УДК [371.32+373.5]:514.1

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В.В. Устименко, Е.С. Воскобойникова
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Обучение школьников решению стереометрических задач является одной из актуальнейших проблем методики преподавания математики в школе. В процессе их решения учащиеся должны владеть теоретическим материалом, осуществлять геометрические построения с помощью теоретического обоснования, проводить анализ текста задачи и составлять план ее решения, пользоваться упорядоченными наборами стереометрических задач.

Цель статьи – определить методическую схему решения стереометрической задачи и наполнить ее конкретным содержанием.

Материал и методы. *Дидактический материал разработан авторами для школьников 11 класса на базе государственного учреждения образования «СШ № 28 г. Витебска». При этом применялись эмпирические и логические методы.*

Результаты и их обсуждение. *Проанализировав методическую литературу, современные школьные учебники по стереометрии, изучив опыт работы учителей математики профильных классов, применив технологию укрупнения дидактических единиц, авторы пришли к выводу, что для обучения школьников решению стереометрических задач может быть использована методическая схема, состоящая из четырех этапов.*

На первом этапе происходит изучение текста задачи, его понимание, а также выполнение правильного рисунка на основе заранее усвоенных способов основных построений в стереометрии.

На втором этапе осуществляются поиск идеи и составление плана решения задачи. При этом может применяться цепочка логических рассуждений методами восходящего и нисходящего анализа.

На третьем этапе реализуется выработанный ранее план решения.

В ходе четвертого этапа учащиеся знакомятся с приемами укрупнения стереометрических задач.

Заключение. *Разработанная последовательность решения стереометрической задачи, ее «наполненность» конкретным, правильным содержанием способствуют развитию логического мышления, умственных способностей старшеклассников, раскрытию их творческих способностей, успешной подготовке к выпускному экзамену и централизованному тестированию по математике.*

Ключевые слова: *методика, решение, стереометрическая задача, логическое рассуждение, геометрические построения, приемы укрупнения задач, упорядоченные наборы.*

METHODS OF SOLVING STEREOMETRIC PROBLEMS

V.V. Ustimenko, E.S. Voskoboinikova
Education Establishment "Vitebsk State P.M. Masherov University"

Teaching school students to solve stereometric problems is one of the most current issues of Maths teaching methods at school. In the process of solving themstudents have to know theoretical material, make geometric constructions on the basis of theoretical grounds, analyze the text of the problem and make up a plan of its solution, make use of structured sets of stereometric problems.

The purpose of the article is to identify the methodological scheme for the solution of a stereometric problem and fill it with a definite content.

Material and methods. *The didactic material is developed by the authors for the eleventh year school students on the basis of state education establishment "Secondary School No 28" of the City of Vitebsk. Empiric and logical methods were used.*

Findings and their discussion. *The analysis of methodological literature, of contemporary school Stereometry textbooks, the study of the experience of Maths teachers work in special groups, the application of the technology of enlarging didactic problems made it possible for the authors to conclude that in teaching school students to solve stereometric problems a methodological scheme, which consists of four stages, can be used.*

At the first stage the study of the text of the problem takes place, its understanding as well as performing a correct drawing on the basis of earlier mastered ways of basic constructions in Stereometry.

The second stage involvesthe search for ideas and making up a plan for the problem solution. A chain of logical assumptions using methods of ascending and descending analysis can be used at the same time.

At the third stage the earlier elaborated plan of the solution is implemented.

At the fourth stage students get acquainted with the techniques of enlarging stereometric problems.

Conclusion. *The elaborated sequence of a stereometric problem solution, its being filled with a definite and correcr content contribute to the development of logical thinking, high school students' mental abilities, disclosure of their creative abilities, successful readiness for the school leaving exam and Centralized Testing in Maths.*

Key words: *methods, solution, a stereometric problem, logical assumption, geometric constructions, techniques of problem enlarging, ordered sets.*

Обучение школьников решению стереометрических задач является одной из актуальнейших проблем методики преподавания математики в школе. Решение задач играет важную роль при изучении стереометрии. В процессе их решения происходит овладение теоретическим материалом: понятиями, определениями, теоремами, формулами.

