

Министерство образования Республики Беларусь  
Учреждение образования «ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА»  
(ВГУ ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА)

УДК 517.956.4

№ госрегистрации 20191823

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научной работе,  
доктор биологических наук,  
профессор

*А.И. Никитин*  
«26.07.2020»  
Прилепа



ОТЧЕТ  
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

Системы нелинейных параболических уравнений типа реакция-диффузия  
(промежуточный)

по договору с БРФФИ № Ф19М-062

Руководитель НИР

*А.И. Никитин*  
16.07.2020

А.И. Никитин

Витебск 2020

## СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель НИР, Старший преподаватель кафедры прикладного и системного программирования, ВГУ имени П.М. Машерова

 26.03.2020 А.И. Никитин  
подпись, дата (раздел 2, 4)

Исполнители:  
Старший преподаватель кафедры геометрии и математического анализа

 26.03.2020 Т.В. Кавитова  
подпись, дата (раздел 1, 3)

Нормоконтроль

 26.03.2020 Т.В. Харкевич  
подпись, дата

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
1 Доказательство существования локального решения начально-краевых задач для полулинейных параболических уравнений и систем уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями .....	8
2 Построение принципа сравнений решений начально-краевых задач для полулинейных параболических уравнений и систем уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями .....	14
3 Исследование единственности и неединственности решений начально-краевой задачи для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями .....	18
4 Исследование единственности и неединственности решений начально-краевой задачи для полулинейного параболического уравнения с нелинейным нелокальным граничным условием .....	21
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	23
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	24

## ВВЕДЕНИЕ

Начально-краевые задачи для нелинейных параболических уравнений и систем уравнений с нелокальными граничными условиями рассматривались многими авторами (см., например, [1-20] и имеющуюся в них библиографию). В работах [15], [16] рассматривалась начально-краевая задача с нелокальными граничными условиями Дирихле для полулинейного параболического уравнения с переменным коэффициентом

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + c(x,t)u^p, x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = \int_{\Omega} k(x,y,t)u^l(y,t)dy, x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), x \in \Omega, \end{cases}$$

где  $p, l$  – положительные постоянные, функции  $c(x,t)$ ,  $k(x,y,t)$ ,  $u_0(x)$  удовлетворяют условиям, аналогичным условиям исходной задачи. Получен ряд утверждений о единственности решения, существовании и отсутствии глобальных решений.

В работах [17], [18] рассмотрена начально-краевая задача для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + c_1(x,t)v^p, v_t = \Delta v + c_2(x,t)u^q, x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = \int_{\Omega} k_1(x,y,t)u^m(y,t)dy, x \in \partial\Omega, t > 0, \\ v(x,t) = \int_{\Omega} k_2(x,y,t)v^n(y,t)dy, x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x), x \in \Omega. \end{cases}$$

где  $p, q, m, n$  – положительные постоянные,  $\Omega$  – ограниченная область в  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ , с гладкой границей  $\partial\Omega$ ,  $c_1(x,t)$ ,  $c_2(x,t)$  – неотрицательные локально непрерывные по Гельдеру функции, определенные при  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $t \geq 0$ ,  $k_1(x,y,t)$ ,  $k_2(x,y,t)$  – неотрицательные непрерывные функции, определенные при

$x \in \partial\Omega, y \in \bar{\Omega}, t \geq 0, u_0(x), v_0(x)$  – неотрицательные непрерывные функции, удовлетворяющие граничным условиям при  $t=0$ . Для данной задачи доказано существование локального классического решения, получены достаточные условия существования и отсутствия глобальных решений. Аналогичные результаты получены в работах [19], [20] для схожей начально-краевой задачи с граничными условиями Неймана.

Как видно из работ, исследование начально-краевых задач для нелинейных параболических уравнений и систем уравнений с нелокальными граничными условиями с переменными коэффициентами в отличие от постоянных коэффициентов вызывает сложность, ввиду отсутствия результатов даже для соответствующих задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Цель исследовательской работы состоит в разработке некоторого математического аппарата, который позволит проводить исследование общего класса начально-краевых задач для параболических уравнений и систем уравнений с нелокальными граничными условиями с переменными коэффициентами, а также даст общий подход и ряд новых методик для исследования свойств решений таких задач.

Поставленная цель предполагает решение следующих задач, выполняемых на данном этапе:

1) доказать существования локального решения начально-краевых задач для полулинейных параболических уравнений и систем уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями;

2) построить принцип сравнений решений начально-краевых задач для полулинейных параболических уравнений и систем уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями;

3) исследовать вопросы единственности и неединственности решений начально-краевой задачи для полулинейного параболического уравнения с нелинейным нелокальным граничным условием;

4) исследовать вопросы единственности и неединственности решений начально-краевой задачи для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями.

Новизна результатов исследования проекта заключается в построении общих механизмов доказательства существования локального решений, доказательства принципа сравнения решений, а также в установлении достаточных условий единственности и неединственности решений общего класса начально-краевых задач для нелинейных параболических уравнений и систем уравнений с нелокальными граничными условиями с переменными коэффициентами.

