

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»
(ВГУ имени П.М. Машерова)

УДК 517.988.8: 519.61
№ госрегистрации 20190570
Инв. № _____



УТВЕРЖДАЮ:

И.М. Прищепа

И.М. Прищепа

Январь 2020 г.

О Т Ч Е Т
о научно-исследовательской работе
**Разработка модифицированного метода Бернулли для решения нелинейных
матричных уравнений**
(заключительный)

Грант аспирантов, докторантов и студентов
Министерства образования Республики Беларусь

Ответственный
исполнитель,
аспирант

М. Чернявский 03.01.2020

М.М. Чернявский

Нормоконтролёр

Т.В. Харкевич 08.01.2020

Т.В. Харкевич

Витебск 2019

РЕФЕРАТ

Отчет 45 с., 1 ч., 23 источника, 1 прилож.

МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ, АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ, АЛГОРИТМ БЕРНУЛЛИ, КОММУТАТИВНЫЕ МАТРИЦЫ, НЕЛИНЕЙНЫЕ СВЯЗИ, СИМВОЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ.

Объект исследования – алгоритмы приближенного решения матричных нелинейных уравнений, позволяющие получать значения корней за конечное число шагов.

Предмет исследования – методы приближенного аналитического решения алгебраических уравнений, имеющие возможность частичного или полного обобщения на случай аналогичных матричных уравнений.

Методы исследования – методы математического и функционального анализа с использованием систем компьютерной математики.

Цель работы – получить новые удобные в применении алгоритмы приближенного нахождения решений нелинейных матричных уравнений.

Работа выполнена на базе кафедр инженерной физики и геометрии и математического анализа Витебского государственного университета имени П.М. Машерова.

Научная значимость полученных результатов – разработаны новые аналитические алгоритмы приближенного решения для некоторых типов матричных нелинейных уравнений, а также методы символьного решения алгебраических уравнений шестой степени специального вида.

Основные результаты работы:

1. Подробно рассмотрены особенности алгоритма получения последовательности формул приближенного выражения корней алгебраических полиномов различных степеней в виде дробно-рациональных функций от коэффициентов.

2. Впервые исследована возможность обобщения вышеупомянутых формул, полученных на основе модификации алгоритма Бернулли, на аналогичные случаи матричных полиномиальных уравнений с перестановочными коэффициентами.

3. Исследована возможность аналитического решения матричных полиномиальных уравнений четвертой степени вида $X^4 + AX^3 + BX^2 + CX + D = 0$ и $X^4 + PX^2 + QX + R = 0$ с перестановочными комплексными матричными коэффициентами второго порядка. Получен аналитический алгоритм решения данных уравнений, в основе которого лежат формулы Феррари. В системе компьютерной математики *Maple 2018* была проведена реализация алгоритма и на многих конкретных примерах проверена его эффективность.

4. Разработан алгоритм нахождения всех решений квадратного диофантова уравнения вида $z^2 = x^2 + y^2 - \mu xy$. Данный алгоритм был обобщён на аналогичный матричный случай уравнения с коммутативными матрицами.

5. Установлена аналитическая связь между коэффициентами алгебраических полиномов шестой и четвертой степеней, корни которых связаны между собой линейным или нелинейным образом. Приведены конкретные числовые примеры, иллюстрирующие соответствующие ситуации.

Практическая значимость научно-исследовательской работы заключается в разработке новых аналитических алгоритмов решения некоторых типов матричных и алгебраических уравнений. Результаты работы представляют интерес для специалистов в области нелинейного функционального и матричного анализа, а также могут быть использованы при проведении последующих исследований по изучению и разработке новых методов решения матричных нелинейных уравнений.

Результаты, представленные в четвертом разделе отчета, представляют интерес для методистов, занимающихся составлением сложных олимпиад по математике.