Вместе с тем, решая задачу, учащиеся пользуются изображением пространственной фигуры на плоскости в параллельной проекции, поэтому им нужно уметь правильно выполнять ее рисунок на плоскости. Кроме того, геометрические построения при решении стереометрической задачи осуществляются не инструментами, а теоретическим обоснованием такого построения с помощью соответствующих определений и теорем. От правильности подобного построения зависит дальнейшая работа над задачей.

Важно также овладеть умением проводить анализ такой задачи и составлять план ее решения. Для этого учащихся следует «вооружить» схемами различных логических рассуждений и методами решения геометрических задач.

И, наконец, на последнем этапе решения целесообразно составлять упорядоченные наборы задач, связанные с решенной задачей и между собой, с использованием методических приемов укрупнения дидактических единиц.

Цель исследования – определить методическую схему решения стереометрической задачи (ее основные этапы) и наполнить ее конкретным содержанием.

Материал и методы. Теоретический материал исследования опирается на общий подход к решению любой задачи и технологию укрупнения дидактических единиц. Дополнительный дидактический материал разработан авторами для школьников профильного 11 класса (учитель математики И.Н. Красовская) на базе ГУО «СШ № 28 г. Витебска».

При этом использованы логические (сравнение, аналогия, анализ, синтез, обобщение, конкретизация, моделирование) и эмпирические (наблюдение, описание, эксперимент) методы.

Результаты исследовательской работы нашли применение на лабораторных занятиях по методике преподавания математики со студентами четвертого курса очной формы обучения факультета математики и информационных технологий ВГУ имени П.М. Машерова.

Результаты и их обсуждение. Проанализировав педагогическую и учебную литературу по геометрии, опыт работы учителей математики профильных классов, применив основные положения и приемы укрупнения задач, мы пришли к выводу, что для обучения школьников решению стереометрических задач может быть использована методическая схема, состоящая из четырех этапов.

На первом этапе происходит изучение текста задачи, понимание того, из каких геометрических понятий состоит условие задачи, как они связаны между собой, из чего состоит требование задачи. На этом этапе ученикам приходится актуализировать не только изученные ранее стереометрические понятия, но и планиметрические понятия и их свойства.

Далее необходимо сделать правильный рисунок, например, пирамиды, на котором будут указаны или построены понятия, входящие в текст задачи.

Данный момент для школьников является наиболее сложным. Это во многом объясняется тем, что в учебниках по стереометрии практически отсутствуют способы основных геометрических построений и их обоснований на основе определений и теорем.

К основным построениям можно отнести: построение различных углов и расстояний, а также перпендикуляров к плоскости. Кроме этого указанные построения необходимо применить, например, к пирамидам.

Ниже приведем описание способов подобных построений.

Построение угла между прямой и плоскостью можно выполнить следующим способом: произвольно выбрать на данной прямой две точки. Построить точки, являющиеся их прямоугольными проекциями на данную плоскость. Построить прямую – проекцию, содержащую эти точки. Угол между данной прямой и полученной проекцией будет искомым углом.

При обосновании такого построения используются теоремы: о трех перпендикулярах, признак перпендикулярности прямой и плоскости, признак перпендикулярности двух плоскостей.

Проведение перпендикуляра из данной точки к плоскости осуществляется следующим образом: через данную точку проводят вторую плоскость, перпендикулярную к первой плоскости, и определяют прямую их пересечения; из данной точки во второй плоскости проводят перпендикуляр к линии пересечения плоскостей. Тогда он будет перпендикулярен первой плоскости по соответствующей теореме.

Частным случаем подобного построения является построение высоты пирамиды. Данной точкой здесь является вершина пирамиды, а плоскостью, к которой необходимо провести перпендикуляр, является плоскость основания пирамиды.