Полученные результаты исследования носят теоретический и могут использоваться у специалистов по общей теории дифференциальных уравнений или по дифференциальным уравнениям с частными производными, а также при чтении курсов по теории нелинейных параболических уравнений. Теоретические положения работы в дальнейшем могут быть использованы при написании научных работ, публикации монографий и статей, разработке учебной литературы и в учебном процессе.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Deng K. Comparison principle for some nonlocal problems // *Quart. Appl. Math.* 1992. Vol. 50, № 3. P. 517–522.
2. Lin Z., Liu Y. Uniform blowup profiles for diffusion equations with nonlocal source and nonlocal boundary // *Acta Math. Sci.* 2004. Vol. 24, № 3. P. 443–450.
3. Wang Y., Mu C., Xiang Z. Properties of positive solution for nonlocal reaction–diffusion equation with nonlocal boundary // *Boundary Value Problem.* 2007. Vol. 2007. P. 1–12.
4. Cui Z., Yang Z. Roles of weight functions to a nonlinear porous medium equation with nonlocal source and nonlocal boundary condition // *J. Math. Anal. Appl.* 2008. Vol. 342. P. 559–570.
5. Mu C., Liu D., Zhou S. Properties of positive solutions for a nonlocal reaction–diffusion equation with nonlocal nonlinear boundary condition // *J. Korean Math. Soc.* 2010. Vol. 47, № 6. P. 1317–1328.
6. Gladkov A., Guedda M. Blow-up problem for semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition // *Nonlinear Anal.* 2011. Vol. 74, № 13. P. 4573–4580.
7. Zhong G., Tian L. Blow up problems for a degenerate parabolic equation with nonlocal source and nonlocal nonlinear boundary condition // *Boundary Value Problem.* 2012. Vol. 2012. P. 1–14.
8. Gladkov A., Guedda M. Semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition // *Appl. Anal.* 2012. Vol. 91, № 12. P. 2267–2276.
9. Fang Z. B., Zhang J., Yi S.-C. Roles of weight functions to a nonlocal porous medium equation with inner absorption and nonlocal boundary condition // *Abstr. Appl. Anal.* 2012. Vol. 2012. P. 1–16.
10. Fang Z. B., Zhang J. Influence of weight functions to a nonlocal  $p$ -Laplacian evolution equation with inner absorption and nonlocal boundary

condition // J. Inequal. Appl. 2013. Vol. 2013. P. 1–10.

11. Fang Z. B., Zhang J. Global and blow-up solutions for the nonlocal  $p$ -Laplacian evolution equation with weighted nonlinear nonlocal boundary condition // J. Integral Equations Appl. 2014. Vol. 26, № 2. P. 171–196.

12. Pao C. V. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. New York : Plenum Press, 1992.

13. Kahane C. S. On the asymptotic behavior of solutions of parabolic equations // Czechoslovak Math. J. 1983. Vol. 33, № 108. P. 262–285.

14. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Москва : Наука, 1967.

15. Gladkov A.L. Blow-up of solutions for semilinear heat equation with nonlinear nonlocal boundary condition / A.L. Gladkov, K.I. Kim // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2008. – Vol. 338, no. 1. – P. 264–273.

16. Gladkov A.L. Uniqueness and nonuniqueness for reaction-diffusion equation with nonlocal boundary condition / A.L. Gladkov, K.I. Kim // Advances in Mathematical Sciences and Applications. – 2009. – Vol. 19, no. 1. – P. 39–49.

17. Gladkov A.L. A reaction-diffusion system with nonlinear nonlocal boundary conditions / A.L. Gladkov, A.I. Nikitin // International Journal Partial Differential Equations. – 2014. – Vol. 2014. – P. 1–10.

18. Gladkov A.L. On the existence of global solutions of a system of semilinear parabolic equations with nonlinear nonlocal boundary conditions / A.L. Gladkov, A.I. Nikitin // Differential Equations. – 2016. – Vol. 52, no. 4. – P. 467–482.

19. Никитин А.И. Локальное существование решений начально-краевой задачи для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями // А.И. Никитин / Веснік ВДУ. – 2016. – № 5. С. 14–19.

20. Никитин А.И. О единственности решений начально-краевой задачи для системы полулинейных параболических уравнений с

нелинейными нелокальными граничными условиями // А.И. Никитин / Труды Института математики. – 2017. – Т. 25. № 2. С. 60–69.

21. Никитин, А.И. Единственность решений начально-краевой задачи для системы линейных параболических уравнений с нелокальными граничными условиями Неймана / А. И. Никитин // Математическое и компьютерное моделирование: сб. материалов VII Междунар. науч. конф., Омск, 22 ноября 2019 г. – С. 11-12.

22. Никитин, А.И. Принцип сравнения решений начально-краевой задачи для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями Дирихле / А. И. Никитин // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: материалы IV междунар. науч. конф., посвящ. 95-лет. со дня рожд. чл.-кор. АН БССР, проф. Иванова Евгения Алексеевича, Гродно, 17–20 дек. 2019 г. – С. 58-59.

23. Никитин, А. И. Принцип сравнения решений начально-краевой задачи для системы полулинейных параболических уравнений в нелинейными нелокальными граничными условиями / А. Л. Гладков, А. И. Никитин // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2019. – № 4. – С. 5–9.

24. Гладков, А.Л. О положительности решений начально-краевой задачи для нелинейного параболического уравнения с нелинейным нелокальным граничным условием / А.Л. Гладков, Т.В. Кавитова // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: материалы IV междунар. науч. конф., посвящ. 95-лет. со дня рожд. чл.-кор. АН БССР, проф. Иванова Евгения Алексеевича (Респ. Беларусь, Гродно, 17-20 декабря 2019 г.) / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ, ГрГУ им. Я. Купалы ; редкол.: В.И. Корзюк (гл. ред.) [и др.]. – Гродно : ГрГУ, 2019. – С. 45-46.