Социальная и экономическая значимость выполненной работы заключается в том, что ее результаты могут быть использованы специалистами, занимающимися решением матричных нелинейных уравнений и алгебраических уравнений высоких степеней, возникающих в различных областях естествознания и экономики.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
1 Актуальный аналитический алгоритм получения формул приближенного выражения корней алгебраического полинома через коэффициенты	8
1.1 Историческая справка, связанная с исследованием алгоритма, полученного Д. Бернулли	8
1.2 Доказательство ключевых теорем	9
1.3 Примеры использования формул приближенного выражения корней полинома через коэффициенты	18
1.4 Попытки обобщения алгоритма на матричный случай	20
2 Новый аналитический метод решения матричных полиномиальных уравнений четвертой степени с перестановочными матричными коэффициентами	22
3 Обобщение метода решения квадратного диофантова уравнения, описывающего взаимосвязь между сторонами треугольника, на матричный случай	26
4 Связь между коэффициентами алгебраических полиномов шестой и четвертой степеней при наличии связи между их корнями	31
4.1 Нахождение корней полинома шестой степени при наличии у них линейной связи с корнями полинома четвертой степени.....	31
4.2 Один из случаев нелинейной связи между корнями алгебраических полиномов шестой и четвертой степеней	35
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	40
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	42
ПРИЛОЖЕНИЕ А	44

ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные матричные уравнения в настоящее время достаточно широко встречаются в различных приложениях, например, в теории управления, при исследовании дифференциальных уравнений в теории колебаний, а также при изучении марковских процессов [1–4]. Несмотря на это, активное изучение подобных уравнений и разработка методов их решения начались лишь в конце XX – начале XXI века, чему поспособствовали развитие функционального анализа и быстрый рост вычислительных возможностей компьютерной техники. Поэтому в последнее десятилетие развитие методов решения матричных нелинейных уравнений является одним из ключевых направлений современного функционального анализа и численных методов математики в целом.

Тем не менее, важно отметить, что большинство попыток обобщения формул решения обычных скалярных уравнений на случай матричных уравнений провалилось вследствие свойства некоммутативности матричного умножения, поэтому прямых методов решения таких уравнений существует достаточно мало, причем значительная часть из них требуют, чтобы матрицы, входящие в уравнения, обладали некими заданными свойствами [5, 6].

Существующие же в настоящее время численные алгоритмы решения матричных нелинейных уравнений не сочетают в себе одновременно свойства универсальности и простоты применения на конкретных числовых примерах. Среди недостатков известных численных методов стоит отметить следующие: применимость к ограниченным классам уравнений, неудобство в программировании, в отдельных случаях излишняя громоздкость и частая невозможность нахождения всех решения уравнения. Отдельной открытой проблемой является локализация корней матричного уравнения и выбор начального приближения для уточнения необходимого корня итерационными методами [7–11]. Всё вышперечисленное подтверждает, что разработка новых более удобных методов решения матричных нелинейных уравнений и их модификаций остается актуальной.

Цель работы – получить новые удобные в применении алгоритмы приближенного нахождения решений нелинейных матричных уравнений.

Задачи исследования:

- подробно изучить особенности алгоритма получения формул приближенного выражения корней алгебраических полиномов различных степеней в виде дробно-рациональных функций от коэффициентов;
- выявить возможности обобщения данных формул на аналогичные случаи матричных полиномиальных уравнений с перестановочными коэффициентами;

- впервые на конкретных числовых примерах матричных нелинейных уравнений с перестановочными матричными коэффициентами проверить эффективность использования упомянутых ранее формул;
- выявить возможность адаптации некоторых алгоритмов прямого решения алгебраических уравнений третьей и четвертой степеней на аналогичный матричный случай и в случаях, где это возможно, с определенной модификацией выполнить такую адаптацию;
- исследовать алгоритмы решения некоторых типов диофантовых уравнений в скалярном случае с последующей проверкой возможности их обобщения на аналогичный матричный случай;
- установить аналитическую связь между коэффициентами алгебраических полиномов шестой и четвертой степеней, корни которых связаны между собой линейным или нелинейным образом.

Объект исследования – алгоритмы приближенного решения матричных нелинейных уравнений, позволяющие получать значения корней за конечное число шагов.

Предмет исследования – методы приближенного аналитического решения алгебраических уравнений, имеющие возможность частичного или полного обобщения на случай аналогичных матричных уравнений.

Методы исследования – методы математического и функционального анализа с использованием систем компьютерной математики.

Результаты исследования могут быть применены специалистами, занимающимися решением матричных нелинейных уравнений, возникающих в различных областях естествознания, а также будут использованы при проведении последующих исследований по изучению и разработке новых методов решения матричных нелинейных уравнений. Кроме того, результаты исследования могут представлять интерес для методистов, занимающихся составлением сложных олимпиад по математике.

Об эффективности разработанных в ходе выполнения задания НИР алгоритмов можно судить после применения их на конкретных числовых примерах, что также является значимой составляющей проводимого исследования.