Вместе с тем построение высоты имеет некоторые особенности. Это зависит от вида пирамиды и еще каких-либо условий.

Например, в правильной пирамиде сначала изображают правильный треугольник, четырехугольник и т.д. Затем находят его центр (основание высоты пирамиды). Потом строят высоту с отмеченной вершиной и, наконец, изображают боковые ребра пирамиды.

Для неправильных пирамид возможны следующие варианты построения высоты:

1. Если в многограннике общие стороны боковых треугольников одинаково наклонены к плоскости основания, то основание высоты совпадает с центром окружности, описанной около многоугольника, являющегося основанием пирамиды. В ходе доказательства данного факта выясняется, что эту ситуацию можно сформулировать (замаскировать) иначе: общие стороны боковых треугольников равны или вершина многогранника равноудалена от вершин основания, или общие стороны боковых треугольников образуют с высотой многогранника одинаковые углы.

2. Если в многограннике боковые треугольники одинаково наклонены к плоскости основания, то основание высоты совпадает с центром окружности, вписанной в многоугольник, являющийся основанием многогранника.

Проведя доказательство этого утверждения, можно привести другие формулировки, отражающие ключевой момент данной ситуации: высота многогранника составляет с боковыми треугольниками одинаковые углы; апофемы боковых треугольников равны; вершина многогранника равноудалена от сторон основания; высота многогранника составляет одинаковые углы с высотами боковых треугольников.

3. Если в многограннике смежные боковые треугольники перпендикулярны к плоскости основания, то высотой многогранника является их общая сторона.

4. Если в многограннике один боковой треугольник перпендикулярен к плоскости основания, то высотой многогранника является высота этого бокового треугольника, проведенная из вершины многогранника.

Построение линейного угла данного двугранного угла осуществляется следующим образом: на ребре двугранного угла выбирают точку и в гранях двугранного угла проводят через эту точку перпендикуляры. Получившийся между ними угол и будет линейным углом.

Построение расстояния от точки до прямой может быть произведено двумя способами:

1. Построить плоскость, содержащую данную точку и данную прямую, а затем в ней построить нужный перпендикуляр к данной прямой, который и будет искомым расстоянием.

2. Построить плоскость, проходящую через данную точку и перпендикулярную к данной прямой. Затем точку их пересечения соединить отрезком с данной точкой.

На втором этапе должны происходить поиск идеи и составление плана решения стереометрической задачи. При этом может использоваться цепочка логических рассуждений методом восходящего анализа: для того, чтобы выполнить требование задачи, достаточно найти величины A и B; для того, чтобы найти величины A и B, достаточно найти величины C и D, и так до тех пор, пока для нахождения промежуточных неизвестных величин достаточно использовать известные величины из условия задачи. Подобный способ рассуждений целесообразно применять для задач, которые решаются поэтапно – вычислительным методом.

Другой способ рассуждений может опираться на метод нисходящего анализа: неизвестная величина из требования стереометрической задачи обозначается через X, и на основе текста задачи выводятся следствия до тех пор, пока не будет получено уравнение, которое связывает неизвестную величину X с данными известными величинами. Подобный способ рассуждений применим для задач, решаемых алгебраическим методом. При этом следует знакомить учащихся с приемами составления уравнений: на основе теоремы Пифагора, на соотношении сходственных сторон подобных треугольников, на равенстве выражений одного и того же элемента фигуры, полученных разными способами, с использованием различных геометрических формул и соотношений сторон и углов в треугольнике [1].

Кроме того, к составлению плана решения задач уместно привлечь из планиметрии знание ключевых задач, позволяющих с большей уверенностью и скоростью продвигаться по логической цепочке рассуждений.

На третьем этапе реализуется выработанный план решения. Здесь потребуются от учащихся главным образом терпение, четкое и аккуратное выполнение разнообразных вычислений, применение геометрических формул, а также умение решать линейные, квадратные, дробно-рациональные, иррациональные и тригонометрические уравнения.

