p^2 - p',$$

*или*

$$\frac{X'''}{X'} - \frac{3}{2}\left(\frac{X''}{X'}\right)^2 + X'^2 \left\{ \frac{l^2-1}{2l^2 X^2} + \frac{n^2-1}{2n^2 (X-1)^2} + \frac{\frac{1}{l^2}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}-1}{2X(X-1)} \right\} = 2q - \frac{1}{2}p^2 - p',$$

гдѣ $m$ въ первой формулѣ — какое нибудь цѣлое число, а $l$, $m$, $n$ — цѣлыя числа изъ таблицы въ примѣчаніи къ п. 18.

Вопросъ объ алгебраическихъ интегралахъ уравненія $(A)$ приводится, такимъ образомъ, къ повѣркѣ, съ помощью неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, можно ли одно изъ вышеуказанныхъ уравненій для какого угодно цѣлаго числа $m$ или которой нибудь системы величинъ $l$, $m$ и $n$ удовлетворить раціональной функціей отъ $x$.

20. Для уравненія гипергеометрическаго ряда

$$(H)\qquad y'' + \frac{(\alpha+\beta+1)x-\gamma}{x(x-1)} y' + \frac{\alpha\beta}{x(x-1)} y = 0$$

въ общемъ уравненіи $(A)$ надо положить

$$p = \frac{(\alpha+\beta+1)x-\gamma}{x(x-1)} = \frac{\gamma}{x} + \frac{\alpha+\beta+1-\gamma}{x-1};\quad q = -\frac{\alpha\beta}{x} + \frac{\alpha\beta}{x-1}.$$

Въ такомъ случаѣ выраженіе $(\eta)_x$ представится въ видѣ

$$(\eta)_x = \frac{\gamma(2-\gamma)}{2x^2} + \frac{(\alpha+\beta+1-\gamma)(1+\gamma-\alpha-\beta)}{2(x-1)^2} + \frac{4\alpha\beta-2\gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)}{2x(x-1)} =$$

$$= \frac{1-(1-\gamma)^2}{2x^2} + \frac{1-(\gamma-\alpha-\beta)^2}{2(x-1)^2} + \frac{(1-\gamma)^2+(\gamma-\alpha-\beta)^2-(\alpha-\beta)^2-1}{2x(x-1)}.$$

Положимъ $\mathrm{mod}(1-\gamma)=\lambda$, $\mathrm{mod}(\alpha-\beta)=\mu$, $\mathrm{mod}(\gamma-\alpha-\beta)=\nu$.

Если $(H)$ имѣетъ общій интегралъ алгебраическій, то на основаніи предъидущей теоремы одно изъ уравненій

$$(1) \quad \frac{X'''}{X'} - \frac{3}{2}\left(\frac{X''}{X'}\right)^2 + X'^2\left(\frac{m^2-1}{2m^2X^2}\right) = \frac{1-\lambda^2}{2x^2} + \frac{1-\nu^2}{2(x-1)^2} + \frac{\lambda^2+\nu^2-\mu^2-1}{2x(x-1)}$$

или

$$(2) \quad \frac{X'''}{X'} - \frac{3}{2}\left(\frac{X''}{X'}\right)^2 + X'^2\left(\frac{l^2-1}{2l^2X^2} + \frac{n^2-1}{2n^2(X-1)^2} + \frac{\frac{1}{l^2}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}-1}{2X(X-1)}\right) =$$

$$= \frac{1-\lambda^2}{2x^2} + \frac{1-\nu^2}{2(x-1)^2} + \frac{\lambda^2+\nu^2-\mu^2-1}{2x(x-1)}.$$

Уравненіе (1) относится къ тому случаю, когда группа уравненія $(H)$ типа (I), и когда, слѣдовательно, оба независимые интеграла этого уравненія суть корни изъ раціональной функціи; этотъ вопросъ разсмотрѣнъ нами въ главѣ II, п. 10 и мы на немъ теперь не будемъ останавливаться; равнымъ образомъ мы не будемъ останавливаться и на случаяхъ, когда хоть одно изъ чиселъ $\lambda$, $\mu$ и $\nu$ есть цѣлое, такъ какъ и этотъ вопросъ разсмотрѣнъ тамъ же.

Такимъ образомъ мы будемъ изслѣдовать лишь уравненіе (2) при условіи, что ни одно изъ чиселъ $\lambda$, $\mu$ и $\nu$ не есть цѣлое.

Далѣе, въ главѣ IV, будетъ доказано, что при изслѣдованіи значеній $\lambda$, $\mu$ и $\nu$ $(\alpha, \beta, \gamma)$, для которыхъ уравненіе $(H)$ имѣетъ общій интегралъ алгебраическій, можно ограничиться тѣми случаями, когда $\lambda < 1$, $\mu < 1$, $\nu < 1$, $\lambda+\mu+\nu \leqq 3/_2$.

Тамъ же указано, что, въ этихъ предѣлахъ, уравненіе $(H)$ имѣетъ алгебраическій интегралъ лишь при слѣдующихъ значеніяхъ $\lambda$, $\mu$ и $\nu$ (взятыхъ въ какомъ угодно порядкѣ):

$$
(F)\qquad
\begin{array}{llll@{\qquad\qquad}llll}
1, & \frac{1}{2} & \frac{1}{n} & \frac{1}{2} & 9, & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\[2ex]
2, & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 10, & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\[2ex]
3, & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 11, & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\[2ex]
4, & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 12, & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\[2ex]
5, & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 13, & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{5} \\[2ex]
6, & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & 14, & \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\[2ex]
7, & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & 15, & \frac{1}{3} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5}. \\[2ex]
8, & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{3}. & & & &
\end{array}
$$

Для полнаго рѣшенія вопроса объ алгебраическихъ интегралахъ уравненія ($H$) остается слѣдовательно найти раціональные интегралы для уравненія (2), когда значенія $\lambda$, $\mu$ и $\nu$ взяты изъ таблицы ($F$).

Замѣтимъ, что, на основаніи соображеній п. п. 17—19, если уравненіе (2) дѣйствительно имѣетъ интеграломъ раціональную функцію $R(x)$, то, соотвѣтственно системамъ значеній чиселъ $l$, $m$, $n$ (см. уравненіе (*) и (**) п. 17), два независимыхъ интеграла уравненія ($H$) $y_1$ и $y_2$ удовлетворятъ соотношеніямъ:

$$a)\quad U = A\,\frac{(y_1{}^n + y_2{}^n)^2}{(y_1 y_2)^n}\,{}^{*)} = R(x);$$

при этомъ неопредѣленная постоянная $A$ должна быть выбрана такъ, чтобы

$$B\,\frac{(y_1{}^n - y_2{}^n)^2}{(y_1 y_2)^n}\,{}^{*)} = R(x) - 1. \qquad \left(A = B = \frac{1}{4}\right).$$

---

*) Эти выраженія выбраны вмѣсто формъ ($B$) п. 12 для удобства.

$$b)\quad V=A'\,\frac{(y_1^4+2i\sqrt{3}\,y_1^2y_2^2-y_2^4)^3}{(y_1^4-2i\sqrt{3}\,y_1^2y_2^2-y_2^4)^3}=R(x),$$

$$B'\,\frac{y_1^2y_2^2(y_1^4-y_2^4)^2}{(y_1^4-2i\sqrt{3}\,y_1^2y_2^2-y_2^4)^3}=R(x)-1\qquad (A'=1,\ B'=12i\sqrt{3}).$$

$$c)\quad W=A''\,\frac{(y_1^8+14\,y_1^4y_2^4+y_2^8)^3}{y_1^4y_2^4(y_1^4-y_2^4)^4}=R(x),$$

$$B''\,\frac{(y_1^{12}-33y_1^8y_2^4-33y_1^4y_2^8+y_2^{12})^2}{y_1^4y_2^4(y_1^4-y_2^4)^4}=R(x)-1\qquad \left(A''=B''=\frac{1}{108}\right).$$

$$d)\quad T=A'''\,\frac{[-(y_1^{20}+y_2^{20})+228\,y_1^5y_2^5(y_1^{10}-y_2^{10})-494\,y_1^{10}y_2^{10}]^3}{y_1^5y_2^5(y_1^{10}+11\,y_1^5y_2^5-y_2^{10})^5}=R(x),$$

$$B'''\,\frac{[y_1^{30}+y_2^{30}+522y_1^5y_2^5(y_1^{20}-y_2^{20})-10005y_1^{10}y_2^{10}(y_1^{10}+y_2^{10})]^2}{y_1^4y_2^5(y_1^{10}+11\,y_1^5y_2^5-y_2^{10})^5}=R(x)-1,$$

$$\left(A'''=-B'''=\frac{1}{1728}\right).$$

Обратимся теперь къ опредѣленію раціональныхъ интеграловъ уравненія (2).

*A*) Для первыхъ четырехъ случаевъ таблицы (*F*) рѣшеніе уравненія (2) очевидно:

$$X=R(x)=x$$

и алгебраическіе интегралы найдутся изъ формулъ:

1, $U=x$; 2, $V=x$; 3, $W=x$; 4, $T=x$.

*B*) Разсматривая, въ какихъ случаяхъ уравненіе (2) можетъ быть удовлетворено выраженіями вида

$$X=a\,\frac{(x+b)^2}{cx+d},\quad X=\frac{ax+b}{c(x+d)^2},$$

безъ особенныхъ затрудненій найдемъ рѣшенія этого уравненія для случаевъ 5^аго^, 6^аго^, 7^аго^ и 8^аго^ табл. (*F*) и получимъ

$$5,\quad V=-\frac{4x}{(1-x)^2},\qquad 6,\quad W=-\frac{(1-x)^2}{4x},$$

$$7,\quad T=-\frac{4x}{(1-x)^2},\qquad 8,\quad T=-\frac{(1-x)^2}{4x}.$$

$C$) Для прочихъ 7 случаевъ ($F$) нахожденіе рѣшенія уравненія (2) нѣсколько сложнѣе.