Отчет состоит из четырёх разделов.

В первом разделе осуществлено описание алгоритма для получения последовательности формул, выражающих минимальный или максимальный корень алгебраического уравнения произвольной степени в виде дробно-рациональных функций от коэффициентов. Данный алгоритм внешне схож с алгоритмом Бернулли и подробно

исследовался ранее соискателем гранта совместно с научным руководителем профессором Трубниковым Ю.В. в статьях [12] и [13].

В подразделе 1.2 доказаны соответствующие теоремы и выявлены условия применимости описываемого алгоритма.

Второй раздел посвящен описанию предложенного метода решений матричных полиномиальных уравнений четвертой степени с перестановочными матричными коэффициентами. За основу для обобщения был выбран метод Феррари.

В третьем разделе предложен метод решения квадратного диофантова уравнения специального вида с последующим обобщением на аналогичный случай матричного диофантова уравнения с перестановочными матрицами.

Четвертый раздел посвящен установлению аналитической связи между коэффициентами алгебраических полиномов шестой и четвертой степеней, корни которых связаны между собой линейным или нелинейным образом. Приведены конкретные числовые примеры, иллюстрирующие соответствующие ситуации.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Matrix Riccati Equations in Control and Systems Theory / A. Hisham [et al.]. – Basel: Birkhäuser Verlag, 2003. – 584 p.

2 Juang, J. Global Existence and Stability of Solutions of Matrix Riccati Equations / J. Juang // J. of Math. Anal. and Appl. – 2001. – Vol. 258. – P. 1–12.

3 Bini, D.A. Numerical Methods for Structured Markov Chains / D.A. Bini, G. Latouche, B. Meini. – King's Lynn: Oxford University Press, 2005. – 327 p.

4 A quadratically convergent Bernoulli-like algorithm for solving matrix polynomial equations in Markov chains / C. He [et al.] // Electr. Transactions on Numer. Anal. – 2004. – Vol. 17. – P. 151–167.

5 Horn, R. Topics in matrix analysis / R. Horn, C. Johnson. – Cambridge: Cambridge University Press, 1991. – 607 p.

6 Higham, N.J. Functions of Matrices: Theory and Computation / N.J. Higham. – Philadelphia: SIAM, 2008. – 425 p.

7 Ramadan, M.A. Iterative positive definite solutions of the two nonlinear matrix equations / M.A. Ramadan, T.S. El-Danaf, N.M. El-Shazly // Applied Math. and Comput. – 2005. – Vol. 164. – P. 189–200.

8 Bai, Z.-Z. On two Iteration Methods for the Quadratic Matrix Equations / Z.-Z. Bai, X.-X. Guo, J.-F. Yin // Intern. J. Numer. Anal. Model. – 2005. – Vol. 2, № 1. – P. 114–122.

9 Guo, C.-H. On a quadratic matrix equation associated with an M-matrix / C.-H. Guo // IMA J. Numer. Anal. – 2003. – Vol. 23, № 1. – P. 11–27.

10 Bai, Z.-Z. Modified Bernoulli iteration method for quadratic matrix equation / Z.-Z. Bai, Y.-H. Gao // Journal of Computational Mathematics. – 2007. – Vol. 25, № 5. – P. 498–511.

11 A quadratically convergent Bernoulli-like algorithm for solving matrix polynomial equations in Markov chains / C. He [et al.] // Electr. Transactions on Numer. Anal. – 2004. – Vol. 17. – P. 151–167.

12 Трубников, Ю.В. Роль расходящихся степенных рядов в некоторых алгоритмах приближенного аналитического решения алгебраических уравнений / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский, А.М. Воронов // Веснік Віцебскага дзярж. ўніверсітэта. – 2017. – № 4(97). – С. 29–33.

13 Трубников, Ю.В. Расходящиеся степенные ряды и формулы приближенного аналитического нахождения решений алгебраических уравнений / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // Веснік Віцебскага дзярж. ўніверсітэта. – 2018. – № 4(101). – С. 5–17.

