МАТЭМАТЫКА

УДК 514.765+512.812.4

ЧЕТЫРЁХМЕРНЫЕ САМОПОДОБНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ ГРУППЫ ЛИ $HS \times R^+$

А.К. Гуц*, М.Н. Подоксёнов**
*Омский государственный университет имени Ф.М. Достоевского
**Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Преобразование подобия риманова или лоренцева многообразия (M, g) называется несущественным, если оно является изометрией для некоторого многообразия конформно эквивалентного (M, g). Многообразие называется самоподобным, если оно допускает существенную однопараметрическую группу подобий.

Цель работы – найти все левоинвариантные лоренцевы метрики на связной четырёхмерной группе Ли $G_4 = Hs \times \mathbf{R}^+$, где $\mathbf{R}^+ = (0,+\infty)$ с операцией умножения, при которых она превращается в самоподобное однородное многообразие.

Материал и методы. *Рассматривается связная четырёхмерная группа Ли $G_4 = Hs \times \mathbf{R}^+$. На ней вводятся три типа левоинвариантной лоренцевой метрики. Используются методы римановой геометрии.*

Результаты и их обсуждение. *Доказано, что существует в точности три класса таких метрик (с точностью до изометрии). Для каждого класса метрик получены формулы, описывающие действие существенной однопараметрической группы подобий полученного однородного многообразия. Эти группы порождаются гомотетическими автоморфизмами алгебры Ли $\mathcal{Hs} \oplus \mathcal{R}$.*

Заключение. *Алгебра Ли $\mathcal{Hs} \oplus \mathcal{R}$, снабжённая лоренцевым скалярным произведением, всегда допускает однопараметрическую группу автоизометрий. Поэтому цель дальнейшей работы – описать полные группы изометрий однородного лоренцева многообразия группы Ли $G_4 = Hs \times \mathbf{R}^+$, в зависимости от типа введённой на ней левоинвариантной лоренцевой метрики.*

Ключевые слова: *группа Ли, алгебра Ли, лоренцева метрика, подобие, самоподобное многообразие.*

FOUR-DIMENSIONAL SELF-SIMILAR HOMOGENEOUS MANIFOLDS OF LIE GROUP $HS \times R^+$

A.K. Guts*, M.N. Podoksenov**
*Omsk State F.M. Dostoevsky University
**Education Establishment "Vitebsk State P.M. Masherov University"

A similarity transformation of Riemannian or Lorentzian manifold (M, g) is called inessential if it is an isometry for some manifold conformally equivalent to (M,g). A manifold is called self-similar if it admits an essential one-parameter similarity group.

The purpose of the work is to find all left-invariant Lorentzian metrics on a connected four-dimensional Lie group $G_4 = Hs \times \mathbf{R}^+$, where $\mathbf{R}^+ = (0,+\infty)$ with the operation of multiplication, such that G_4 turns into a self-similar homogeneous manifold.

Material and methods. *We consider a connected four-dimensional Lie group $G_4 = Hs \times \mathbf{R}^+$. Three types of the left-invariant Lorentzian metric are introduced on it. The methods of Riemannian geometry are used.*

Findings and their discussion. *It was proved that there are exactly three classes of such metrics (up to isometry). For each class of metrics, formulas are obtained that describe the action of the essential one-parameter similarity group of the resulting homogeneous manifold. These groups are generated by homothetic automorphisms of the Lie algebra $\mathcal{Hs} \oplus \mathcal{R}$.*

Conclusion. *The Lie algebra $\mathcal{H}s \oplus \mathcal{R}$ equipped with a Lorentz scalar product always admits a one-parameter autoisometry group. Therefore, the purpose of the further work is to describe the complete isometry groups of the homogeneous Lorentzian manifold of the Lie group $G_4 = Hs \times \boldsymbol{R}^+$, depending on the type of the left-invariant Lorentzian metric introduced on it.*

Key words: *Lie group, Lie algebra, Lorentzian metric, similarity, self-similar manifold.*

Преобразование $f: M \to M$ риманова или лоренцева многообразия (M, g) называется *подобием* с коэффициентом e^{μ}(μ = const), если $g(f_*X, f_*Y)_{f(p)} = e^{2\mu}g(X,Y)_p$ выполнено для любой точки $p \in M$ и любых векторов $X, Y \in T_pM$. Преобразование подобия называется *несущественным*, если оно является изометрией для некоторого многообразия конформно эквивалентного (M, g). Многообразие называется *самоподобным*, если оно допускает существенную однопараметрическую группу подобий. Группа Ли (G, g), снабжённая левоинвариантной лоренцевой метрикой, представляет собой однородное многообразие.

