ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РОСТА

Е.В. Банюкевич
Гродно, ГрГУ имени Я. Купалы

Первоначально вейвлет-преобразование (далее ВП) определяется и рассматривается в пространстве квадратично интегрируемых функций, чему посвящено много работ [1–3]. В настоящее время вейвлет анализ позволяет успешно решать такие актуальные задачи как выделение периодичности, тренда, сезонных компонент и т.п., что продемонстрировано в работах [4], [5]. Теория вейвлетов активно используется в медицине, для сжатия записей ЭКГ холтеровского мониторинга [6], оценки умственной нагрузки [7] и множества других методов диагностики и исследований.

В математике продолжают строится новые вейвлет методики для решения все большего числа задач, к ним можно отнести: вычисления численных решений дифференциальных уравнений [8], решения результирующих связанных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с бесконечной областью [9], решение нелинейного интегро-дифференциального уравнения Вольтера с запаздыванием дробного порядка на пантографе [10].

Целью данной работы является изучение некоторых свойств ВП на пространстве обобщенных функций экспоненциального роста.

Материал и методы. В работе исследуются обобщенные функции экспоненциального роста, в частности их ВП. Определим данные термины.

Пусть E^a совокупность всех бесконечно дифференцируемых функций *f* на пространстве $\mathbb{R}$, удовлетворяющих условию

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+ \ \exists C > 0: \left| f^{(k)}(t) \right| \le Ce^{-at}, \ \forall t \in \mathbb{R}_+ .$$

То есть, E^a является подпространством C^∞ − пространства всех бесконечно дифференцируемых функций на пространстве $\mathbb{R}$. Объединив пространства E^a, для которых $a < c$, $a, c \in \mathbb{R}$, получим пространство $E_c = \bigcup\limits_{a<c} E^a$. Таким образом, обобщенной функцией экспоненциального роста на $\mathbb{R}$ степени *c* называется любой линейный непрерывный функционал на пространстве E_c, $c \in \mathbb{R}$. Совокупность всех обобщенных функций экспоненциального роста степени *c* образует сопряженное пространство E'_c.

Определение 1. ВП обобщенной функции экспоненциального роста *f* называется функция $W_\psi f(a,b)$ определяемая равенством [11, с. 132]

$$W_\psi f(a,b) = (f * \psi_{-a})(b),$$

где *f* − обобщенная функция экспоненциального роста, с помощью $\psi_{-a} \in D$ обозначили вейвлет $a^{-1}\psi(-t/a) \in D$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, *a* − параметр растяжения, *b* − параметр смещения.

Результаты и их обсуждение. В работах [11, 12] рассмотрены некоторые свойства ВП обобщенных функций экспоненциального роста, а именно: ВП производных обобщенной функции; ВП свертки двух обобщенных функций; ВП тензорного произведения двух обобщенных функций.

Но указанные свойства ранее не доказывались, приведем их доказательства.

Теорема 1. ВП производных обобщенной функции экспоненциального роста имеет вид

$$W_\psi(D^k f)(a,b) = (2\pi i\omega)^k W_\psi f(a,b).$$

Доказательство: Согласно определению ВП обобщенных функций экспоненциального роста и свойству преобразования Фурье для дифференцирования имеем

$$W_\psi(D^k f)(a,b)=(F(D^k f)(\omega),e^{2\pi i\omega b}\overline{F(\psi)(a\omega)})=\left((2\pi i\omega)^k F(f)(\omega),e^{2\pi i\omega b}\overline{F(\psi)(a\omega)}\right)=$$
$$=(2\pi i\omega)^k\left(F(f)(\omega),e^{2\pi i\omega b}\overline{F(\psi)(a\omega)}\right)=(2\pi i\omega)^k W_\psi f(a,b)$$

Теорема доказана.