Преобразуемъ сперва уравненіе (2) подстановкой

$$(3) \qquad x = \frac{(c-b)(z-a)}{(c-a)(z-b)}$$

такъ, что значеніямъ $x=0, \infty, 1$ отвѣчаютъ значенія $z = a, b, c$; отсюда

$$(4) \qquad z = \frac{b(c-a)x-a(c-b)}{(c-a)x-(c-b)}, \quad \frac{dx}{dz} = \frac{(c-b)(a-b)}{(c-a)(z-b)^2}$$

$$(5) \quad \frac{X'''}{X'} - \frac{3}{2}\left(\frac{X''}{X'}\right)^2 + X'^2\left\{\frac{1-\frac{1}{l^2}}{2X^2} + \frac{1-\frac{1}{n^2}}{2(1-X)^2} - \frac{\frac{1}{l^2}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}-1}{2X(1-X)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)}\left\{\frac{1-\lambda^2}{2(z-a)}(a-b)(a-c) + \frac{1-\mu^2}{2(z-b)}(b-c)(b-a) + \frac{1-\nu^2}{2(z-c)}(c-a)(c-b)\right\}.$$

Замѣтимъ при этомъ, что члены съ квадратами $\frac{1}{z-a}, \frac{1}{z-b}$ и $\frac{1}{z-c}$ будутъ имѣть видъ

$$(6) \qquad \frac{\frac{1-\lambda^2}{2}}{(z-a)^2} + \frac{\frac{1-\mu^2}{2}}{(z-b)^2} + \frac{\frac{1-\nu^2}{2}}{(z-c)^2}.$$

Положимъ $X = R(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ ($\varphi$ и $\psi$ — полиномы) и обозначимъ

$$\varphi(z) = \Pi(z-\alpha_i)^{\alpha_i}, \quad \psi(z) = \Pi(z-b_i)^{\beta_i}, \quad \varphi(z) - \psi(z) = \Pi(z-c_i)^{\gamma_i};$$

$$(\varphi\psi) = \varphi'\psi - \psi'\varphi = \Pi(z-a_i)^{\alpha_i-1}(z-b_i)^{\beta_i-1}(z-c_i)^{\gamma_i-1}(z-d_i)^{\delta_i-1}.$$

Отбирая въ лѣвой части уравненія (2) коэффиціенты при

$$\frac{1}{(z-a_i)^2}, \quad \frac{1}{(z-b_i)^2}, \quad \frac{1}{(z-c_i)^2} \text{ и } \frac{1}{(z-d_i)^2},$$

мы найдемъ соотвѣтственно:

$$(\alpha_i-1)(\alpha_i-2)-\frac{3}{2}(\alpha_i-1)^2+\alpha_i^2\left(\frac{1-\frac{1}{l^2}}{2}\right)=\frac{1-\frac{\alpha_i^2}{l^2}}{2}$$

$$(\beta_i+1)(\beta_i+2)-\frac{3}{2}(\beta_i-1)^2+\beta_i^2\left(\frac{1-\frac{1}{m^2}}{2}\right)=\frac{1-\frac{\beta_i^2}{m^2}}{2}$$

$$(\gamma_i-1)(\gamma_i-2)-\frac{3}{2}(\gamma_i-1)^2+\gamma_i^2\left(\frac{1-\frac{1}{n^2}}{2}\right)=\frac{1-\frac{\gamma_i^2}{n^2}}{2}$$

$$(\delta_i-1)(\delta_i-2)-\frac{3}{2}(\delta_i-1)^2=\frac{1-\delta_i^2}{2}.$$

Такимъ образомъ члены съ квадратами $\frac{1}{z-a}$, $\frac{1}{z-b}$ и $\frac{1}{z-c}$ будутъ имѣть въ лѣвой части уравненія (2) слѣдующій видъ

$$(7)\qquad \sum\frac{1-\frac{\alpha_i^2}{l^2}}{2(z-a_i)^2}+\sum\frac{1-\frac{\beta_i^2}{m^2}}{2(z-b_i)^2}+\sum\frac{1-\frac{\gamma_i^2}{n^2}}{2(z-c_i)^2}+\sum\frac{1-\delta_i^2}{2(z-d_i)^2}.$$

Сопоставляя выраженія (6) и (7) и принимая во вниманіе случаи 9—15 таблицы ($F$), мы начнемъ искать рѣшенія для $l=3$, $m=5$ и $n=2$.

Раздѣлимъ корни $a_i$ на три категоріи:

1) корни $a_i$ кратности: $\alpha_i$ не $\equiv 0 \pmod 3$.

2) „ $a_i'$ „ $\alpha_i'=3$.

3) „ $a_i''$ „ $\alpha_i''\equiv 0 \pmod 3$.

Такимъ же образомъ поступимъ съ корнями $\psi$, $\varphi-\psi$ относительно чиселъ 5 и 2. Если правая часть уравненія (2) будетъ намъ дана, а вмѣсто чиселъ $\lambda$, $\mu$ и $\nu$ подставимъ числа 9—15 табл. ($F$), то намъ не трудно будетъ замѣтить, какіе изъ корней $a$, $b$, $c$ будутъ принадлежать соотвѣтственно $\varphi$, $\psi$, $\varphi-\psi$ и какой они будутъ кратности; вмѣстѣ съ тѣмъ мы убѣдимся, что корней кратности $\alpha_i''$, $\beta_i''$ и $\gamma_i''$ эти полиномы не имѣютъ; корни $\varphi$, $\psi$ и $\varphi-\psi$ соотвѣтственно кратности 3, 5 и 2 намъ останутся неизвѣстными. Такимъ образомъ мы найдемъ

$$\varphi=\Pi(z-a_i)^{\alpha_i}\rho^3,\quad \psi=\Pi(z-b_i)^{\beta_i}\sigma^5,\quad \varphi-\psi=\Pi(z-c_i)^{\gamma_i}\tau^2,$$

гдѣ $\rho$, $\sigma$ и $\tau$ — полиномы, неимѣющіе кратныхъ корней, степени которыхъ опредѣлятся соотношеніями

$$\Sigma\alpha_i + 3k = \Sigma\beta_i + 5k' = \Sigma\gamma_i + 2k'' = N$$

(при совершенно произвольныхъ $a$, $b$ и $c$ мы будемъ считать $\varphi$ и $\psi$ полиномами одной степени)

$$\Sigma(\alpha_i - 1) + 2k + \Sigma(\beta_i - 1) + 4k' + \Sigma(\gamma_i - 1) + k'' = 2N - 2.$$

Дальнѣйшее рѣшеніе приводится къ способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, причемъ существенное облегченіе вычисленій можетъ быть достигнуто соотвѣтствующимъ выборомъ произвольныхъ величинъ $a$, $b$, $c$.

Приложимъ эти общія соображенія къ одному изъ случаевъ ($F$), напр. 14:

$$\lambda = \frac{1}{3}, \quad \mu = \frac{2}{5}, \quad \nu = \frac{1}{2}.$$

Легко убѣдиться, что

$$\varphi = (z - a)\,\rho^3, \quad \psi = (z - b)^2\,\sigma^5, \quad \varphi - \psi = (z - c)\,\tau^2.$$

Уравненія

$$1 + 3k = 2 + 5k' = 1 + 2k'' = N, \quad 2k + 1 + 4k' + k'' = 2N - 2$$

даютъ

$$k = 2, \quad k' = 1, \quad k'' = 3, \quad N = 7.$$

Числа $b$ и $c$ выберемъ произвольно; положимъ $b = -1$, $c = 0$; что же касается $a$, то положимъ, что оно выбрано такъ, чтобы $\sigma$ обратилось въ постоянную величину.

Полиномъ $\tau$ долженъ дѣлить $(\varphi\psi)$; поэтому можно положить

$$\tau = (z - 2a - 1)\,\rho - 3\,(z + 1)\,(z - a)\,\rho'.$$

Представляя $\varphi$ и $\psi$ въ видѣ

$$\varphi = C(z-a)(z^2+Az+B)^3, \quad \psi = -E(z+1)^2,$$

мы должны имѣть тождество

$$(8) \qquad C(z-a)(z^2+Az+B)^3+E(z+1)^2=$$

$$=z\{(z-2a-1)(z^2+Az+B)-3(z+1)(z-a)(2z+A)\}^2.$$

Полагая $Z=0$ и $\infty$, найдемъ

$$aCB^3=E; \quad C=25.$$

Выдѣляя въ (8) члены, свободные отъ $\varrho$, и выражая, что они тоже дѣлятся на $\varrho$, мы получимъ

$$A=\frac{19.7}{64}, \quad B=\frac{49}{64}, \quad a=-\frac{27.7}{64}$$

и слѣдовательно

$$\varphi=25\left(z+\frac{27.7}{64}\right)\left(z^2+\frac{19.7}{64}z+\frac{49}{64}\right)^3$$

$$\psi=25.7^7.27.\frac{1}{64^4}(z+1)^2.$$

Чтобы отсюда получить окончательное выраженіе интеграла уравненія (2), нужно еще $z$ замѣнить на

$$\frac{-\frac{7.27}{64}x-\frac{7.27}{64}}{\frac{7.27}{64}x-1}.$$

Такимъ образомъ получимъ въ результатѣ

$$T=\frac{x(-2^2.3^6x^2+3^3.7.13x+7.2^9)^3}{(7.3^3x-2^6)^5}.$$

Подобнымъ же образомъ можно составить слѣдующую таблицу:

9, $T = -\frac{(x-4)^3}{27\,x^2}$;  10, $T = -\frac{1}{2^6} \cdot \frac{x\,(x+8)^3}{(1-x)^3}$;

11, $T = \frac{2^2}{3^3} \cdot \frac{(x^2-x+1)^3}{x^2\,(1-x)^2}$;  12, $T = \frac{1}{2^2.3^3} \cdot \frac{(x^2+14\,x+1)^3}{x\,(1-x)^4}$;

13, $T = \frac{3^3}{2^2} \cdot \frac{(5^3\,x-2^7)^3}{(x-1)(5^2x-2^4)^5}$;  14, $T = \frac{x\,(2^2.\,3^3\,x^2+7.13.3^3\,x+7.2^9)^3}{(7.3^3\,x-2^6)^5}$;

15, $T = \frac{x\,(-2^6.5^3-3^2.5^4\,x+2.5.53.67\,x^2-3^2.53^2\,x^3)^3}{2^9.5^3.43.53(x-1)^2\,(53\,x-2.5)^5}$.

