Подгруппа A группы G называется [7] σ-субнормальной, если существует такой ряд подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \ldots \leq A_n = G,$$

что либо A_{i-1} нормальна в A_i либо $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ является σ-примарной для всех $i = 1, \ldots, n$.

Класс групп $\mathfrak{F}_\sigma$ назовем σ-классом Фиттинга, если $\mathfrak{F}_\sigma$ замкнут относительно σ-субнормальных подгрупп и произведений σ-субнормальных $\mathfrak{F}_\sigma$-подгрупп, т.е. выполняются следующие два условия:

1) если $G \in \mathfrak{F}_\sigma$ и N – σ-субнормальная подгруппа группы G, то $N \in \mathfrak{F}_\sigma$;

2) если $N_1, N_2 \in \mathfrak{F}_\sigma$, N_i – σ-субнормальная подгруппа группы G для $i = 1, 2$ и $G = N_1N_2$, то $G \in \mathfrak{F}_\sigma$.

В случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\},\{3\},\ldots\}$ σ-класс Фиттинга является классом Фиттинга.

Из условия 2) следует, что в любой группе G существует подгруппа $G_{\mathfrak{F}_\sigma}$, порожденная σ-субнормальными $\mathfrak{F}_\sigma$-подгруппами группы G. Подгруппу $G_{\mathfrak{F}_\sigma}$ назовем $\mathfrak{F}_\sigma$-радикалом группы G.

Теорема 2. Если $\mathrm{Rad}_{\mathfrak{F}_\sigma}$ – отображение, которое группе $G \in \mathfrak{S}_\sigma$ сопоставляет её $\mathfrak{F}_\sigma$-радикал, то $\mathrm{Rad}_{\mathfrak{F}_\sigma}$ является сопряженным σ-разрешимым фиттинговым функтором.

1. Курош, А.Г. Радикалы колец и алгебр / А.Г. Курош // Матем. сб. – 1953. – Т. 33, № 1. – С. 13–26.
2. Amitsur, S.A. A general theory of radicals / S.A. Amitsur // Amer. J. Math. – 1952. – Vol. 74, № 4. – P. 774–786.
3. Amitsur, S.A. A general theory of radicals / S.A. Amitsur // Amer. J. Math. – 1954. – Vol. 76, № 1. – P. 100–125.
4. Baer, R. Classes of finite groups and their properties / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – Vol. 1. – P. 115–187.
5. Плоткин, Б.И. Радикалы в группах, операции на классах групп и радикальные классы / Б.И. Плоткин // Избранные вопросы алгебры и логики: сб., посв. памяти А.И. Мальцева / АН СССР. Сиб. отд-ние, Ин-т математики; под ред. А.И. Ширшова (гл. ред.). – Новосибирск: Наука, 1973. – С. 205–244.
6. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
7. Скиба, А.Н. О σ-свойствах конечных групп II / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 70–83.

О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ПОДГРУПП ФИШЕРА КОНЕЧНЫХ ЧАСТИЧНО РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Н.Т. Воробьёв, С.Н. Воробьёв, Т.Б. Караулова
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Все группы, рассматриваемые нами в данной работе, конечны. В терминологии и обозначениях мы следуем [1]. Фишером [2] в терминах радикальных классов определена подгруппа $F \in \mathfrak{F}$ группы G, которая содержит все нормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы каждой промежуточной группы между F и G. По предложению Хартли [3], такую подгруппу стали называть $\mathfrak{F}$-*подгруппой Фишера* G. В теории классов известна теорема Фишера [2] о том, что в любой конечной разрешимой группе для каждого радикального класса $\mathfrak{F}$, замкнутого относительно подгрупп вида PN, где P – силовская p-подгруппа и $N \trianglelefteq G \in \mathfrak{F}$, существуют $\mathfrak{F}$-подгруппы Фишера и сопряжены. Такой радикальный класс по предложению Хартли [3] называют классом Фишера, а подгруппу F – $\mathfrak{F}$-подгруппой Фишера группы G. В [3] доказано, что для класса Фишера $\mathfrak{F}$ в конечной разрешимой группе G $\mathfrak{F}$-подгруппа Фишера G – это в точности её $\mathfrak{F}$-инъектор. В свою очередь, Дарк [4] показал, что существуют разрешимые радикальные классы и разрешимые группы, для которых $\mathfrak{F}$-подгруппы Фишера не сопряжены и не являются $\mathfrak{F}$-инъекторами.

Основная цель настоящей работы – описать множества Фишера группы G, для которых ее множества $\mathfrak{F}$-инъекторов и $\mathfrak{F}$-подгрупп Фишера совпадают.