Теорема 2. ВП свертки двух обобщенных функций экспоненциального роста есть произведение ВП этих обобщенных функций

$$W_\psi(f_1 * f_2)(a,b)=W_\psi f_1(a,b)W_\psi f_2(a,b).$$

Доказательство: Согласно определению ВП обобщенных функций экспоненциального роста, свойству преобразования Фурье для свертки и определению свертки двух обобщенных функций имеем

$$W_\psi(f_1 * f_2)(a,b)=(F(f_1(t)*f_2(s)),e^{2\pi i\omega b}\overline{F(\psi)(a\omega)})=$$
$$=\left(F(f_1)(\omega_1)F(f_2)(\omega_2),e^{2\pi i(\omega_1+\omega_2)b}\overline{F(\psi)(a(\omega_1+\omega_2))}\right)=$$
$$=\left(F(f_1)(\omega_1),e^{2\pi i\omega_1 b}\overline{F(\psi)(a\omega_1)}\right)\left(F(f_2)(\omega_2),e^{2\pi i\omega_2 b}\overline{F(\psi)(a\omega_1)}\right)=W_\psi f_1(a,b)W_\psi f_2(a,b),$$

где функция $F(\psi)(a(\omega_1+\omega_2))$ такая, что $F(\psi)(a(\omega_1+\omega_2))=F(\psi)(a\omega_1)+F(\psi)(a\omega_2)$.

Теорема доказана.

Теорема 3. ВП тензорного произведения двух обобщенных функций экспоненциального роста есть тензорное произведение ВП этих обобщенных функций

$$W_\psi(f_1\otimes f_2)(b_1,b_2)=W_\psi f_1(b_1)\otimes W_\psi f_2(b_2),$$

где коэффициент масштабирования *a* зафиксирован, $W_\psi f_1(b_1)$ и $W_\psi f_2(b_2)$ – частичные функции.

Доказательство:

$$W_\psi(f_1\otimes f_2)(a,b)=(F(f_1\otimes f_2),e^{2\pi i(\omega,b)}\overline{F(\psi)(a\omega)})=$$
$$=(F(f_1)\otimes F(f_2),e^{2\pi i(\omega,b)}\overline{F(\psi)(a\omega)})=\left(F(f_1),\left(F(f_2),e^{2\pi i(\omega,b)}\overline{F(\psi)(a\omega)}\right)\right)=$$
$$=\left(F(f_1),e^{2\pi i\omega_1 b_1}\overline{F(\psi)(a_1\omega_1)}\right)\otimes\left(F(f_2),e^{2\pi i\omega_2 b_2}\overline{F(\psi)(a_2\omega_2)}\right)=W_\psi f_1(b_1)\otimes W_\psi f_2(b_2).$$

Зафиксируем коэффициент масштабирования *a*, тогда полученное выражение примет вид

$$W_\psi(f_1\otimes f_2)(b_1,b_2)=W_\psi f_1(b_1)\otimes W_\psi f_2(b_2),$$

где $W_\psi f_1(b_1)$ и $W_\psi f_2(b_2)$ – частичные функции.

Теорема доказана.

Указанные выше свойства планируется использовать для дальнейшего развития теории ВП обобщенных функций экспоненциального роста, в частности для построения обратного ВП для восстановления обобщенной функции экспоненциального роста.

Заключение. В работе доказаны следующие свойства ВП обобщенных функций экспоненциального роста: ВП производных обобщенной функции; ВП свертки двух обобщенных функций; ВП тензорного произведения двух обобщенных функций