# ГЛАВА IV.

1. Изложенная выше теорія линейныхъ дифференціальныхъ уравненій можетъ быть приложена къ рѣшенію нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ слѣдующей общей задачи: преобразовать положительную часть плоскости $(A)$ въ данную плоскую фигуру $S$ съ простымъ контуромъ $P$ такимъ образомъ, чтобы

*a*) было сохранено подобіе въ безконечно-малыхъ частяхъ,

*b*) чтобы каждой точкѣ плоскости $(A)$ отвѣчала одна или нѣсколько точекъ внутри $S$, и обратно,

*c*) чтобы точкамъ на оси $X^{\text{овъ}}$ отвѣчали точки на контурѣ $P$, и обратно,

*d*) чтобы притомъ 3 опредѣленнымъ точкамъ оси $X^{\text{овъ}}$ отвѣчали три опредѣленныя точки на контурѣ $P$.

Мы не будемъ останавливаться на доказательствѣ возможности рѣшенія задачи въ такомъ общемъ видѣ и ограничимся разсмотрѣніемъ того случая, когда каждой точкѣ плоскости $A$ отвѣчаетъ только одна точка внутри $S$, и когда контуръ $P$ составленъ изъ конечнаго числа пересѣкающихся прямыхъ линій или окружностей.

Какъ извѣстно, всякая функція $Z$ отъ комплекснаго перемѣннаго $z=x+iy$ преобразовываетъ плоскость этого перемѣннаго (или часть ея) въ нѣкоторую часть плоскости $Z$ съ сохраненіемъ подобія въ безконечно малыхъ частяхъ.

Чтобы такая функція $Z$ давала рѣшеніе задачи, нужно, чтобы она удовлетворила еще слѣдующимъ условіямъ:

1. $Z = f(z)$ остается конечной, непрерывной и однозначной для всѣхъ точекъ положительной части $(A)$ плоскости и, слѣдовательно, разлагается, въ области каждой точки $z_0$, принадлежащей $(A)$, по цѣлымъ и положительнымъ степенямъ $z - z_0$.

2. $f'(z)$ не обращается въ нуль ни для одного значенія $z$, находящагося въ $(A)$; ибо, если бы $f'(z_1)$ было нулемъ, то вблизи этой точки одной точкѣ фигуры $S$ отвѣчало бы двѣ или нѣсколько точекъ $(A)$.

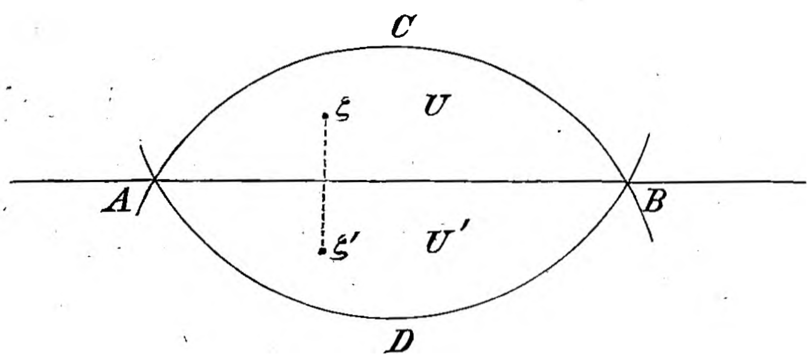
3. $Z$ остается непрерывной для вещественныхъ значеній $z$ и описываетъ, для этихъ значеній $z$, контуръ $P$ фигуры $S$.

4. $z$, какъ функція отъ $Z$, удовлетворяетъ подобнымъ же условіямъ, причемъ значеніями $Z$ на контурѣ $S$ отвѣчаютъ вещественныя значенія $z$.

5. Тремъ опредѣленнымъ значеніямъ $Z$ на контурѣ $P$ отвѣчаютъ три опредѣленныя точки на вещественной оси и наоборотъ.

2. Рѣшеніе, которое будетъ изложено далѣе, основано на принципѣ аналитическаго продолженія функцій.

Пусть $\Xi = \varphi(\zeta)$ есть функція, непрерывная на площади $U$ и ея контурѣ; для всѣхъ значеній $\zeta$, лежащихъ въ площади $U$ выше оси $AB$, она разлагается въ рядъ по цѣлымъ и положительнымъ степенямъ $\zeta$; кромѣ того, она вещественна для вещественныхъ значеній $\zeta$ *).




Пусть $\zeta'$ есть сопряженная съ $\zeta$ точка; будемъ принимать за значеніе $\varphi(\zeta')$ сопряженную съ $\varphi(\zeta)$ величину. Функція $\Xi$, непрерывная

*) Ось $AB$ есть ось вещественныхъ значеній $\zeta$.

въ площади $U$ и вещественная для вещественныхъ значеній $\zeta$, останется непрерывной и при указанномъ ея аналитическомъ продолженіи. Вмѣстѣ съ тѣмъ, интегралы

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(ABCA)}\frac{\varphi(z)\,dz}{z-\zeta} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(ADBA)}\frac{\varphi(z')\,dz'}{z'-\zeta}$$

будутъ обладать всѣми извѣстными для интеграловъ отъ конечныхъ, непрерывныхъ и однозначныхъ функцій свойствами. На этомъ основаніи, смотря по тому, находится ли точка $\zeta$ внутри $U$ или внутри $U'$, для этихъ интеграловъ получимъ соотвѣтственно слѣдующія значенія

$$\varphi(\zeta),\ 0;\quad 0,\ \varphi(\zeta).$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(ACBDA)}\frac{\varphi(z)\,dz}{z-\zeta}=\varphi(\zeta),$$

гдѣ бы точка $\zeta$ въ площади $U+U'$ ни находилась; изъ этого выраженія $\varphi(\zeta)$, между прочимъ, вытекаетъ, что функція $\Xi=\varphi(\zeta)$ можетъ быть разложена въ рядъ по цѣлымъ и положительнымъ степенямъ $\zeta-\zeta_0$, гдѣ $\zeta_0$ есть точка на оси $AB$; въ этомъ разложеніи

$$\mathrm{Z}-\mathrm{Z}_0=a(\zeta-\zeta_0)+b(\zeta-\zeta_0)^2+\ldots$$

коэффиціенты $a, b, \ldots$ непремѣнно вещественны.

3. Пусть фигура $S$ ограничена нѣсколькими пересѣкающимися прямыми $L, L_1, \ldots$ Пусть $Z=f(z)$ есть функція, дающая рѣшеніе задачи для этого случая. Пусть $Z_0$ есть значеніе ея въ какой нибудь точкѣ, принадлежащей сторонѣ $L$, и $h\pi$ — уголъ между $L$ и $OX$. Функція

$$\Xi=(Z-Z_0)\,e^{-\pi hi},$$

удовлетворитъ условіямъ леммы п. 2; поэтому

$$\Xi=(Z-Z_0)\,e^{-\pi hi}=a(z-z_0)+b(z-z_0)^2+c(z-z_0)^3+\ldots,$$

гдѣ $z_0$ есть соотвѣтствующее $Z_0$ значеніе перемѣннаго $z$; коэффиціенты $a$, $b$, $c$, ... — числа вещественныя; $a \gtrless 0$. Отсюда

$$Z - Z_0 = e^{\pi h i}(z - z_0)\, p(z - z_0).$$

Пусть $Z'$ есть значеніе $Z$ для одной изъ вершинъ многоугольника $S$, напр. для той, гдѣ $L$ пересѣкаетъ $L'$ и пусть уголъ $L'$ съ $OX$ равенъ $h'\pi = h\pi + \alpha\pi$; разсмотримъ фрнкцію

$$\Xi' = \{(Z' - Z)\, e^{-i\pi h}\}^{\frac{1}{\alpha}}.$$

$\Xi'$ будетъ вещественна, какъ для значеній $Z$ на линіи $L$, такъ и для значенія $Z$ на линіи $L'$, причемъ для $L$ положительна, для $L'$ — отрицательна. Лемма п. 2 можетъ быть приложена къ ней. Поэтому

$$\Xi' = \{(Z' - Z)^{-i\pi h}\}^{\frac{1}{\alpha}} = a'(z - z') + b'(z - z')^2 + c'(z - z')^3 + \ldots,$$

гдѣ $z'$ — соотвѣтствующая $Z'$ точка на $OX$, $a'$, $b'$, $c'$, ... числа вещественныя, $a' \gtrless 0$. Можно положить

$$Z' - Z = e^{i\pi h}(z - z')^{\alpha}\, p'(z - z').$$

Для точекъ внутри контура

$$Z - Z_1 = (z - z_1)\, P(z - z_1),$$

гдѣ $P$ — рядъ, коэффиціенты котораго могутъ и не быть вещественными.