Процесс решения задачи не должен заканчиваться после выполнения ее требования. Необходимо дальше работать с задачей в контексте технологии укрупнения дидактических единиц. Этому должен быть посвящен четвертый этап в решении стереометрической задачи.

Следует отметить, что действие является структурным компонентом методов решения геометрических задач и выступает в качестве дидактической единицы, подвергаемой укрупнению.

Средством укрупнения действий выступают упорядоченные наборы (блоки) задач, которые связаны между собой по линии укрупнения своих решений. Образуются подобные упорядоченные наборы с помощью следующих приемов: изменение требования задачи при неизменном условии, изменение условия задачи при неизменном требовании, составление обратной задачи, обобщение задачи, решение задачи разными методами, расширение чертежа задачи [2].

Обратимся к примерам, иллюстрирующим сказанное.

З а д а ч а. *Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция с основаниями 5 и 20. Все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60 градусов. Найти высоту пирамиды.*

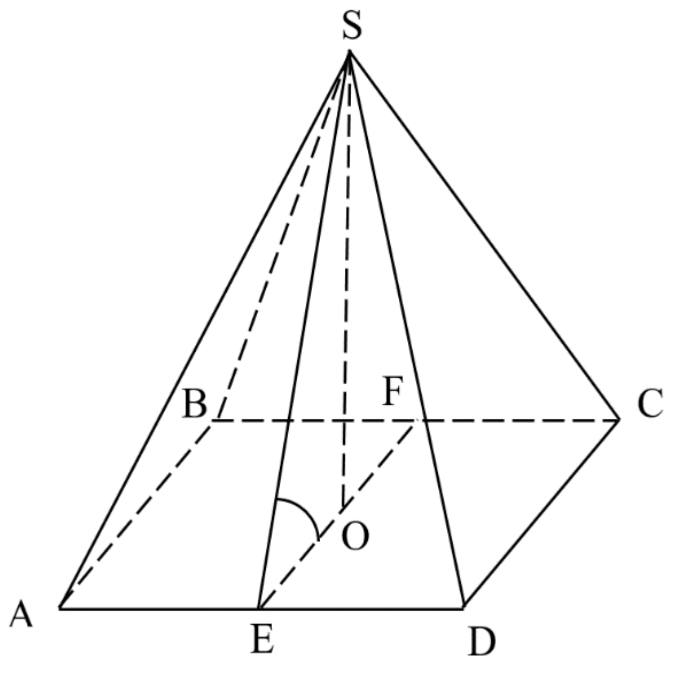

Рис.

Покажем весь процесс решения.

1. Понять текст задачи и выполнить правильный рисунок.

Необходимо знание стереометрических и планиметрических понятий: пирамида, основание пирамиды, высота пирамиды, боковые грани пирамиды, двугранный угол, равнобедренная трапеция, основания трапеции.

Далее учащиеся должны понять следующее: так как все боковые треугольники одинаково наклонены к плоскости основания, то основание высоты многогранника совпадает с центром окружности, вписанной в равнобедренную трапецию. Поэтому изображение многогранника выполняют снизу вверх.

Равнобедренную трапецию изображают произвольной трапецией ABCD. Середины оснований трапеции соединяют отрезком EF. Делят отрезок EF пополам и получают точку O – центр окружности. Из точки O восстанавливают перпендикуляр SO (высоту пирамиды).

Далее строят линейный угол при ребре AD. Отрезок EF перпендикулярен AD. Точку E соединяют с точкой S. Тогда SCE перпендикулярна AD (по теореме о трех перпендикулярах). Следовательно, угол SEO = 60 градусов (рис.).

2. Составить план решения задачи. Логические рассуждения проводят с помощью метода восходящего анализа.

Для того чтобы найти высоту SO, достаточно найти EO. Для того чтобы найти EO, достаточно найти EF, для того чтобы найти EF, достаточно воспользоваться свойством EF = корень квадратный из BC x AD.

