Для нахождения характеризации обобщенно локальных классов Фиттинга мы будем использовать -метод Скибы исследований групп и формаций, предложенный в работе [4], который был дуализирован в [2] и состоит в следующем. Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P}\backslash\pi$. Если n – натуральное число, то символами $\pi(n)$ обозначают множество всех простых делителей n и $\pi(G) = \pi(|G|)$ множество всех простых делителей порядка группы G. Пусть σ – некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$, т.е. если $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$, то $\mathbb{P} = \cup_{i\in I} \sigma_i$ и для всех $i \neq j$ пересечение $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$. Тогда символами $\sigma(n)$ обозначают множество $\{\sigma_i : \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$ и $\sigma(G) = \sigma(|G|)$.

Пусть $\Pi \subseteq \sigma$. Символом $\mathfrak{E}_\Pi$ мы будем обозначать класс всех П-групп. В частности, символами $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и $\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ обозначим классы всех σ_i-групп соответственно.

Пусть $\emptyset \neq \sigma \subseteq \mathbb{P}$. Следуя [2], отображение $f : \sigma \to \{\text{классы Фиттинга}\}$ назовем σ-функцией Хартли или просто H_σ-функцией f. Множество $Supp(f) = \{\sigma_i : f(\sigma_i) \neq \emptyset\}$ – носитель H_σ-функции f.

Пусть $\Pi = Supp(f)$ и класс $LR_\sigma(f) = \mathfrak{E}_\Pi \cap (\cap_{\sigma_i \in \Pi} f(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'})$.

Определение. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем *σ-локальным*, если $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ для некоторой H_σ-функции f.

Если $\sigma^1 = \{\{p\}, \{q\}, \dots\}$ – минимальное разбиение множества $\mathbb{P}$ и $\mathfrak{F} = LR_{\sigma^1}(f)$, то класс $\mathfrak{F}$ назовем *локальным классом Фиттинга* и H_{σ^1}-функцию f будем называть H-функцией $\mathfrak{F}$.

Как установлено в [2], каждый σ-локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ определяется H_σ-функцией f такой, что $F(\sigma_i) = F(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'} \subseteq \mathfrak{F}$ и $F(\sigma_i)$ – классы Локетта для всех $i \in I$. Заметим, что $F(\sigma_i)$ – класс Локетта, т.е. $(G \times H)_{F(\sigma_i)} = G_{F(\sigma_i)} \times H_{F(\sigma_i)}$ для всех групп G и H. Функцию F называют *канонической* H_σ-функцией класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Основной результат работы, который дуализирует указанную выше теорему Брайса-Косси из [3], доказанная.

Теорема. *σ-Локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда является формацией, когда все значения его канонической H_σ-функции F являются формациями.*

В случае, когда $\sigma = \sigma^1$ – минимальное разбиение множества $\mathbb{P}$, следствием теоремы является следующая характеризация локальных классов Фиттинга, полученная Го Вэньбинем и С.Н. Воробьевым в работе [5].

Следствие. *Локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является формацией тогда и только тогда, когда все значения его канонической функции Хартли являются формациями.*

1. Doerk, K. Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

2. Vorob'ev, N.T., Guo, W., Li Zh. On σ-local Fitting classes / N.T. Vorob'ev, W. Guo, Zh. Li // J. Algebra. – 2020. – Vol. 542. – P. 116–129.

3. Bryce, R.A., Cossey J. Finite formations of finite solvable groups / R.A. Bryce, J. Cossey // Math. Z. – 1972. – Bd. 127. – S. 217–223.

4. Skiba, A.N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

5. Guo, W., Vorob'ev, S.N. Formations defined by Doerk-Hawkes operation / W. Guo, S.N. Vorob'ev // J. Algebra and its Applications. – 2018. – Vol. 17, № 12. – P. 1–9.

О ГИПОТЕЗЕ ЛОКЕТТА ДЛЯ σ-ЛОКАЛЬНЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

Н.Т. Воробьёв, Е.Д. Ланцетова
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Все рассматриваемые группы в настоящей работе конечны и разрешимы. В определениях и обозначениях следуем [1]. Совокупность групп $\mathfrak{X}$, которая наряду с каждой своей группой содержит и все ей изоморфные группы, называют *классом групп*. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если он замкнут относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то для любой группы G существует наибольшая нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа, которую называют *$\mathfrak{F}$-радикалом G* и обозначают $G_\mathfrak{F}$.