Для безконечно далекой точки $z = \infty$, если соотвѣтствующая ей точка $Z_\infty$ находится на сторонѣ $L$, найдемъ, что

$$Z - Z_\infty = \frac{e^{ih\pi}}{z}\, p_1\left(\frac{1}{z}\right).$$

Если же $Z_\infty$ совмѣщается съ точкой пересѣченія двухъ сторонъ, напр. $L$ и $L'$, то

$$Z - Z_\infty = \frac{e^{ih\pi}}{z^{\alpha}}\, p_1'\left(\frac{1}{z}\right).$$

Ряды $p_1$ и $p_1'$ имѣютъ вещественные коэффиціенты.

Разсмотримъ функцію

$$E(z) = \left(\frac{Z'}{Z}\right)' = \frac{Z''Z - Z'^2}{Z^2} = \frac{d}{dz} \lg \frac{dZ}{dz}.$$

Зная всѣ виды разложенія функціи $Z$ внутри $S$ и на контурѣ $P$, послѣдовательно убѣждаемся, что

$$E(z) = a + b(z - z_0) + c(z - z_0)^2 + \ldots,$$

если $Z$ находится на сторонѣ фигуры $S$ (числа $a, b, c, \ldots$ вещественныя);

$$E(z) = \frac{\alpha - 1}{z - z_0} + a' + b'(z - z_0) + c'(z - z_0)^2 + \ldots,$$

если $Z$ находится въ вершинѣ контура $S$ ($a', b', c' \ldots$ вещественныя числа);

$$E(z) = A + B(z - z_0) + C(z - z_0)^2 + \ldots,$$

если $Z$ находится внутри фигуры $S$ (числа $A, B, C, \ldots$ — какія угодно);

$$E(z) = -\frac{2}{z} + \frac{1}{z^2}\left(a'' + b''\frac{1}{z} + c''\frac{1}{z^2} + \ldots\right)$$

для безконечно большихъ значеній $z$, если соотвѣтственное значеніе $Z$ находится на сторонѣ многоугольника ($a'', b'', c'' \ldots$ числа вещественныя).

Изъ этихъ формулъ вытекаетъ, что функція $E(z)$, вмѣстѣ съ ея аналитическимъ продолженіемъ, остается непрерывной и однозначной на всей плоскости перемѣннаго $z$. Она обращается въ безконечность перваго порядка только для конечнаго числа отдѣльныхъ значеній $z$. Изъ этого слѣдуетъ, что $E(z)$ есть раціональная функція отъ $z$; а такъ какъ при этомъ для безконечно далекихъ значеній она обращается въ нуль, и коэффиціентъ при низшей степени $\frac{1}{z}$ есть $-2$, то $E(z)$ должна быть вида

$$(1) \qquad E(z) = \frac{d}{dz} \lg \frac{dZ}{dz} = \sum_k \frac{\alpha_k - 1}{z - a_k}, \qquad \Sigma(\alpha_k - 1) = -2,$$

гдѣ $a_k$ суть значенія $z$, которымъ соотвѣтствуютъ вершины многоугольника, а $\alpha_k \pi$ — углы при этихъ вершинахъ.

Изъ уравненія (1) находимъ

$$(2) \qquad Z = C\int \Pi_k (z - a_k)^{\alpha_k - 1} dz + C'.$$

4. Изложенная метода легко прилагается къ тому случаю, когда многоугольникъ $S$ составленъ изъ дугъ пересѣкающихся окружностей.

Извѣстно, что круговой подстановкой *)

$$(1) \qquad Z_1 = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta}$$

всегда возможно преобразовать двѣ пересѣкающіяся подъ нѣкоторымъ угломъ окружности въ двѣ другія, пересѣкающіяся подъ тѣмъ же угломъ (одна или двѣ окружности могутъ быть въ частныхъ случаяхъ и прямыми линіями).

Пусть $Z$ есть функція, преобразовывающая положительную часть плоскости $z$ въ многоугольникъ, составленный изъ прямыхъ линій; числа $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ можно подобрать такъ, чтобы $Z_1$, опредѣляемая уравненіемъ (1), давала преобразованіе точекъ, лежащихъ на сторонѣ, на пересѣченіи двухъ сторонъ, или внутри прямолинейнаго многоугольника въ соотвѣтственные элементы круговаго многоугольника. Всѣ различные $Z_1$ будутъ связаны съ $Z$ уравненіемъ (ср. п. 18, гл. III).

$$(2) \qquad \frac{Z_1'''}{Z_1'} - \frac{3}{2}\left(\frac{Z_1''}{Z_1'}\right)^2 = \frac{Z'''}{Z'} - \frac{3}{2}\left(\frac{Z''}{Z'}\right)^2, \quad \text{т. е.} \quad (Z_1)_z = (Z)_z.$$

Это уравненіе сейчасъ же даетъ возможность опредѣлить, какой видъ имѣютъ разложенія выраженія

$$(Z_1)_z = \frac{d^2}{dz^2} \lg \frac{dZ_1}{dz} - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dz} \lg \frac{dZ_1}{dz}\right)^2$$

при различныхъ положеніяхъ $Z_1$ относительно контура фигуры $S$:

$$(3) \qquad (Z_1)_z = a(z - z_0) + b(z - z_0)^2 + c(z - z_0)^3 + \ldots,$$

если $Z_1$ находится на сторонѣ фигуры ($a$, $b$, $c$, ... вещественны);

$$(4) \qquad (Z_1)_z = \frac{1}{2}\frac{1 - \alpha^2}{(z - z_1)^2} + \frac{a'}{z - z_1} + b' + c'(z - z_1) + \ldots,$$

*) См. Ермаковъ. Круговое преобразованіе.

если $Z_1$ находится въ точкѣ пересѣченія двухъ сторонъ $S$, составляющихъ уголъ $\alpha\pi$ ($a'$, $b'$, $c'$,... вещественны);

$$(5)\qquad (Z_1)_z = \frac{a_1}{z^4} + \frac{b_1}{z^5} + \frac{c_1}{z^6} + \ldots,$$

если $z = \infty$ отвѣчаетъ $Z_1$ на сторонѣ $S$ ($a_1$, $b_1$, $c_1$,... вещественны);

$$(6)\qquad (Z_1)_z = \frac{1}{2}\frac{1-\alpha^2}{z^2} + \frac{a_1'}{z^3} + \frac{b_1'}{z^4} + \ldots,$$

если $z = \infty$ отвѣчаетъ $Z_1$ въ вершинѣ фигуры $S$ ($a_1'$, $b_1'$,... вещественны);

$$(7)\qquad (Z_1)_z = A + B(z - z_2) + C(z - z_2)^2 + \ldots,$$

если $Z_1$ находится внутри $S$ ($A$, $B$, $C$,... какія угодно числа).

Изъ этихъ формулъ слѣдуетъ, что, если $n$ есть число сторонъ $S$, $a_k$ — значенія $z$, соотвѣтствующія вершинамъ $S$, и $\alpha_k\pi$ — углы при вершинахъ, то функція

$$(Z_1)_z - \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1-\alpha_k^2}{2(z-a_k)^2} - \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\beta_k}{z-a_k}$$

остается конечной, непрерывной и однозначной для всѣхъ конечныхъ значеній $z$. Для $z = \infty$ эта функція обращается въ нуль. Изъ этого заключаемъ, что указанная функція есть величина постоянная, равная нулю. Поэтому

$$(8)\qquad (Z_1)_z = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1-\alpha_k^2}{2(z-a_k)^2} + \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\beta_k}{z-a_k}.$$

Величины $\alpha_k$ и $\beta_k$ связаны условіями слѣдующаго вида: если $Z_1$, соотвѣтствующее $z = \infty$, лежитъ на сторонѣ $S$, то

$$(9)\qquad \sum_{k=1}^{k=n}\beta_k = 0,\quad \sum_{k=1}^{k=n}\left(a_k\beta_k + \frac{1-\alpha_k^2}{2}\right) = 0,\quad \sum_{k=1}^{k=n}\left(a_k^2\beta_k + a_k(1-\alpha_k^2)\right) = 0;$$

эти уравненія показываютъ, что разложеніе $(Z_1)_z$ для безконечно большихъ значеній $z$ начинается съ $\frac{1}{z^4}$; если же $z = \infty$ отвѣчаетъ вершина $S$, при которой уголъ $\alpha\pi$, то разложеніе $(Z_1)_z$ въ области $\infty$ должно начинаться членомъ $\frac{1-\alpha^2}{2z^2}$ и поэтому

$$(10)\qquad \sum_{k=1}^{k=n}\beta_k=0,\quad \sum_{k=1}^{k=n}\left(a_k\beta_k-\frac{1-\alpha_k^2}{2}\right)=\frac{1-\alpha^2}{2}.$$

Сопоставляя уравненіе (8) съ уравненіемъ (1) п. 19, гл. III,

$$(\eta)_z=2q-\frac{1}{2}p^2-p'\,^*),$$

которому удовлетворяетъ отношеніе двухъ независимыхъ интеграловъ линейнаго уравненія $2^{\underline{аго}}$ порядка

$$(11)\qquad y_z''+py_z'+qy=0,$$

заключаемъ, что функція $Z_1$, дающая рѣшеніе нашей задачи, можетъ быть разсматриваема, какъ отношеніе двухъ независимыхъ интеграловъ уравненія (11), для котораго

$$(12)\qquad 2q-\frac{1}{2}p^2-p'=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1-\alpha_k^2}{2(z-a_k)^2}+\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\beta_k}{z-a_k}.$$

Принявъ за $p$ функцію, удовлетворяющую условіямъ необходимымъ и достаточнымъ для того, чтобы интегралы уравненія (11) были въ областяхъ точки $a_k$ всѣ правильные, т. е. положивъ (п. 2, гл. III) $p=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\gamma_k}{z-a_k}$, ($\gamma_k$ — числа вещественныя), изъ уравненія (12) мы найдемъ для $q$ выраженіе, удовлетворяющее тѣмъ же условіямъ.