В работе [1] показано, что трёхмерная группа Гейзенберга Hs, состоящая из верхнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали, допускает только один тип левоинвариантой метрики, при которой она является самоподобным многообразием.

Цель данной работы – найти все левоинвариантные лоренцевы метрики на связной четырёхмерной группе Ли $G_4 = Hs \times \boldsymbol{R}^+$, где $\boldsymbol{R}^+ = (0, +\infty)$ с операцией умножения, при которых она превращается в самоподобное однородное многобразие. Мы найдём три типа таких метрик (с точностью до изометрии) и укажем их группы гомотетических автоморфизмов. Алгебра Ли $\mathcal{G}_4 = \mathcal{H}s \oplus \mathcal{R}$ рассматриваемой группы Ли относится к подтипу Бианки VI_3 [2].

Материал и методы. Рассматривается связная четырёхмерная группа Ли $G_4 = Hs \times \boldsymbol{R}$. На ней вводятся три типа левоинвариантной лоренцевой метрики. Используются методы римановой геометрии.

Результаты и их обсуждение. Пусть G – произвольная группа Ли, $\mathcal{G}$ – её алгебра Ли. Любое подобие $f: G \to G$ однородного пространства (G, g) раскладывается в композицию $L_a \circ h$, где h – подобие, оставляющее единицу $e \in G$ на месте, а L_a – левый сдвиг, $a \in G$. Таким образом, задача сводится к поиску подобий, которые оставляют неподвижной единицу группы Ли. В [1] автором доказано, что такие преобразования порождаются линейными преобразованиями соответствующей алгебры Ли $\mathcal{G}$, если группа Ли G является экспоненциальной.

Линейное преобразование алгебры Ли $F: \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ называется *автоморфизмом*, если оно сохраняет операцию скобки: $[FX, FY] = F[X, Y]$ $\forall X, Y \in \mathcal{G}$. Пусть в алгебре Ли $\mathcal{G}$ задано евклидово или лоренцево скалярное произведение $\langle , \rangle$. Преобразование $F: \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ называется *подобием* с коэффициентом e^{μ}, если $\langle FX, FY \rangle = e^{2\mu}\langle X, Y \rangle$ $\forall X, Y \in \mathcal{G}$. В случае $\mu = 0$ преобразование F называется изометрией.

Преобразование, являющееся одновременно подобием и автоморфизмом, будем называть *автоподобием*. Преобразование, являющееся изометрией и автоморфизмом, будем называть *автоизометрией*. Все автоподобия алгебры Ли $\mathcal{G}_4$, в которой введено лоренцево скалярное произведение, найдены в работе [3].

Группа Ли G_4 и алгебра Ли $\mathcal{G}_4$ могут быть представлены как состоящие соответственно из матриц вида

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & y^2 & y^1 & 0 \\ 0 & 1 & y^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y^4 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & x^2 & x^1 & 0 \\ 0 & 0 & x^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^4 \end{pmatrix}$$

с обычными операциями умножения матриц и коммутатора матриц ($x^i \in \boldsymbol{R}, i = 1, \dots, 4$; $y^j \in \boldsymbol{R}$, $j = 1, 2, 3$; $y^4 > 0$). В алгебре Ли $\mathcal{G}_4$ можно выбрать базис (E_1, E_2, E_3, E_4), состоящий из матриц

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда операция скобки будет задаваться одним равенством

$$[E_2, E_3] = E_1, \tag{1}$$

а остальные скобки Ли равны нулевому вектору. Алгебра Ли $\mathcal{G}_4$ содержит двумерный центр $\mathcal{L}$, который является линейной оболочкой векторов E_1 и E_4, а также одномерный центр $\mathcal{Z} = \boldsymbol{R}E_1$. При этом $\mathcal{Z} = \mathcal{G}_4^{(2)} = [\mathcal{G}_4, \mathcal{G}_4]$ – производная алгебры Ли.