Центральное место в теории классов Фиттинга занимают исследования структуры классов Фиттинга, которые связаны с применением операторов Локетта «*» и «$_*$» (см. [2], а также главы [1, X–XI]). Напомним, что для каждого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ оператор «*» сопоставляет наименьший класс Фиттинга $\mathfrak{F}^*$, содержащий $\mathfrak{F}$ такой, что $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$ для всех групп G и H и оператор «$_*$» сопоставляет класс Фиттинга $\mathfrak{F}_* = \cap \{\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга и $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*\}$. Класс Фиттинга называют *нормальным* в классе $\mathfrak{S}$ всех разрешимых групп, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$ и для любой группы $G \in \mathfrak{S}$ ее $\mathfrak{F}$ -радикал является максимальной из подгрупп G, принадлежащих $\mathfrak{F}$. Локеттом была сформулирована и известна в настоящее время под названием

Гипотеза Локетта [2, проблема стр. 135]. *Верно ли, что для каждого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ существует нормальный класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ такой, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{X}$?*

Очевидно, каждый разрешимый нормальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта, поскольку ввиду [1, теорема X.3.7] любой неединичный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является нормальным тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}$. В работе [3] Брайсом и Косси было установлено, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в точности тогда, когда выполняется равенство

$$\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{S}_* \qquad (1)$$

Там же было доказано, что равенство (1) справедливо для всех локальных наследственных классов Фиттинга, т.е. классов Фиттинга, замкнутых относительно взятия подгрупп. В последующем Бейдлеманом и Хауком [4] была подтверждена гипотеза Локетта для локальных классов Фиттинга вида $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$, $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$, где $\mathfrak{X}$ произвольный непустой класс Фиттинга. Справедливость гипотезы Локетта для любого локального класса Фиттинга была установлена Воробьевым [5]. В последующем Дерком и Хоуксом [1, теорема X.6.1] было показано, что гипотеза Локетта справедлива и для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в универсуме $\mathfrak{E}$ всех групп тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{E}_* \qquad (2)$$

Галлего [6] было доказано, что равенство (2) верно в случае, когда $\mathfrak{F}$ локальный класс Фиттинга. Вместе с тем, Пинзом был построен пример (см. [7, пример 4.1]) класса Фиттинга, для которого $\mathfrak{F}_* \neq \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{E}_*$. Это приводит к задаче *описания семейств классов Фиттинга, в общем случае неразрешимых, для которых справедлива гипотеза Локетта*. Решение указанной задачи – основная цель настоящей работы.

Материал и методы. В работе используется терминология и методы абстрактной теории групп. В частности, методы теории классов Фиттинга.

Результаты и их обсуждения. Напомним, что *произведением* $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$ классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс групп $(G: G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$.

Ориентиром для исследований является σ-метод, предложенный Скибой [8], для изучения строения групп и формаций (см., также, [9–11]), который был дуализирован в теории классов Фиттинга в работе [12] и состоит в следующем.

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Символом $\pi(n)$ обозначим множество всех простых делителей числа n, $\pi(G) = \pi(|G|)$ – множество всех простых делителей группы G. Пусть σ – некоторое разбиение $\mathbb{P}$, т.е. $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$, $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$; $\sigma(n) = \{\sigma_i : \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$ и $\sigma(G) = \sigma(|G|)$.

Всякое отображение вида $f: \sigma \to \{$классы Фиттинга$\}$ называется *σ-функцией Хартли* или просто *H_σ-функцией*.

Пусть $LR_\sigma(f) = (G: G = 1$ или $G \neq 1$ и $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \in f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G)$, где $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и $\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ – классы всех σ_i-групп и всех $\sigma_i{}'$-групп соответственно, символом $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}}$ обозначен $\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$-корадикал группы G – наименьшая нормальная подгруппа G, факторгруппа по которой σ_i-замкнута.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *σ-локальным*, если $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ для некоторой H_σ-функции f. В частности, если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$, то $\mathfrak{F}$ называют *локальным* классом Фиттинга.

Основной результат работы представляет следующая

Теорема. *Каждый -локальный класс Фиттинга удовлетворяет гипотезе Локетта.*

Следствие 1. *Если* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *–* σ*-локальные классы Фиттинга, то для пересечения* $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ *справедлива гипотеза Локетта, т.е.* $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{E}_*$.

Следствие 2. *Если* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *–* σ*-локальные классы Фиттинга, то для произведения* $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$ *справедлива гипотеза Локетта, т.е.* $(\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H})_* = (\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{E}_*$.

В случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{p\}, \{q\}, \ldots\}$ – минимальное разбиение множества $\mathbb{P}$, получаем

Следствие 3 (Галлего, [6]). *Каждый локальный класс Фиттинга удовлетворяет гипотезе Локетта в универсуме* $\mathfrak{E}$ *всех групп.*

Следствие 4 (Воробьев, [5, теорема]). *Каждый локальный класс Фиттинга разрешимых групп удовлетворяет гипотезе Локетта.*

Следствие 5. *Для пары классов Фиттинга* $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{E}$ *справедлива гипотеза Локетта и гипотеза Лауэ, т.е.* $\mathfrak{S}_* = \mathfrak{S}^* \cap \mathfrak{E}_* = \mathfrak{S} \cap \mathfrak{E}_*$.

Заключение. В настоящей работе найдены семейства обобщенно локальных классов Фиттинга, для которых справедлива гипотеза Локетта.

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
2. Lockett, F.P. The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ / F.P. Lockett // Math. Z. – 1974. – Vol. 137, № 2. – P. 131–136.
3. Bryce, R.A. A problem in the Theory of Normal Fitting Classes / R.A. Bryce, J. Cossey // Math. Z. – 1975. – Vol. 141. – P. 99–110.
4. Beidleman, J.C. Über Fittingklassen und die Lockett-Vermuntung – J.C. Beidleman, P. Hauck // Math. Z. – 1979. – Vol. 167, № 2. – P. 161–167.
5. Воробьев, Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Мат. зам. – 1988. – Т. 43, № 2. – Р. 161–168.
6. Gallego, M.P. Fitting pairs from direct limits and the Lockett conjecture / M.P. Gallego // Comm. Algebra. – 1996. Vol. 24, № 6. – P. 2011–2023.
7. Pense, J. Fittingmengen und Lockettabschnitte / J. Pense // J. Algebra. – 1990. – Vol. 133, № 1. – P. 168–181.
8. Skiba, A.N. On one generalization of the local formations / A.N. Skiba // PFMT. – 2018. – no. 1(34). – P 79–82.
9. Skiba, A.N. A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra and Appl. – 2016. – Vol. 15, № 4. – P. 21–36.
10. Skiba, A.N. Some characterizations of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495. – P. 114–129.
11. Skiba, A.N. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2020. – Vol. 550. – P. 69–85.
12. Guo, W. On σ-local Fitting classes / W. Guo, L. Zhang, N.T. Vorob'ev // J. Algebra. – 2020. – Vol. 542, № 15. – P. 116–129.

О НАИМЕНЬШЕМ ОБОБЩЕННОМ σ-ЛОКАЛЬНОМ ЗАДАНИИ БЭРОВСКОЙ σ-ЛОКАЛЬНОЙ ФОРМАЦИИ

Н.Н. Воробьёв, А.В. Чечуев
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Все рассматриваемые группы конечны. Мы будем использовать терминологию из [1–5]. Пусть σ – разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т.е. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \cup_{i\in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$.

Группа G называется *σ-примарной*, если G является σ_i-группой для некоторого i. Главный фактор H/K группы G называется: *σ-центральным* (в группе G), если $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$ является σ-примарным; *σ_i-фактором*, если H/K является σ_i-группой. Группа G называется *обобщенной* $\{\sigma_i\}$*-нильпотентной*, если каждый главный σ_i-фактор группы G является σ-центральным.

Если n – натуральное число, то символ $\pi(n)$ обозначает множество всех его простых делителей; $\sigma(n)$ обозначает множество $\{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$; $\sigma(G) = \sigma(|G|)$ и $\sigma(\mathfrak{F}) = \cup_{G\in\mathfrak{F}} \sigma(G)$; $\sigma^+(G) = \{\sigma_i \mid G$ обладает главным фактором H/K таким, что $\sigma(H/K) = \{\sigma_i\}\}$, $\sigma^+(\mathfrak{F}) = \cup_{G\in\mathfrak{F}} \sigma^+(G)$. Символ $F_{\{g\sigma_i\}}(G)$ обозначает произведение всех нормальных обобщенных $\{\sigma_i\}$-нильпотентных подгрупп группы G. Напомним, что класс групп называется *формацией*, если он замкнут относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений.

Всякая функция f вида

$$f : \sigma \cup \{\emptyset\} \rightarrow \{\text{формации групп}\},$$

где $f(\emptyset) \neq \varnothing$, называется *обобщенной формационной σ-функцией* (см. [5]) и полагают

$BLF_\sigma(f) = (G \mid G/R_\sigma(G) \in f(\emptyset)$ и $G/F_{\{g\sigma_i\}}(G) \in f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma^+(G))$.