Слѣдовательно, *функція $Z_1$ всегда можетъ быть разсматриваема, какъ отношеніе двухъ независимыхъ интеграловъ линейнаго уравненія $2^{\underline{аго}}$ порядка съ вещественными коэффиціентами, имѣющаго конечное число вещественныхъ же особенныхъ точекъ и всѣ интегралы правильные.*

На основаніи замѣчаній п. п. 18 и 19 гл. III, общій интегралъ уравненія (8), если $Z_1$ есть его частный интегралъ, представится въ видѣ $Z=\frac{AZ_1+B}{CZ_1+D}$; $A$, $B$, $C$ и $D$ всегда возможно выбрать такъ,

---

*) $z$ стоитъ вмѣсто $x$.

чтобы тремъ заданнымъ значеніямъ $z$ на $OX$ отвѣчали три заданныхъ значенія $Z$.

5. Обратимся теперь къ доказательству обратнаго положенія, т. е. разсмотримъ, представляетъ ли всегда отношеніе двухъ независимыхъ интеграловъ линейнаго уравненія $2^{\text{аго}}$ порядка съ вещественными коэффиціентами, имѣющаго всѣ интегралы правильные и конечное число вещественныхъ особенныхъ точекъ, функцію, дающую рѣшеніе задачи о преобразованіи положительной части плоскости независимаго перемѣннаго въ нѣкоторый многоугольникъ, ограниченный дугами пересѣкающихся круговъ.

Для упрощенія изложенія, мы ограничимся разсмотрѣніемъ самаго общаго линейнаго уравненія $2^{\text{аго}}$ порядка, удовлетворяющаго указаннымъ условіямъ, и имѣющаго 3 особенныхъ точки—безконечно далекую и двѣ конечныхъ. Такое уравненіе можетъ быть, какъ мы видѣли въ гл. II, приведено къ виду

$$(H) \qquad y'' + \frac{(\alpha+\beta+1)z-\gamma}{z(z-1)}y' + \frac{\alpha\beta}{z(z-1)}y = 0;$$

по условію, числа $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ должны быть вещественны.

Уравненія (8) и (12) предъидущаго пункта примутъ въ этомъ случаѣ видъ (п. 20, гл. III)

$$(1) \qquad (\eta)_z = \frac{1-\lambda^2}{2z^2} + \frac{1-\nu^2}{2(z-1)^2} + \frac{\lambda^2+\nu^2-\mu^2-1}{2z(z-1)}.$$

Представимъ (1) въ видѣ

$$(2) \quad (\eta)_z = \frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = \frac{d^2}{dz^2}\left(\lg\frac{d\eta}{dz}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dz}\lg\frac{d\eta}{dz}\right)^2 = \varphi(z) = \frac{d\rho}{dz} - \frac{1}{2}\rho^2.$$

Пусть $z_0$ — какая нибудь обыкновенная точка уравненія $(H)$; въ такомъ случаѣ $\varphi(z)$ можетъ быть представлена въ видѣ

$$(3) \qquad \varphi(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

Провѣримъ, можно ли уравненію (2) удовлетворить нѣкоторой функціей $\eta_0$, для которой

$$(4) \quad \frac{d}{dz}\lg\frac{d\eta_0}{dz} = \rho_0 = \frac{-2}{z-z_0} + b_0 + b_1(z-z) + b_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

Опредѣлимъ для этого коэффиціенты $b$ такъ, чтобы уравненіе (1) удовлетворилось, а затѣмъ удостовѣримся, что рядъ (4), въ которомъ $b$ опредѣлятся указаннымъ образомъ, будетъ въ области $z_0$ сходящимся.

Первое условіе приводитъ насъ къ уравненіямъ:

$$(5)\quad \sum_{m=1}^{m=\infty}(m+2)b_m(z-z_0)^{m-1}-\frac{1}{2}\left[\sum_{m=1}^{m=\infty}b_m(z-z_0)^m\right]^2=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\ldots$$

$$b_0=0.$$

Если коэффиціентъ при $(z-z_0)^{m-1}$ въ разложеніи

$$\left[b_1(z-z_0)+b_2(z-z_0)^2+\ldots+b_{m-2}(z-z_0)^{m-2}\right]^2$$

обозначить черезъ $G(b_1, b_2, \ldots b_{m-2})$, то уравненіе (5) дастъ

$$(6)\quad b_m=\frac{1}{m+2}\left(a_{m-1}+\frac{1}{2}G(b_1, b_2, \ldots b_{m-2})\right), \qquad m=1,2,3,\ldots$$

откуда всѣ $b_m$ опредѣлятся, какъ цѣлыя функціи отъ $a_0$, $a_1, \ldots a_{m-1}$ съ положительными и раціональными коэффиціентами.

Чтобы доказать сходимость ряда (4), въ коемъ $b$ опредѣлены по формуламъ (6), замѣчаемъ, что если бы $\rho_0$ было равно

$$(7)\quad \rho_0=-\frac{2}{z-z_0}+\frac{2(z-z_0)}{\xi(\xi-(z-z_0))}=-\frac{2}{z-z_0}+\sum_{m=1}^{m=\infty}\beta_m(z-z_0)^m,\ \beta_m=2\left(\frac{1}{\xi}\right)^{m+1},\ \xi>0,$$

то $\frac{d\rho_0}{dz}-\frac{1}{2}\rho_0^2$ имѣло бы видъ

$$\frac{d\rho_0}{dz}-\frac{1}{2}\rho_0^2=\sum_{m=0}^{m=\infty}\alpha_m(z-z_0)^m,\ \alpha_0=\frac{6}{\xi^2},\ \alpha_m=8\left(\frac{1}{\xi}\right)^{m+2}.$$

Такимъ образомъ, если бы $\varphi(z)$ было равно $\sum_{m=0}^{m=\infty}\alpha_m(z-z_0)^m$, то изъ уравненій, подобныхъ (6) и (7), получилось бы: для $b_m$ — значенія, равныя $\beta_m$, и для $\rho_0$ — рядъ вида (4), сходящійся при $\mathrm{mod}\,(z-z_0)<\xi$.

Если же $\varphi(z)$ разлагается въ рядъ (3) $\sum a_m(z-z_0)^m$, не совпадающій съ $\sum \alpha_m(z-z_0)^m$, то можно такъ распорядиться числомъ $\xi$, что

$$\operatorname{mod} a_m \text{ будетъ } < \alpha_m, \qquad m=0,1,2,\ldots$$

Такъ какъ рядъ (3)—сходящійся для $z$ достаточно близкаго къ $z_0$, то, если $z_1$ не выходитъ изъ области сходимости, $\operatorname{mod} a_m(z_1-z_0)^m$ будетъ меньше нѣкоторой конечной величины $\varepsilon$. Если положить $\xi$ на столько малымъ, что удовлетворятся неравенства

$$\operatorname{mod} a_m < \alpha_m = 8\left(\frac{1}{\xi}\right)^{m+2}, \quad \xi < \operatorname{mod}(z_1-z_0), \quad \varepsilon\xi^2 < 6,$$

то изъ уравненій (6) для $b_m$ получатся величины меньше $\beta_m$; рядъ (4) будетъ, слѣдовательно, при $\operatorname{mod}(z-z_0) < \xi$, сходящимся.

Изъ уравненія (4), интегрируя и подбирая соотвѣтственнымъ образомъ вводимыя интегрированіемъ постоянныя, мы найдемъ

$$\text{(8)} \qquad \eta_0 = \frac{1}{z-z_0} + B_0(z-z_0) + B_1(z-z_0)^2 + \ldots,$$

гдѣ рядъ $\sum B_k(z-z_0)^k$ будетъ сходящимся въ предѣлахъ сходимости ряда (4).

Общій интегралъ уравненія (1), какъ извѣстно изъ ранѣе сдѣланныхъ замѣчаній, можетъ быть представленъ въ видѣ

$$\eta = \frac{A\eta_0 + B}{C\eta_0 + D}.$$

Изъ этихъ результатовъ мы заключаемъ: если $z_0$ есть обыкновенная точка уравненія $(H)$, то каждый частный интегралъ уравненія (1) преобразуетъ прилежащую къ точкѣ $z_0$ область $s_0$ въ нѣкоторую фигуру $S$ съ простымъ контуромъ, которая можетъ заключать и безконечно далекую точку.

Если $z_0$—вещественная величина, то коэффиціенты $a$, $b$ и $B$ въ рядахъ (3), (4) и (8) будутъ также вещественны; въ такомъ случаѣ содержащему $z_0$ отрѣзку вещественной оси будетъ отвѣчать: черезъ интегралъ $\eta_0$ уравненія (1) — прямая линія, и черезъ интегралъ $\eta$ — говоря вообще, дуга круга.

Теперь разсмотримъ выраженія $\eta$ для значеній $z$, равныхъ одной изъ особенныхъ точекъ уравненія $(H)$; остановимся на одной какой нибудь точкѣ, напр. $z_0=0$, такъ какъ можно всегда весьма простыми преобразованіями, какъ мы видѣли въ главѣ II, привести изслѣдованіе областей особенныхъ точекъ уравненія $(H)$ къ изслѣдованію области одной изъ нихъ.