Произвольный базис (V_1, V_2, V_3, V_4) в $\mathcal{G}$, относительно которого коммутационные соотношения задаются одним равенством $[V_2, V_3] = V_1$, будем называть каноническим. В любом каноническом базисе верно, что $\mathcal{L}$ является линейной оболочкой векторов V_1 и V_4, и $\mathcal{Z} = \boldsymbol{R}V_1$.

Зададим на группе G_4 карту $\varphi : G_4 \to \boldsymbol{R}^3 \times \boldsymbol{R}^+$, приписывающую матрице Y координаты (y^1, y^2, y^3, y^4), а на алгебре Ли $\mathcal{G}_4$ зададим карту $\psi : \mathcal{G}_4 \to \boldsymbol{R}^4$, приписывающую матрице X координаты (x^1, x^2, x^3, x^4). Тогда запись отображений $\exp: \mathcal{G}_4 \to G_4$ и $\exp^{-1}: G_4 \to \mathcal{G}_4$ в этих картах выглядит так:

$$\exp(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x^1 + x^2x^3/2,\ x^2, x^3, e^{x^4}), \tag{2}$$

$$\exp^{-1}(y^1, y^2, y^3, y^4) = (y^1 - y^2y^3/2,\ y^2, y^3, \ln y^4). \tag{3}$$

Эти формулы показывают, что группа Ли Hs является экспоненциальной. Операция умножения в группе имеет следующую запись в карте φ:

$$(a^1, a^2, a^3, a^4)\cdot(b^1, b^2, b^3, b^4) = (a^1 + b^1 + a^2b^3, a^2 + b^2, a^3 + b^3, a^4b^4). \tag{4}$$

Пусть теперь (V_1, V_2, V_3, V_4) – произвольный канонический базис. На алгебре Ли $\mathcal{G}_4$ зададим естественную карту $\psi : \mathcal{G}_4 \to \boldsymbol{R}^4$, приписывающую вектору $X = x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3 + x_4V_4$ координаты (x_1, x_2, x_3, x_4). На G_4 зададим карту $\varphi : G_4 \to \boldsymbol{R}^3 \times \boldsymbol{R}^+$, приписывающую элементу $\exp X$ координаты $(x^1 + x^2x^3/2,\ x^2, x^3, e^{x^4})$ соответственно. Тогда в выбранных картах отображение $\exp^{-1}: G_4 \to \mathcal{G}_4$ будет задаваться равенствами (3) , а групповое умножение – формулами (4). Назовём обе карты и координаты, которые они определяют естественными.

Теорема. *На группе Ли $G_4 = Hs \times \boldsymbol{R}^+$ существуют в точности три типа левоинвариантной лоренцевой метрики (каждый тип определяет метрику с точностью до изометрии), при которой она допускает существенную однопараметрическую группу преобразований, оставляющую инвариантной единичный элемент группы. Матрица метрического тензора и формулы, по которым действует существенная однопараметрическая группа преобразований, в каждом из случаев имеют следующий вид относительно естественных координат:*

1. $$(g_{ij}(y)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/y^4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -y_2/y^4 \\ 1/y^4 & 0 & -y_2/y^4 & 0 \end{pmatrix}; \tag{5}$$

$$f_t(y^1, y^2, y^3, y^4) =$$

$$= \left(e^{2\mu t}\left(y^1 - y^2y^3\sin^2 t + \frac{1}{4}((y^2)^2 - (y^3)^2)\sin 2t\right),\ e^{\mu t}(y^2\cos t - y^3\sin t), e^{\mu t}(y^2\sin t + y^3\cos t), y^4\right). \tag{6}$$

2. $$(g_{ij}(y)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -y_2 & 0 \\ 0 & -y_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/y^4 \end{pmatrix}; \tag{7}$$

$$f_t(y^1, y^2, y^3, y^4) = (e^{3\mu t}y^1,\ e^{\mu t}y^2, e^{2\mu t}y^3, (y^4)^{e^{2\mu t}}). \tag{8}$$

3. $$(g_{ij}(y)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/y^4 \\ -y_2 & 0 & 1+(y^2)^2 & 0 \\ 0 & 1/y^4 & 0 & 1/y^4 \end{pmatrix}; \tag{9}$$

$$f_t(y^1, y^2, y^3, y^4) = (e^{\mu t}y^1,\ y^2, e^{\mu t}y^3, (y^4)^{e^{2\mu t}}). \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Левоинвариантная метрика на группе Ли G_4 индуцирует скалярное произведение в её алгебре Ли $\mathcal{G}_4$, и наоборот, скалярное произведение в $\mathcal{G}_4$ однозначно определяет левоинвариантную метрику на G_4. В работе [3] доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть на алгебре Ли $G_4 = \mathcal{H}s \oplus \mathcal{R}$ задано лоренцево скалярное произведение сигнатуры* $(+,+,+,-)$. *Тогда эта алгебра Ли допускает автоподобия только в следующих трёх случаях, указанных в табл.*

Таблица

Автоподобия алгебры Ли $\mathcal{G}_4 = \mathcal{H}s \oplus \mathcal{R}$.

