Аналогичные результаты получены и для кристаллов TGS - TGS+Cr (см. рисунок 2б). Механизм этого явления до конца не изучен. Поэтому в дальнейшем планируется провести практическое изучение и теоретические расчеты по влиянию градиента примеси на формирование доменной структуры и разработать рекомендации по получению РДС в сегнетоэлектрических кристаллах, выращиваемых из растворов.

Заключение. Выявлена корреляция образования регулярной доменной структуры и характера распределения примеси для слоистых кристаллов TGS-TGS+Cr. Формирование доменных стенок происходит преимущественно на участках, соответствующих изменению градиента концентрации примеси, причем в местах изменения знака с положительного на отрицательный формируются гладкие стенки, а с отрицательного на положительный граница доменов имеет изрезанный, неровный контур.

1. Shi-Ning Zhu, Yong-Yuan Zhu, Nai-Ben Ming. Ferroelectric Superlattice: Materials and Applications. Review// Phase Transitions. (2000). – Vol. 72. – P. 239–298.

ОТЛИЧИТЕЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ СВОЙСТВ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО И КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА

Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Почти 170 лет прошло со времени создания П.Л. Чебышевым теории полиномов, наименее уклоняющихся от нуля (экстремальных полиномов). Такие полиномы находят самые широкие приложения в различных вопросах математического анализа и, что может быть самым важным, применяются для конструирования оптимальных итерационных процессов. Исследования в этом направлении теории функций продолжили известные математики: А.Н. Коркин, Е.И. Золотарев, А.А. Марков, Г.Ф. Вороной, А.М. Ляпунов, В.А. Стеклов, Д.А. Граве, М.А. Красносельский, П.П. Забрейко.

Цель настоящей работы – провести сравнительный анализ свойств полиномов Чебышева первого рода и экстремальных полиномов, заданных на квадрате комплексной плоскости.

Материал и методы. Материалом исследования являются полиномы Чебышева первого рода и экстремальные в чебышевской метрике полиномы комплексного аргумента. Методы исследования – метод аналогии и методы математического и функционального анализа с использованием системы компьютерной математики *Maple* 2019.

Результаты и их обсуждение. Напомним, что основной теоремой в теории равномерных приближений, дающей необходимые и достаточные условия того, чтобы для заданной на $[a,b]$ непрерывной функции $f(x)$ некоторый полином $P_n(x)$ был полиномом ее наилучшего приближения степени n, является теорема П.Л. Чебышева (1854).

Теорема 1 (П.Л. Чебышев (1854)). *Пусть на отрезке $[a,b]$ задана непрерывная функция $f(x)$. Тогда для того, чтобы некоторый полином $P_n^*(x)$ степени не выше n был полиномом, наименее уклоняющимся от $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы на $[a,b]$ нашлась, по крайней мере, одна система из $n+2$ точек x_j $a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2} \le b$, в которых разность $f(x)-P_n^*(x)=r_n(x)$ 1. поочередно принимает значения разных знаков; 2. достигает по модулю наибольшего на $[a,b]$ значения, т.е. в точках $x_j\ (1\le j\le n+2)$ должны выполняться условия:*

$$r_n(x_1)=-r_n(x_2)=\ldots=(-1)^{n+1}r_n(x_{n+2})=\pm\|r_n\|_C. \qquad (1)$$

Систему точек $x_j\ (1\le j\le n+2)$, в которых имеют место равенства (1), называют альтернансом или же чебышевским альтернансом.

Известно, что среди всех многочленов фиксированной степени со старшим коэффициентом равным единице, заданных на отрезке $\left[-1;1\right]$, наименее уклоняются от нуля многочлены Чебышева первого рода

$$T_n\left(x\right)=2^{1-n}\cos\left(n\arccos x\right).$$

Например, $T_2\left(x\right)=x^2-\frac{1}{2},\ T_3\left(x\right)=x^3-\frac{3}{4}x,\ T_4\left(x\right)=x^4-x^2+\frac{1}{8}$.

Пусть D – квадрат с вершинами в точках $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$.

Естественным обобщением полиномов Чебышева первого рода является класс экстремальных полиномов комплексного аргумента, определенных на квадрате D. Справедлива следующая

Теорема 2 [1]. *Экстремальными на квадрате* D *являются следующие полиномы:*

$$P_1=z,\ P_2=z^2,\ P_3=z^3,\ P_4=z^4+3/2,\ P_5=z^5+\left(9-5\sqrt{2}\right)z,\ P_6=z^6+\frac{7}{3}z^2.$$

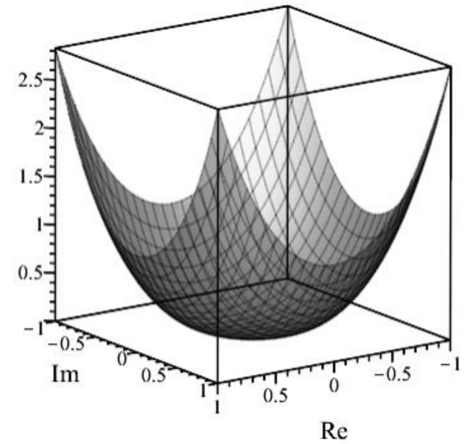

Рисунок 1 – График модуля функции $P_3=z^3$.