Въ области точки $z_0=0$ функція $\varphi(z)$ имѣетъ видъ:

$$\varphi(z)=\frac{1-\lambda^2}{2z^2}+\frac{a_0}{z}+a_1+a_2 z+\ldots$$

Посмотримъ, нельзя ли уравненіе (1) удовлетворить функціей $\eta_0$, для которой

$$(9)\qquad \rho_0=\frac{d}{dz}\lg\frac{d\eta_0}{dz}=-\frac{1+\lambda}{z}+b_0+b_1 z+b_2 z^2+\ldots$$

Если это возможно, то коэффиціенты $b$ должны удовлетворить уравненіямъ

$$b_m=\frac{1}{m+1+\lambda}\left(a_m+\frac{1}{2}G'(b_0,b_1,\ldots b_{m-1})\right),\qquad m=0,1,2,\ldots,$$

гдѣ $G'(b_0,b_1,\ldots b_{m-1})$ есть коэффиціентъ при $z^{m-1}$ въ разложеніи $(b_0+b_1 z+\ldots+b_{m-1}z^{m-1})^2$ по степенямъ $z$.

Въ сходимости ряда (9) убѣдимся по пріему, употребленному въ разсмотрѣнномъ выше случаѣ: положивъ

$$\rho_0=-\frac{1+\lambda}{z}+\frac{2}{\xi-z},\quad \beta_m=2\left(\frac{1}{\xi}\right)^{m+1},\quad \alpha_m=2(1+\lambda)\left(\frac{1}{\xi}\right)^{m+1}$$

и выбравъ $\xi$ такъ, чтобы удовлетворились неравенства

$$\xi<\operatorname{mod} z_1\,{}^{*}),\quad \operatorname{mod} a_m(\operatorname{mod} z_1)^{m-1}<\varepsilon,\quad \operatorname{mod} z_1\,\varepsilon\xi<2(1+\lambda),$$

увидимъ, что $\operatorname{mod} b_m$ будетъ меньше $\beta_m$, и потому рядъ (9) $\sum b_m z^m$ будетъ сходящимся, по крайней мѣрѣ, при $\operatorname{mod} z<\xi$.

---

*) Mod $z_1 \overline{\gtrless}$ радіусу сходимости ряда для $\varphi(z)$; $\varepsilon$ — нѣкоторая конечная величина.

Интегрируя уравненіе (9), найдемъ

$$\frac{d\eta_0}{dz}=Cz^{-(1+\lambda)}e^{b_0z+\frac{1}{2}b_1z^2+\dots}=Cz^{-(1+\lambda)}(1+B_1z+B_2z^2+\dots),$$

$$\eta_0=-Cz^{-\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{B_1z}{1-\lambda}-\frac{B_2z^2}{2-\lambda}-\dots\right)+C',$$

если $\lambda$ не нуль и не цѣлое положительное число. Если же $\lambda=m$, гдѣ $m$ цѣлое число $\geqq 0$, то $\eta_0$ будетъ вида

$$\eta_0=-Cz^{-m}\left(\frac{1}{m}-\frac{B_1z}{1-m}-\dots\right)+B_m\lg z+C'.$$

Обозначимъ $-\frac{\lambda\eta_0}{C}$ черезъ $\eta_1$, $C'$ положимъ равнымъ нулю; условимся подъ $z^{-\lambda}$ и $\lg z$ разумѣть тѣ ихъ значенія, которыя для положительныхъ и вещественныхъ величинъ $z$ вещественны. Въ такомъ случаѣ получимъ для $\eta_1$ одно изъ слѣдующихъ выраженій:

$$(10)\qquad \eta_1=z^{-\lambda}(1+D_1z+D_2z^2+\dots)$$

$$(11)\qquad \eta_1=z^{-m}(1+D_1'z+D_2'z^2+\dots)+D\lg z;$$

$\eta_1$ будетъ вещественно, если $z$ будетъ принимать вещественныя величины между 0 и 1; такимъ образомъ $\eta_1$ будетъ преобразовывать прямолинейный отрѣзокъ оси $X^{\text{овъ}}$, примыкающій къ точкѣ 0, въ прямую линію.

Пусть $z$ опишетъ съ положительной стороны оси $z^{\text{овъ}}$ полукругъ около точки 0 и затѣмъ будетъ получать отрицательныя вещественныя значенія; $\eta_1$, опредѣляемое формулой (10), обратится, если подъ $z'$ разумѣть численное значеніе $z$, въ

$$\eta_1=e^{-\lambda\pi i}z'^{-\lambda}(1-D_1z'+D_2z'^2-\dots),$$

что показываетъ, что и для отрицательныхъ вещественныхъ значеній $z$, достаточно близкихъ къ 0, $\eta_1$ будетъ описывать прямую линію.

Что же касается $\eta_1$, опредѣляемаго формулой (11), то оно описываетъ, для вещественныхъ отрицательныхъ значеній $z$, прямую, параллельную прямой, проходимой $\eta_1$ для положительныхъ значеній $z$, и отстоящую на $D\pi$ отъ нея.

Интегралъ $\eta_2$ уравненія (1)

$$\eta_2 = \frac{1}{\eta_1} = z^\lambda \, (1 + E_1 z + E_2 z^2 + \ldots)$$

преобразуетъ часть плоскости, прилегающую къ $O$ съ положительной стороны вещественной оси, въ нѣкоторую часть плоскости $\eta$, ограниченную, вообще говоря, двумя дугами круговъ, пересѣкающихся въ точкѣ, соотвѣтствующей $z=0$, и составляющихъ уголъ $\lambda\pi$ между собой.

Если $\lambda$—число цѣлое, а $D$—не нуль, то эти два круга касаются въ точкѣ, соотвѣтствующей $z=0$. Если $\lambda$—цѣлое число, а $D$ нуль, то дуги принадлежатъ одному кругу.

Къ тѣмъ же совершенно заключеніямъ придемъ и относительно точекъ 1 и $\infty$.

Такимъ образомъ, *если $\alpha$, $\beta$, и $\gamma$ — числа вещественныя, то отношеніе двухъ независимыхъ интеграловъ уравненія* ($H$)

$$y'' + \frac{(\alpha+\beta+1)\, z-\gamma}{z\,(z-1)}\, y' + \frac{\alpha\beta}{z\,(z-1)}\, y = 0$$

*даетъ преобразованіе верхней части плоскости $z^{\text{овъ}}$ въ треугольникъ, ограниченный, вообще говоря, дугами круговъ, пересѣкающихся подъ углами $\lambda\pi$, $\mu\pi$ и $\nu\pi$, гдѣ*

$$\lambda = \operatorname{mod}(1-\gamma),\ \ \mu = \operatorname{mod}(\alpha-\beta),\ \ \nu = \operatorname{mod}(\gamma-\alpha-\beta);$$

*вершины этихъ угловъ соотвѣтствуютъ точкамъ $0$, $\infty$ и $1$.*

6. Воспользуемся изложенными геометрическими соображеніями для рѣшенія слѣдующей задачи:

*найти всѣ случаи, когда уравненіе гипергеометрическаго ряда* ($H$) *имѣетъ общій интегралъ алгебраическій.*

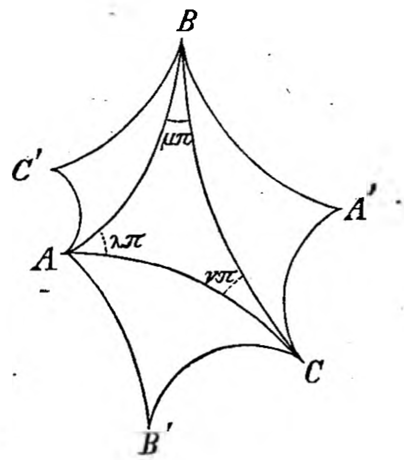
На основаніи общихъ замѣчаній п. 2, гл. III, числа $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ должны быть не только вещественными, но и раціональными.

Кромѣ того, можно предполагать, что ни одно изъ чиселъ $1-\gamma$, $\gamma-\alpha-\beta$ и $\alpha-\beta$ не есть цѣлое, такъ какъ этотъ случай находится въ связи съ вопросомъ о присутствіи логариѳмовъ въ выраженіяхъ независимыхъ интеграловъ уравненія ($H$) въ областяхъ соотвѣтственныхъ особенныхъ точекъ (п. 10, гл. II).

Если ни одно изъ чиселъ $1-\gamma$, $\gamma-\alpha-\beta$, $\alpha-\beta$ не есть цѣлое число, то всѣ интегралы уравненія $(H)$ выражаются черезъ геометрическіе ряды (п. 6, гл. II). Извѣстно, что три гипергеометрическихъ ряда, у которыхъ два какихъ нибудь элемента равны, а третій элементъ равенъ послѣдовательно $\delta$, $\delta+1$ и $\delta+2$, удовлетворяютъ нѣкоторому тождественному линейному соотношенію съ линейными относительно независимаго перемѣннаго коэффиціентами *). Поэтому, не уменьшая общности изслѣдованія, мы можемъ полагать, что каждое изъ чиселъ: $\lambda = \mathrm{mod}\,(1-\gamma)$, $\mu = \mathrm{mod}\,(\alpha-\beta)$, $\nu = \mathrm{mod}\,(\gamma-\alpha-\beta)$ — меньше единицы.

Кромѣ того, слѣдуетъ еще имѣть въ виду, что если для нѣкоторой совокупности частныхъ значеній чиселъ $\lambda$, $\mu$, $\nu$ уравненіе $(H)$ имѣетъ общій интегралъ алгебраическій, то для какой угодно комбинаціи тѣхъ же трехъ частныхъ значеній онъ будетъ алгебраическимъ; это положеніе вытекаетъ изъ того, что подстановками указаннаго въ п. 6, гл. II вида можно переставлять между собой особенныя точки уравненія $(H)$.