Материал и методы. В работе материалом для исследования является $\mathfrak{F}$-подгруппа Фишера частично разрешимой группы G. При исследовании использованы методы теории групп и теории классов групп.

Результаты и их обсуждение. Непустое множество $\mathcal{F}$ подгрупп группы G называется *фиттинговым множеством группы* G, если выполняются следующие условия: 1) если $T \trianglelefteq S \in \mathcal{F}$, то $T \in \mathcal{F}$; 2) если $S, T \in \mathcal{F}$ и $S, T \trianglelefteq ST$, то $ST \in \mathcal{F}$; 3) если $S \in \mathcal{F}$ и $x \in G$, то $S^x \in \mathcal{F}$. Заметим, что для непустого фиттингова множества $\mathcal{F}$ группы G подгруппа V – $\mathcal{F}$-инъектор G, если для каждой субнормальной подгруппы K группы G пересечение $V \cap K$ является F-максимальной подгруппой группы K.

Произведением $\mathrm{F} \odot \mathrm{X}$ *фиттингова множества* F *группы* G *и радикального класса* X называется множество подгрупп

$$\{H \leq G : H/H_{\mathrm{F}} \in \mathrm{X}\}.$$

Множество Фишера группы G – это такое фиттингово множество группы G, что из $L \leq G$, $K \trianglelefteq L \in \mathrm{F}$, $K \leq H \leq L$ и H/K – p-подгруппа L/K (p – простое число) всегда следует $H \in \mathrm{F}$.

Символом S обозначим класс всех разрешимых групп.

Заметим, что характеризация F-подгрупп Фишера для фиттинговых множеств частично разрешимой группы исследовалась С.Н. Воробьевым в работе [5]. Нами получено простое альтернативное доказательство результата [5]. Доказана

Теорема. *Пусть* F *– множество Фишера группы* G *и* $G \in \mathrm{F} \odot \mathrm{S}$. *Тогда подгруппа* V *группы* G *является* F*-подгруппой Фишера* G *тогда и только тогда, когда* V *является* F*-инъектором* G.

Следствие [2, 3]. *Если* F *– класс Фишера и* $\mathrm{F} \subseteq \mathrm{S}$, *то в* G *существуют* F*-подгруппы Фишера и любые две из них сопряжены.*

Заключение. В настоящей работе получено обобщение теоремы Фишера для случая частично разрешимой группы.

1. Doerk, K. Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992. – P. 891.
2. Fischer, B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen / B. Fischer // B. Habilitationsschrift, Universität Frankfurt. – 1966.
3. Hartley, B. On Fischer's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3(19), № 2. – P. 193– 207.
4. Dark, R. Some examples in the theory of injectors of finite soluble groups / R. Dark // Math. Z. – 1972. – Vol. 127. – P. 145–156.
5. Воробьев, С.Н. Инъекторы и подгруппы Фишера конечных групп / С. Н. Воробьёв // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя П. М. Машэрава. – 2013. – № 5 (77). – С. 36–42.

О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ σ-ЛОКАЛЬНЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

Н.Т. Воробьёв, С.Н. Воробьёв, А.С. Новикова
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Все исследования в работе проводятся в универсуме $\mathfrak{E}$ всех конечных групп. В терминологии и обозначениях мы следуем [1, 2]. В теории классов конечных групп известен результат Брайса-Косси [3] о том, что локальная формация разрешимых групп является классом Фиттинга в точности тогда, когда все значения ее канонической формационной функции классы Фиттинга. В связи с этим актуальным является поиск решения следующего дуального вопроса: *верно ли, что локальный класс Фиттинга является формацией тогда и только тогда, когда все значения его канонического задания формации?* Положительное решение указанного вопроса для обобщенно локальных классов Фиттинга (в частности, локальных классов Фиттинга) – основная цель настоящей работы.

Материал и методы. В работе используются методы теории групп и их классов. В частности, методы теории формаций групп и классов Фиттинга групп.

Результаты и их обсуждение. *Классом групп* называют совокупность групп, которая наряду с каждой группой содержит ей изоморфную. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия факторгрупп и подпрямых произведений, и $\mathfrak{F}$ называют *классом Фиттинга*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп.

Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то в любой группе G существует наибольшая нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа. Ее обозначают $G_{\mathfrak{F}}$ и называют $\mathfrak{F}$-радикалом G. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга. Тогда класс групп $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G : G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$ называется *произведением классов Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$. Хорошо известно, что произведение классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна (см. [1, теорема X.1.12]).