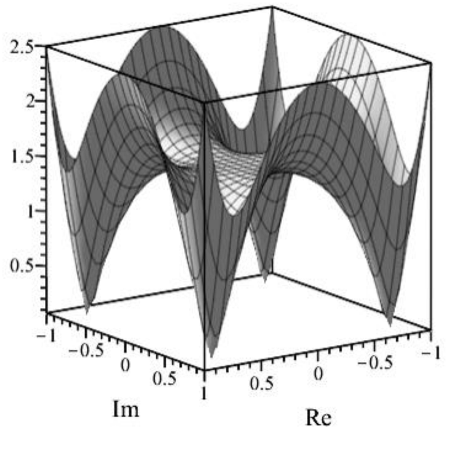

Рисунок 2 – График модуля функции $P_4=z^4+3/2$.

Важно отметить, что в комплексном случае теоремы аналогичной теореме Чебышева об альтернансе нет, поэтому к середине XX века были сформулированы новые критерии оптимальности приближения функции комплексного аргумента обычными и обобщенными полиномами. Эти критерии являются трудно проверяемыми и сами по себе не дают конкретного алгоритма для получения коэффициентов экстремального полинома. Такой алгоритм впервые был теоретически обоснован и применен Ю.В. Трубниковым лишь в начале XXI века [2].

Представляют интерес весьма своеобразные графики модулей экстремальных полиномов в комплексной плоскости. На рисунках 1 и 2 изображены графики модулей полиномов $P_3 = z^3$ и $P_4 = z^4 + 3/2$.

Заключение. Таким образом, проведённый сравнительный анализ позволил установить некоторые закономерности формирования коэффициентов и корней экстремальных полиномов комплексного аргумента, что позволит в дальнейшем разработать численные методы нахождения таких полиномов седьмой и более высоких степеней. Понятие альтернанса при этом преобразуется в более общий субградиентный критерий оптимальности, который, в свою очередь, требует громоздких, но эффективно работающих построений.

1. Трубников, Ю.В. О приближенных и точных полиномах типа Чебышева в комплексной области / Ю.В. Трубников // Таврический вестник информатики и математики. – 2003. – № 2. – С. 45–56.

2. Трубников, Ю.В. Экстремальные конструкции в негладком анализе и операторные уравнения с аккретивными нелинейностями / Ю.В. Трубников. – Москва: Астропресс-XXI, – 2002. – 256 с.

О ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ НАХОЖДЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО ПОЛИНОМА СЕДЬМОЙ СТЕПЕНИ, ОПРЕДЕЛЕННОГО НА КВАДРАТЕ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

М.М. Чернявский, Ю.В. Трубников
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Из истории математики известно, что первую теорию полиномов, наименее уклоняющихся от нуля на отрезке действительной прямой, в середине XIX века разработал выдающийся русский математик П.Л. Чебышёв. Им же впервые были открыты полиномы, наименее уклоняющиеся от нуля (экстремальные полиномы) на отрезке $[-1,1]$ и впоследствии названные полиномами Чебышёва первого рода. Такие полиномы нашли широкое применение как в современной математике, так и при решении ряда технических задач.

Естественным обобщением полиномов Чебышёва первого рода является класс экстремальных полиномов комплексного аргумента, определенных на квадрате комплексной плоскости с вершинами в точках $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$, которые важны для конструирования оптимальных итерационных процессов. Ю.В. Трубниковым в начале XXI века были получены в аналитическом виде выражения рассматриваемых экстремальных полиномов степеней со второй по шестую включительно [1]. Аналитическое построение экстремального полинома седьмой степени наткнулось на ряд непреодолимых трудностей. Таким образом, цель исследования – получить приближенный вид экстремального полинома комплексного аргумента седьмой степени, заданного на квадрате комплексной плоскости.

Материал и методы. Материалом исследования являются экстремальные в чебышевской метрике полиномы комплексного аргумента. Методы исследования – методы математического и функционального анализа с применением системы компьютерной математики *Maple* 2019.

Результаты и их обсуждение. Пусть D – квадрат с вершинами в точках $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$. Тогда справедлива следующая

Теорема 1 [1]. *Экстремальными на квадрате D являются следующие полиномы:*

$$P_1 = z,\ P_2 = z^2,\ P_3 = z^3,\ P_4 = z^4 + 3/2,\ P_5 = z^5 + (9-5\sqrt{2})z,\ P_6 = z^6 + (7/3)z^2.$$

Доказательство теоремы основано на применении алгоритма, являющегося следствием теоремы 1.5 из [2] (теорема 2 в настоящем докладе).

Пусть G – конечномерное подпространство банахова пространства E.

Теорема 2 [2, с. 26]. *Элемент $y \in G$ тогда и только тогда является элементом наилучшего приближения точки $x \notin G$, когда*

$$\exists\mu\big(\in \partial\|y-x\| \vee \in \partial\|x-y\|\big)\forall h(\in G)\,\mathrm{Re}\langle \mu, h\rangle = 0, \tag{1}$$

где $\partial\|x\|$ – субдифференциал нормы в точке x, $\langle \mu, h\rangle$ – значение функционала μ на векторе h.