Условие	Матрица Грама	Матрица, задающая однопараметрическую группу автоподобий
1. $\mathcal{L}$: (+, –) $\mathcal{Z}$: (+).	$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$F_1(t) = \begin{pmatrix} e^{2\mu t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu t}\cos t & e^{\mu t}\sin t & 0 \\ 0 & e^{\mu t}\sin t & -e^{\mu t}\cos t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (11)
2. $\mathcal{L}$: (+, 0) $\mathcal{Z}$: (0).	$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$F_2(t) = \begin{pmatrix} e^{3\mu t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2\mu t} \end{pmatrix}$. (12)
3. $\mathcal{L}$: (+, 0) $\mathcal{Z}$: (+)	$\Gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$F_3(t) = \begin{pmatrix} e^{\mu t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2\mu t} \end{pmatrix}$. (13)

В табл. все матрицы указаны в каноническом базисе. Во всех случаях $\mu \neq 0$, $t \in \boldsymbol{R}$. Сигнатура в первом столбце характеризует метрику, индуцированную на каждом из идеалов. Например, запись «$\mathcal{Z}$: (+)» означает, что центр алгебры Ли пространственноподобен, а запись «$\mathcal{Z}$: (0)» означает, что центр алгебры Ли изотропен.

Произвольное автоподобие является композицией одного из указанных преобразований и симметрий, меняющих направление одного или нескольких базисных векторов:

$$E_1' = \pm E_1,\ E_2' = \theta E_2,\ E_3' = \theta E_3,\ E_4' = \pm E_4,\ \theta = \pm 1 .$$

Т.е. векторы E_1 и E_4 могут менять направление произвольно, а E_2 и E_3 должны менять направление одновременно.

Обозначим $F_t : \mathcal{G}_4 \to \mathcal{G}_4$ – однопараметрическую группу автоподобий алгебры Ли $\mathcal{G}_4$. Тогда автоподобия группы Ли G_4 будем строить по правилу

$$f_t = \exp \circ F_t \circ \exp^{-1}:\ G_4 \to G_4 .$$

Обратно, любое автоподобие группы Ли, оставляющее неподвижной единицу группы, имеет в этой точке дифференциал, который является автоподобием алгебры Ли. Произвольное автоподобие группы Ли представляет собой композицию автоподобия, оставляющего неподвижной единицу группы, и левого сдвига.

Левый сдвиг на элемент $h(h^1, h^2, h^3, h^4)$ действует по формуле

$$L_g(y^1, y^2, y^3, y^4) = (h^1 + y^1 + h^2 y^3, h^2 + y^2, h^3 + y^3, h^4 y^4).$$

Матрица его дифференциала $(L_h)_*$ в любой точке $y(y^1, y^2, y^3, y^4)$ и обратная матрица имеют вид:

$$U(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h^4 \end{pmatrix},\quad V(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -h^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/h^4 \end{pmatrix}.$$

1 случай. Пусть преобразование F_t задаётся матрицей $F_1(t)$. Тогда непосредственным вычислением убеждаемся, что преобразование $f_t = \exp \circ F_t \circ \exp^{-1}$ задаётся формулами (6). Дифференциал этого преобразования $(f_t(y))_*$ относительно базиса $(\partial/\partial y^1,\ \partial/\partial y^2,\ \partial/\partial y^3,\ \partial/\partial y^4)$ в касательном пространстве $T_y G_4$ задаётся матрицей

$$J(y) = \begin{pmatrix} e^{2\mu t} & e^{2\mu t}(-y^3 \sin^2 t + \frac{1}{2} y^2 \sin 2t) & e^{2\mu t}(-y^2 \sin^2 t + \frac{1}{2} y^3 \sin 2t) & 0 \\ 0 & e^{\mu t}\cos t & -e^{\mu t}\sin t & 0 \\ 0 & e^{\mu t}\sin t & e^{\mu t}\cos t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица имеет вид:

$$I(y)=\begin{pmatrix} e^{-2\mu t} & -e^{-\mu t}y^2\sin t & e^{-\mu t}y^3\sin t & 0 \\ 0 & e^{-\mu t}\cos t & e^{-\mu t}\sin t & 0 \\ 0 & -e^{-\mu t}\sin t & e^{-\mu t}\cos t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицу метрического тензора (g_{ij}) в точке $y(y^1, y^2, y^3, y^4)$ находим по формуле

$$(g_{ij}(y)) = V^T(y)\,\Gamma\, V(y)$$

в соответствии с методикой, описанной в работе [4]. Для рассматриваемого случая получаем матрицу (4). Матрицу тензора $((f_t)^* g(y))$ находим из равенства

$$((f_t)^* g(y))_{ij} = I^T(y)\,(g_{ij}(y))\, I(y).$$

Непосредственным вычислением получаем, что

$$((f_t)^* g(y))_{ij}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{-2\mu t}/y^4 \\ 0 & e^{-2\mu t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\mu t}/y^4 & e^{-\mu t}(y^3\sin t - y^2\cos t)/y^4 \\ e^{-2\mu t} & 0 & e^{-\mu t}(y^3\sin t - y^2\cos t)/y^4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $(y'^1, y'^2, y'^3, y'^4) = f_t(y^1, y^2, y^3, y^4)$. Тогда $e^{-\mu t}(y^3\sin t - y^2\cos t) = -e^{-2\mu t}y'^2$. Сравнивая последнюю матрицу с матрицей (4), мы видим, что

$$((f_t)^* g(y))_{ij} = e^{-2\mu t}(g_{ij}(y')).$$

Это значит, что однопараметрическая группа преобразований, действующая по формулам (5), действительно является существенной однопараметрической группой гомотетий.

2 случай. Пусть преобразование F_t задаётся матрицей $F_2(t)$. Тогда непосредственным вычислением убеждаемся, что преобразование f_t задаётся формулами (8). Матрица дифференциала этого преобразования в базисе, составленном из координатных векторов, и обратная матрица имеют вид:

$$J(y)=\begin{pmatrix} e^{3\mu t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2\mu t}(y^4)^{e^{2\mu t-1}} \end{pmatrix};\quad I(y)=\begin{pmatrix} e^{-3\mu t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\mu t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2\mu t}(y^4)^{e^{1-2\mu t}} \end{pmatrix}.$$

Матрица метрического тензора $(f_t)^* g$:

$$((f_t)^* g(y))_{ij}=\begin{pmatrix} 0 & e^{-4\mu t} & 0 & 0 \\ e^{-4\mu t} & 0 & -e^{-3\mu t}y^2 & 0 \\ 0 & -e^{-3\mu t}y^2 & e^{-4\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-4\mu t}(y^4)^{e^{-4\mu t}} \end{pmatrix}.$$

Сравнивая эту матрицу с матрицей (7), мы видим, что $((f_t)^* g)_{ij}(y) = e^{-4\mu t}(g_{ij}(y'))$. Это подтверждает, что однопараметрическая группа преобразований, действующая по формулам (8), является существенной однопараметрической группой гомотетий.

3 случай. Пусть преобразование F_t задаётся матрицей $F_3(t)$. Непосредственным вычислением находим формулы (10), по которым действует преобразование f_t. Матрица дифференциала этого преобразования в базисе, составленном из координатных векторов, и обратная матрица имеют вид:

$$J(y)=\begin{pmatrix} e^{\mu t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2\mu t}(y^4)^{e^{2\mu t-1}} \end{pmatrix};\quad I(y)=\begin{pmatrix} e^{-\mu t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2\mu t}(y^4)^{e^{1-2\mu t}} \end{pmatrix}.$$

Матрица метрического тензора $(f_t)^* g$:

$$((f_t)^* g(y))_{ij}=\begin{pmatrix} e^{-2\mu t} & 0 & -e^{-2\mu t}y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2\mu t}(y^4)^{e^{-2\mu t}} \\ -e^{-2\mu t}y_2 & 0 & 1+(y^2)^2 & 0 \\ 0 & e^{-2\mu t}(y^4)^{e^{-2\mu t}} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы опять получаем $((f_t)^* g)_{ij}(y) = e^{-2\mu t}(g_{ij}(y'))$. Значит, однопараметрическая группа преобразований, действующая по формулам (9), является существенной однопараметрической группой гомотетий. ■

В каждом из рассмотренных выше случаев мы можем положить $\mu = 0$, и тогда только в первом случае получим однопараметрическую группу изометрий, имеющую единичный элемент группы в качестве неподвижной точки. В остальных случаях мы получим только тождественные преобразования.