Пусть $\eta$, какъ обыкновенно, есть отношеніе двухъ независимыхъ интеграловъ уравненія $(H)$; пусть оно даетъ преобразованіе верхней части плоскости $z \overset{\text{овъ}}{=}$ въ треугольникъ; пусть точки $A$, $B$, $C$ соотвѣтствуютъ $z=0$, $z=\infty$ и $z=1$; углы при $A$, $B$, $C$ будутъ соотвѣтственно $\lambda\pi$, $\mu\pi$ и $\nu\pi$.




Если перемѣнная $z$ опишетъ отрѣзокъ $01$, то $\eta$ опишетъ дугу $AC$; если $z$ перейдетъ на отрѣзокъ $1\infty$ съ положительной стороны вещественной оси и будетъ затѣмъ описывать отрѣзокъ $1\infty$, то $\eta$ будетъ описывать дугу $CB$ и т. д.

Пусть теперь $z$, исходя изъ нѣкоторой точки $z_0$, находящейся въ верхней половинѣ плоскости $z \overset{\text{овъ}}{=}$, пересѣчетъ вещественную ось, напр., между точками 0 и 1 и перейдетъ въ отрицательную половину той же

*) Gauss Werke, B. III, s. 130.

плоскости; функцію $\eta$ мы замѣнимъ аналитическимъ ея продолженіемъ, которое обозначимъ черезъ $\eta'$ (п. 2). Если $z$ будетъ двигаться по отрѣзку 01, то $\eta'$ будетъ совпадать съ $\eta$ и опишетъ ту же дугу $AC$. Если $z$ обойдетъ точку 1 по полукругу съ отрицательной стороны вещественной оси, и затѣмъ будетъ двигаться по отрѣзку $1\infty$, то $\eta'$ будетъ описывать дугу $CB'$, пересѣкающую $AC$ въ точкѣ $C$ подъ тѣмъ-же угломъ, что и дуга $BC$ $(\nu\pi)$, но отложеннымъ по другую сторону касательной, проведенной къ $AC$ въ точкѣ $C$. Если $z$, обходя точки 1, $\infty$ и 0 съ отрицательной стороны вещественной оси, пробѣжитъ всю эту ось, то $\eta'$ опишетъ контуръ $ACB'A$, и $\triangle^{\underline{\text{къ}}}$ $ACB'$ представитъ преобразованіе нижней половины плоскости $z^{\underline{\text{овъ}}}$; этотъ треугольникъ мы будемъ называть симметрическимъ повтореніемъ $\triangle^{\underline{\text{ка}}}$ $ABC$.

Если $z$ возвратится послѣ указаннаго пробѣга къ первоначальному своему значенію $z_0$, пересѣкая ось, по прежнему, между точками 0 и 1, то $\eta'$ замѣнится опять черезъ $\eta$, которое при движеніи $z$ положительной сторонѣ вещественной оси, даетъ $\triangle^{\underline{\text{къ}}}$ $ACB$; но если $z$ вернется къ $z_0$, пересѣкая вещественную ось, напр., между 1 и $\infty$, то $\eta$ замѣнится уже нѣкоторой функціей $\eta_1 = \frac{A\eta+B}{C\eta+D}$. Если $z$ опять будетъ двигаться по положительной сторонѣ вещественной оси, то $\eta_1$ опишетъ периметръ $\triangle^{\underline{\text{ка}}}$, имѣющаго съ $\triangle^{\underline{\text{комъ}}}$ $ACB'$ общую сторону $CB'$, углы $\lambda\pi$, $\mu\pi$ и $\nu\pi$ и представляющаго преобразованіе положительной половины плоскости $z^{\underline{\text{овъ}}}$.

Повторяя тѣ же разсужденія относительно сторонъ $AC$ и $BC$ $\triangle^{\underline{\text{ка}}}$ $S$, $\triangle^{\underline{\text{ковъ}}}$ $AB'C$ и $BCA'$, и т. д., мы можемъ представить себѣ цѣлый рядъ $\triangle^{\underline{\text{ковъ}}}$ $AB'C$, $AC'B$, $CBA'$, $C'BA''$ и т. д., составляющихъ симметрическое повтореніе $\triangle^{\underline{\text{ка}}}$ $ABC$.

Если $\eta$ есть алгебраическая функція отъ $z$, то число различныхъ значеній, получаемыхъ коэффиціентами $A$, $B$, $C$ и $D$ въ выраженіи $\frac{A\eta+B}{C\eta+D}$, будетъ конечное, и потому число различныхъ величинъ въ ряду $\eta$. $\eta_1$, $\eta_2$, . . . будетъ тоже конечное. Отсюда слѣдуетъ, что въ этомъ случаѣ и число различныхъ положеній и величинъ симметрическихъ повтореній треугольника $ABC$ будетъ конечное; и наоборотъ, если число различныхъ по положенію и величинѣ симметрическихъ повтореній конечно, то это покажетъ, что число различныхъ значеній $\eta$ конечно и слѣдовательно уравненіе (1) п. 5 и уравненіе $(H)$ имѣютъ дѣйствительно алгебраическій интегралъ.

*Поставленная въ началѣ настоящаго пункта задача приводится, слѣдовательно, къ разсмотрѣнію, при какихъ значеніяхъ чиселъ* $\lambda$, $\mu$ *и* $\nu$ *число симметрическихъ повтореній* $\triangle^{\text{ка}}$ $S$ $(ABC)$ *будетъ конечное.*

Разсмотримъ отдѣльно 3 случая:

*a*) Когда $\lambda+\mu+\nu>1$ и въ то же время

$$(1)\quad -\lambda+\mu+\nu<1,\quad \lambda-\mu+\nu<1,\quad \lambda+\mu-\nu<1.$$

*b*) Когда $\lambda+\mu+\nu>1$, а одно изъ неравенствъ (1) не соблюдено (предположеніе, что два или три изъ неравенства (1) не соблюдены, приводитъ, при $\lambda<1$, $\mu<1$, $\nu<1$, къ противорѣчію).

*c*) $\lambda+\mu+\nu\overline{\gtrless}1$.

*a*) Если $\lambda+\mu+\nu>1$ и въ то же время удовлетворяются неравенства (1), то относительно треугольника $S$ можно, на основаніи извѣстныхъ теоремъ геометріи, утверждать слѣдующее: кругъ, перпендикулярный ко всѣмъ тремъ сторонамъ $\triangle^{\text{ка}}$, есть мнимый; существуетъ вещественный кругъ, пересѣкающій круги, составляющіе стороны $\triangle^{\text{ка}}$, въ діаметрально противоположныхъ точкахъ; самый треугольникъ есть стереографическая проэкція нѣкотораго сферическаго треугольника, образованнаго большими кругами на шарѣ, построенномъ на упомянутомъ вещественномъ кругѣ, и, наконецъ, круги, составляющіе стороны $\triangle^{\text{ка}}$, пересѣкаются такъ, что точки встрѣчи двухъ изъ нихъ раздѣляются третьимъ.

Задача въ этомъ случаѣ приводится къ изслѣдованію, при какихъ условіяхъ $\triangle^{\text{къ}}$ сферическій, составленный изъ большихъ круговъ, допускаетъ конечное число различныхъ симметрическихъ или конгруентныхъ повтореній: въ самомъ дѣлѣ, при построеніи симметрическихъ повтореній $\triangle^{\text{ка}}$ $S$ одинъ изъ круговъ и двѣ точки его пересѣченія съ двумя кругами остаются неизмѣнными; поэтому и упомянутый выше шаръ не измѣнится; симметрическое повтореніе $\triangle^{\text{ка}}$ $S$ будетъ проекціей симметрическаго повторенія сферическаго треугольника.

Вопросъ сферической геометріи, къ которому приведена разсматриваемая задача, имѣетъ уже весьма простое рѣшеніе:

*если два угла сферическаго треугольника равны каждый прямому, то, чтобы число симметрическихъ повтореній было ко-*

*нечно, необходимо и достаточно, чтобы $3^{\underline{iй}}$ уголъ былъ соизмѣримъ съ $\pi$;*

*въ прочихъ случаяхъ число повтореній будетъ конечнымъ только тогда, если $\triangle^{\underline{къ}}$ образованъ пересѣченіемъ шара плоскостями симметріи одного изъ правильныхъ многогранниковъ, вписанныхъ въ шаръ.*

*b*) Случай, когда $\lambda+\mu+\nu>1$, а одно изъ неравенствъ (1) не соблюдено, приводится къ предъидущему.

Разсматривая всѣ фигуры, образуемыя тремя кругами, пересѣкающимися такъ, что двѣ точки встрѣчи двухъ изъ нихъ раздѣляются третьимъ, мы легко замѣтимъ, что вмѣстѣ съ $\triangle^{\underline{комъ}}$, углы котораго равны $\lambda\pi$, $\mu\pi$ и $\nu\pi$, будутъ еще 3 $\triangle^{\underline{ка}}$, углы которыхъ будутъ

$$\lambda\pi,\ (1-\mu)\pi,\ (1-\nu)\pi;$$

$$(1-\lambda)\pi,\ \mu\pi,\ (1-\nu)\pi;$$

$$(1-\lambda)\pi,\ (1-\mu)\pi,\ \nu\pi.$$

Если допустимъ, что изъ неравенствъ (1) соблюдены первыхъ два, а вмѣсто послѣдняго имѣемъ

$$\lambda+\mu-\nu \geqq 1,$$

то сейчасъ замѣтимъ, что $\lambda$ и $\mu$ будутъ больше $\frac{1}{2}$; и въ такомъ случаѣ для $\triangle^{\underline{ка}}$, у котораго углы равны $(1-\lambda)\pi$, $(1-\mu)\pi$ и $\nu\pi$, уже всѣ неравенства (1) будутъ удовлетворены.