3. Реализовать план решения.

EF = корень квадратный 5 x 20 = 10. OE = 1/2 EF = 5. Из прямоугольного треугольника SOE SO : EO = tg 60 градусов. Откуда SO = 5 x tg 60 градусов = 5 x на корень квадратный из 3.

4. Укрупнить задачу.

Для решенной задачи составим блок укрупняющих задач, изменяя требование, но оставляя неизменным условие задачи.

Запишем новые требования.

1.1. Найти апофему пирамиды.

1.2. Найти объем пирамиды.

1.3. Найти боковую поверхность пирамиды.

1.4. Найти полную поверхность пирамиды.

1.5. Найти боковые ребра пирамиды.

1.6. Найти угол между высотой пирамиды и большим боковым ребром.

Составим блок укрупняющих задач, изменяя условие, но оставляя неизменным требование задачи. Запишем новые условия.

2.1. Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция с основаниями 5 и 20. Расстояния от вершины пирамиды до сторон основания равны 10.

2.2. Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция с основаниями 5 и 20. Высота пирамиды образует с боковыми гранями угол в 30 градусов.

2.3. Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция с основаниями 5 и 20. Большое боковое ребро равно 15.

2.4. Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция, у которой боковые стороны равны 20, а острый угол при основании равен 30^{o}. Все боковые треугольники пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60^{o}.

2.5. Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция, у которой радиус вписанной окружности равен 5. Все боковые треугольники пирамиды наклонены к плоскости под углом 60^{o}.

Следующим приемом укрупнения является обобщение задачи. Тогда в тексте первоначальной задачи вместо чисел 5, 20 и 60 необходимо подставить a, b и α.

Кроме того, можно обобщить каждую задачу первого и второго блоков. А если еще для всех задач составить обратные, поменяв местами условие (или его часть) и заключение, то получится список, содержащий более 50 задач.

Заключение. Таким образом, в процессе решения стереометрических задач следует использовать четыре этапа. Первые три этапа являются традиционными, а четвертый этап является новым в методике решения задач.

Вместе с тем, чтобы пройти первый этап, необходимо подготовить для учащихся дополнительный дидактический материал, содержащий способы основных построений в стереометрии, их обоснования и набор соответствующих задач для закрепления.

При составлении плана решения на втором этапе учителю также придется подготовить материал для логического рассуждения по поиску решения, применения различных методов решения задач.

В ходе реализации четвертого этапа целесообразно составлять упорядоченные наборы (блоки) укрупненных стереометрических задач, которые связаны между собой по линии своих решений и конструируются на основе указанных выше методических приемов. Применение подобных блоков целесообразно осуществлять как на уроках, так и дома при выполнении соответствующих заданий, составленных учителем или самими учащимися.

Разработанная последовательность решения стереометрической задачи, ее «наполненность» конкретным, правильным содержанием способствуют развитию логического мышления, умственных способностей старшеклассников, раскрытию их творческих способностей, успешной подготовке к выпускному экзамену и централизованному тестированию по математике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Устименко, В.В. Методика работы с ключевыми задачами в контексте укрупнения дидактических единиц / В.В. Устименко, А.В. Виноградова // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2014. – № 3. – С. 78.
2. Устименко, В.В. Приемы укрупнения ключевых задач / В.В. Устименко, А.В. Виноградова // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2012. – № 3. – С. 58–62.

REFERENCES

1. Ustimenko V.V., Vinogradova A.V. *Vesn. Vitseb. dziarzh. un-ta* [Journal of Vitebsk State University], 2014, 3, p. 78.
2. Ustimenko V.V., Vinogradova A.V. *Vesn. Vitseb. dziarzh. un-ta* [Journal of Vitebsk State University], 2012, 3, p. 58–62.

Поступила в редакцию 06.04.2021

Адрес для корреспонденции: e-mail: Elena.voskobojnikova99@gmail.com – Воскобойникова Е.С.