З а м е ч а н и е. В работе [5] указаны неизометричные типы метрических тензоров на двух четырёхмерных нильпотентных группах Ли, в том числе и на группе $Hs \times \boldsymbol{R}$. Однако и рассматриваемая группа Ли, и выбор системы координат отличается от тех, что мы использовали в данной работе. Причём, в [5] не описано, как именно выбираются координаты, связаны ли они с матричным представлением группы Ли и какими формулами задаётся групповая операция в выбранных координатах. В результате метрические тензоры в данной работе и в [5] кардинально отличаются друг от друга.

Заключение. Таким образом, мы доказали, что существует в точности три класса левоинвариантных лоренцевых метрик (с точностью до изометрии) на четырёхмерной группе Ли $Hs \times \boldsymbol{R}^+$, при которых она превращается в самоподобное однородное многообразие. При этом мы использовали автоподобия соответствующей алгебры Ли $\mathcal{G}_4 = \mathcal{H}s \oplus \mathcal{R}$, снабжённой лоренцевым скалярным произведением. В работе [3] доказано, что эта алгебра Ли всегда допускает однопараметрическую группу автоизометрий. Были рассмотрены пять случаев расположения двумерного центра алгебры Ли и идеала $\mathcal{Z} = \boldsymbol{R}V_1$ относительно конуса изотропных векторов. В каждом из случаев выбран подходящий канонический базис и найдены формулы, по которым действует однопараметрическая группа автоизометрий. Поэтому в ближайшее время планируется построить полную группу изометрий в каждом из пяти рассмотренных случаев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Подоксёнов, М.Н. Подобия и изометрии однородного многообразия группы Гейзенберга, снабжённой левоинвариантной лоренцевой метрикой / М.Н. Подоксёнов // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2011. – № 5. – С. 10–15.
2. Петров, А.З. Новые методы в общей теории относительности / А.З. Петров. – М.: Наука, 1966.
3. Подоксёнов, М.Н. Автоподобия и автоизометрии одной четырёхмерной алгебры Ли VI типа Бианки / М.Н. Подоксёнов, Ф.С. Гаджиева // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 4. – С. 124–130.
4. Гаврилов, С.П. Геодезические левоинвариантных метрик на односвязной трёхмерной группе Ли II типа Бианки / С.П. Гаврилов // Гравитация и теория относительности (Казань). – 1982. – Вып. 19. – С. 37–47.
5. Bokan, N. Lorentz geometry of 4-dimensional nilpotent Lie groups / N. Bokan, T. Sukilovi'c, S. Vukmirovi'c // Geom. Dedicata. – 2015. – Vol. 177. – P. 83–102.

REFERENCES

1. Podoksenov M.N. *Vesnik Vitsebskaga dziarzhaunaga universiteta* [Journal of Vitebsk State University], 2011, 5, p. 10–15.
2. Petrov A.Z. *Noviye metody v obshchei teorii otnositelnosti* [New Methods in the General Theory of Relativity], M.: Nauka, 1966.
3. Podoksenov M.N., Hajiyeva F.S. *Vestnik Polotskogo gos. un-ta. Ser. C. Fundamentalniye nauki* [Bulletin of Polotsk State University. Series C. Fundamental Sciences]. – 2019. – No. 4. – P. 124–130.
4. Gavrilov S.P. *Gravitatsiya i teoriya otnositelnosti* (Kazan) [Gravity and the Theory of Relativity (Kazan)], 1982, 19, p. 37–47.
5. Bokan, N. Lorentz geometry of 4-dimensional nilpotent Lie groups / N. Bokan, T. Sukilovi'c, S. Vukmirovi'c // Geom. Dedicata. – 2015. – Vol. 177. – P. 83–102.

Поступила в редакцию 26.10.2021

Адрес для корреспонденции: e-mail: Michael.Vitebsk@gmail.com – Подоксёнов М.Н.