- 14 Эйлер, Л. Введение в анализ бесконечных: в 2 т. : пер. с лат. Е.Л. Пацановского / Л. Эйлер. 2-е изд. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. Т. 1. – 315 с.
- 15 Шмойлов, В.И. Решение алгебраических уравнений при помощи г/ф-алгоритма / В.И. Шмойлов. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2011. – 330 с.
- 16 Курош, А.Г. Курс высшей алгебры: учеб. / А.Г. Курош. – 17-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2008. – 432 с.
- 17 Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1988. – 655 с.
- 18 Матиясевич, Ю.В. Десятая проблема Гильберта / Ю.В. Матиясевич. – М.: Физматлит, 1993. – 224 с.
- 19 Шклярский, Д.О. Избранные задачи и теоремы элементарной математики / Д.О. Шклярский, Н.Н. Ченцов, И.М. Яглом. – М.: ГИТТЛ, 1954. – 456 с.
- 20 Andreescu T. Quadratic Diophantine Equations / T. Andreescu, D. Andrica. – N. Y.: Springer Science+Business Media, 2015. – 211 p.
- 21 Перминова, М.Ю. Алгоритм декомпозиции полиномов, основанный на разбиениях / М.Ю. Перминова, В.В. Кручинин, Д.В. Кручинин // Доклады ТУСУРа. – 2015. – № 4(38). – С. 102–107.
- 22 Астапов, И.С. Алгоритмы символьного решения алгебраических уравнений / И.С. Астапов, Н.С. Астапов // Программная инженерия. – 2017. – Т. 8, № 9. – С. 422–432.
- 23 Chernyavsky, M. Analytical solution of cubic matrix equations with commutative matrix factors of size $[2 \times 2]$ / M. Chernyavsky // The Youth of the 21st Century: Education, Science, Innovations : Proceedings of V International Conference for Students, Postgraduates and Young Scientists, Vitebsk, December 12, 2018 / Vitebsk State University ; Editorial Board: I.M. Prishchepa (Editor in Chief) [and others]. – Vitebsk : Vitebsk State P.M. Masherov University, 2018. – P. 8–10.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

БИБЛИОГРАФИЯ

1 Трубников, Ю.В. Применение аналитических методов для нахождения решений матричных полиномиальных уравнений четвертой степени с перестановочными матричными коэффициентами второго порядка / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XXIV (71) регион. науч.-практ. конф. преп., научн. сотр. и аспирантов, Витебск, 14 февраля 2019 г.: в 2 т. / Витеб. гос. ун-т; редкол.: И.М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2019. – Т. 1. – С. 28–30.

2 Трубников, Ю.В. Аппроксимативный метод анализа задачи двух тел / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // XIX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2019): матер. междунар. науч. конф., Могилев, 14–17 мая 2019 г. – Часть 2. – Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2019. – С. 97–99.

3 Чернявский, М.М. Об аналитическом нахождении корней третьей степени из матрицы второго порядка, содержащей нулевой элемент / М.М. Чернявский // XIII Машеровские чтения: матер. междунар. науч.-практ. конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 18 октября 2019 г. / Витеб. гос. ун-т; редкол.: И.М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2019. – С. 41–43.

4 Чернявский, М.М. О разрешимости в радикалах одного класса алгебраических уравнений / М.М. Чернявский, В.С. Жгиров // Современные проблемы математики и вычислительной техники: сборник матер. XI Респ. науч. конф. молодых ученых и студентов, Брест, 21–22 ноября 2019 г. / Брестский гос. техн. ун-т; редкол.: В.А. Головкин (гл. ред.) [и др.]. – Брест: БрГТУ, 2019. – С. 98–100.

5 Chernyavsky, M. On the application of the Chirnhaus transform for an algebraic equation of the third degree / M. Chernyavsky // The Youth of the 21st Century: Education, Science, Innovations : Proceedings of VI International Conference for Students, Postgraduates and Young Scientists, Vitebsk, December 12, 2019 / Vitebsk State University ; Editorial Board: I.M. Prishchepa (Editor in Chief) [and others]. – Vitebsk: Vitebsk State University named after P.M. Masherov, 2019. – P. 10–12.

6 Трубников, Ю.В. О линейной связи между корнями полиномов шестой и третьей степеней / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: матер. IV междунар. науч. конф., посвящ. 95-лет. со дня рожд. чл.-кор. АН БССР, проф. Иванова Евгения Алексеевича (Респ. Беларусь, Гродно, 17–

20 дек. 2019 г.) / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ, ГрГУ им. Я. Купалы; редкол.:
В.И. Корзюк (гл. ред.) [и др.]. Гродно : ГрГУ, 2019. – С. 122–124.