Отсюда мы видимъ, что каждому $\triangle^{\underline{ку}}$, для котораго одно изъ неравенствъ (1) не удовлетворено, соотвѣтствуетъ $\triangle^{\underline{къ}}$, составленный тѣми же кругами, для котораго они удовлетворены.

Симметрическимъ повтореніямъ перваго $\triangle^{\underline{ка}}$ будутъ соотвѣтствовать повторенія втораго; поэтому, если $\lambda+\mu+\nu>1$, $-\lambda+\mu+\nu<1$ $\lambda-\mu+\nu<1$, а $\lambda+\mu-\nu\leqq 1$, то слѣдуетъ лишь разсмотрѣть, имѣетъ ли $\triangle^{\underline{къ}}$ съ углами $1-\lambda$, $1-\mu$, $\nu$ конечное число симметрическихъ повтореній, или нѣтъ.

Такимъ образомъ, значенія $\lambda$, $\mu$, $\nu$ (ограниченныя указанными выше условіями), при которыхъ уравненія (1) и ($H$) имѣютъ общій интегралъ алгебраическій, представляются въ слѣдующей таблицѣ:

(I) $$\lambda=\frac{1}{2},\quad \mu=\frac{1}{m},\quad \nu=\frac{1}{2}$$ (двойная пирамида; группа (II) типа).

(II) $$\left.\begin{array}{l} \lambda=\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4};\\ \mu=\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4};\\ \nu=\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3}. \end{array}\right\}$$ (тетраэдръ и октаэдръ; группы (III) и (IV) типовъ).

(III) $$\left.\begin{array}{l} \lambda=\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\\ \mu=\frac{1}{5},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\\ \nu=\frac{1}{2},\ \frac{2}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{3}. \end{array}\right\}$$ (икосаэдръ; группа (V) типа)

*c*) Пусть теперь $\lambda+\mu+\nu\leq 1$; положимъ сперва $\lambda+\mu+\nu<1$. Въ этомъ случаѣ круги, составляющіе стороны треугольника $S$, пересѣкаются такъ, что точки встрѣчи двухъ изъ нихъ находятся или обѣ внѣ, или обѣ внутри третьяго. Кромѣ того, существуетъ вещественный кругъ $\Omega$, перпендикулярный ко всѣмъ тремъ сторонамъ треугольника.

Если разсмотримъ всѣ фигуры, образуемыя пересѣченіемъ 3$^{\text{хъ}}$ круговъ при упомянутыхъ условіяхъ, то убѣдимся, что они образуютъ два $\Delta^{\text{ка}}$, имѣющіе углы $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$; одинъ изъ нихъ будетъ внутри ортогональнаго круга, а другой внѣ. Въ виду этого, мы можемъ ограничиться разсмотрѣніемъ симметрическихъ повтореній треугольника, лежащаго внутри круга $\Omega$. Стороны симметрическихъ повтореній будутъ перпендикулярны къ тому же кругу $\Omega$; сами треугольники будутъ лежать внутри этого круга; симметрическія повторенія будутъ, при безконечномъ продолженіи построенія, приближаться къ кругу $\Omega$, никогда его не достигая. (Справедливость этихъ замѣчаній провѣрить весьма легко, основываясь на свойствахъ круговыхъ подстановокъ и на разсмотрѣніи на чертежѣ построеній). Отсюда вытекаетъ, что число симметрическихъ повтореній въ этомъ случаѣ — безконечно велико, и что поэтому, при $\lambda+\mu+\nu<1$ уравненіе $(H)$ алгебраическихъ интеграловъ не имѣетъ.

Если $\lambda+\mu+\nu=1$, то треугольникъ $S$ мы можемъ считать прямосторонним ъ; въ такомъ случаѣ ортогональный кругъ будетъ безконечно-большимъ; число симметрическихъ повтореній будетъ также безграничнымъ.

Такимъ образомъ оказывается, что *всѣ возможныя комбинаціи чиселъ $\lambda$, $\mu$, $\nu$ (при сдѣланныхъ въ настоящемъ пунктѣ ограниченіяхъ), при которыхъ уравненіе гипергеометрическаго ряда $(H)$ имѣетъ общій интегралъ алгебраическій, даются таблицами $I$, $II$, и $III$.*

7. Изложенныя въ этой главѣ соображенія могутъ быть приложены также и къ рѣшенію вопроса о числѣ нулей интеграла уравненія гипергеометрическаго ряда $(H)$ съ вещественными параметрами, заключенныхъ между двумя особенными точками уравненія.

Это рѣшеніе основывается на слѣдующей теоремѣ геометріи: пусть $l$, $m$, $n$—три какія нибудь положительныя числа и $l \geq m \geq n$; раздѣлимъ треугольники, составленные на плоскости тремя пересѣкающимися кругами, съ углами $l\pi$, $m\pi$, $n\pi$, на двѣ категоріи: къ первой отнесемъ тѣ, для которыхъ $l \leq m+n$; ко второй—тѣ, для которыхъ $l > m+n$. Каковы бы ни были числа $l$, $m$, $n$—не существуетъ треугольниковъ первой категоріи, у которыхъ хотя бы одна сторона налегала сама на себя; въ треугольникахъ 2-ой категоріи только та сторона можетъ налегать сама на себя, которая противолежитъ бо́льшему углу $l\pi$. Число разъ, которое эта сторона налегаетъ на себя, равно

$$\mathrm{E}\left(\frac{l-m-n+1}{2}\right), \tag{1}$$

гдѣ $\mathrm{E}(\rho)$ есть наибольшее цѣлое число, меньшее $\rho$ $(\mathrm{E}(1)=0)$.

Будемъ опредѣлять число нулей на отрѣзкѣ $ab$ ($a$ и $b$—особенныя точки уравненія $(H)$) для интеграла $y_1$ уравненія $(H)$, который въ точкѣ $a$ $(a<b)$ меньше нуля (это условіе, очевидно, не ограничиваетъ общности изслѣдованія).

Выберемъ второй независимый интегралъ уравненія $(H)$ $y_2$, который обращался бы для $x=a$ въ нуль и для значенія $x>a$ былъ бы положителенъ.

При сдѣланныхъ выше допущеніяхъ отношеніе $\frac{y_1}{y_2}=\eta$ для точки $x=0$ будетъ равно $-\infty$. Чтобы прослѣдить всѣ измѣненія его при движеніи $x$ отъ 0 до 1, замѣтимъ, что на основаніи теоремы Штурма (Journal de Liouville, t. 1 и 2) корни интеграловъ $y_1$ и $y_2$ — перемежающіеся, и что поэтому отношеніе $\eta=\frac{y_1}{y_2}$, между значеніями $-\infty$ и $+\infty$, при переходѣ отъ одного корня $y_2$ къ другому, принимаетъ каждое значеніе только одинъ разъ.

Поэтому при увеличеніи $x$ отъ нуля до ближайшаго корня интеграла $y_1$, $\eta$ будетъ увеличиваться отъ $-\infty$ до 0; при дальнѣйшемъ движеніи $x$, оно будетъ положительно и будетъ возрастать до $+\infty$ (для корня $y_2$); затѣмъ $\eta$ начнетъ уменьшаться, опять получитъ значеніе 0 (для корня $y_1$), будетъ затѣмъ отрицательнымъ, $-\infty$. и т. д.

Пусть $N$ есть число нулей интеграла $y_2$ на отрѣзкѣ $ab$ (при этомъ точку $b$ будемъ считать непринадлежащею отрѣзку $ab$); число нулей интеграла $y_1$ будетъ или $N$, или $N+1$.

Съ другой стороны (п. 5), если $x$, двигаясь по отрѣзку $ab$, пройдетъ отъ одного корня $y_2$ $(a)$ до слѣдующаго, то $\eta$, выбранное указаннымъ выше образомъ, опишетъ нѣкоторую прямую (такъ какъ вещественнымъ значеніямъ будутъ отвѣчать вещественныя значенія $\eta$) отъ $-\infty$ до $+\infty$; за все время движенія $x$ отъ $a$ до $b$ $\eta$ опишетъ указанную прямую $N$ разъ. Нѣкоторое $\eta_1=\frac{A\eta+B}{C\eta+D}$ опишетъ соотвѣтственное число разъ полную окружность.

Эти замѣчанія показываютъ, что наша задача приводится къ слѣдующей: опредѣлить, сколько разъ сторона треугольника, въ который преобразовывается верхняя половина плоскости $z$-овъ съ помощью отношенія двухъ интеграловъ уравненія $(H)$, соотвѣтствующая отрѣзку $ab$, будетъ налегать сама на себя.

Обозначимъ черезъ $\lambda$, $\mu$ и $\nu$ по прежнему mod $(1-\gamma)$, mod $(\alpha-\beta)$ и mod $(\gamma-\alpha-\beta)$.

Приведенная выше теорема геометріи показываетъ, что сторона, соотвѣтствующая отрѣзку $ab$, можетъ налегать сама на себя только въ томъ случаѣ, если противолежащій ей уголъ больше суммы остальныхъ 2 угловъ; если это условіе удовлетворено, то искомое число $N$ опредѣлится по формулѣ (1).

Такъ, напримѣръ, для отрѣзка 01 число $N$ равно

$$N = \mathrm{E}\left(\frac{\operatorname{mod}(\alpha-\beta)-\operatorname{mod}(1-\gamma)-\operatorname{mod}(\gamma-\alpha-\beta)+1}{2}\right).$$

Окончательное рѣшеніе между числами $N$ и $N+1$ основывается уже на разсмотрѣніи нѣкоторыхъ частныхъ свойствъ того интеграла, число нулей котораго изслѣдуется.