1. Новиков, И.Я. Теория всплесков / И.Я. Новиков, В.Ю. Протасов, М.А. Скопина. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 616 с.
2. Блаттер, К. Вейвлет-анализ. Основы теории / К. Блаттер. – Москва: ЗАО «РИЦ» Техносфера», 2004. – 280 с.
3. Дейцева, А.Г. Приближение оператора дифференцирования в базисе периодических койфлетов / А.Г. Дейцева // Актуальные проблемы математики и компьютерного моделирования: сб. научн. тр., Гродно, 18–22 июня 2007 г. / ГрГУ им. Я. Купалы; редкол.: Ю.М. Вувуникян (отв. ред.) [и др.]. – Гродно, 2007. – С.175–179.
4. Marchuet, D. Wavelet Frequency Tensor applied to temporary environments in discrete spaces to obtain mobility patterns. Use case in the detection of routes in a territory [Электронный ресурс] / D. Marchuet, J. Palanca, V. Botti // Engineering Applications of Artificial Intelligence. – 2021. – Vol. 106. – Режим доступа: https://doi.org/10.1016/j.engappai.2021.104507. – Дата доступа: 22.01.2022.
5. Cheng, V.Y.S. Effects of hydrological forcing on short- and long-term water level fluctuations in Lake Huron-Michigan: A continuous wavelet analysis [Электронный ресурс] / V.Y.S. Cheng, A. Saber, C.A. Arnillas, A. Javed, A. Richards, G.B. Arhonditsis // Journal of Hydrology. – 2021. – Режим доступа: https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2021.127164. – Дата доступа: 20.01.2022.
6. Kolekara, M.H. ECG Data Compression Using Modified Run Length Encoding of Wavelet Coefficients for Holter Monitoring . IRBM 9 [Электронный ресурс] / M.H. Kolekara, C.K. Jha, P.Kumar // – 2021. Режим доступа: https://doi.org/10.1016/j.irbm.2021.10.001. – Дата доступа: 12.01.2022.
7. Tugba, A. Sequential forward mother wavelet selection method for mental workload assessment on N-back task using photoplethysmography signals [Электронный ресурс] / A. Tugba, M. Şahin, O. Aydemir // Infrared Physics & Technology. – 2021. –Vol. 119. – Режим доступа: https://doi.org/10.1016/j.infrared.2021.103966. – Дата доступа: 12.01.2022.

8. Boonrod, Y. Legendre wavelet method for fractional delay differential equations [Электронный ресурс] / Y. Boonrod, M. Razzaghi, N.V. Thieu // Applied Numerical Mathematics. – 2021. – Vol. 168. – P. 127–142. – Режим доступа: https://doi.org/10.1016/j.apnum.2021.05.024. – Дата доступа: 12.01.2022.

9. Vishwanath, B.A. Haar wavelet scrutinization of heat and mass transfer features during the convective boundary layer flow of a nanofluid moving over a nonlinearly stretching sheet [Электронный ресурс] / B.A. Vishwanath, M.K.N.A. Wakif // Partial Differential Equations in Applied Mathematics. – 2021. – Vol. 4. – Режим доступа: https://doi.org/10.1016/j.padiff.2021.100192. – Дата доступа: 12.01.2022.

10. Behera, S. An efficient numerical method based on Euler wavelets for solving nonlinear fractional order pantograph Volterra delay-integro-differential equations [Электронный ресурс] / S. Behera, S.S. Ray // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2021. – Режим доступа: https://doi.org/10.1016/j.cam.2021.113825. – Дата доступа: 10.01.2022.

11. Банюкевич, Е.В. Свойства вейвлет-преобразования обобщенных функций экспоненциального роста / Е.В. Банюкевич // Системы компьютерной математики и их приложения. Вып. 18: материалы XVIII Междунар. науч. конф., посвященной 70-летию В.И. Мунермана, Смоленск, 19–21 мая 2017 г. – Смоленск: СмолГУ, 2017. – С. 131–133.

12. Банюкевич, Е.В. Вейвлет-преобразование обобщенных функций экспоненциального роста и их применение к решению уравнений теплопроводности / Е.В. Банюкевич // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2019. – Т. 9. – № 1. – С. 45–55.

РАССЕЯНИЕ ФОТОНОВ ПРИ ТУННЕЛИРОВАНИИ ЧЕРЕЗ НАНОТРУБКУ

Ю.И. Бохан
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Современный уровень развития нанотехнологий позволяет создания электронных устройств, таких как. резонансно-туннельные диоды (РТД) [1]. Такие устройства позволяют создавать устройства на терагерцовый диапазон электромагнитного спектра, ранее труднодоступный из-за промежуточности спектра. Обычно создание РТД базируется на технологии производства гетероструктур, которая достаточно разработана [2].

В тоже время не менее широко применяется технология создания углеродных наноструктур, таких как фуллерены, нанотрубки и т.п. [3]. В таких структурах возможно создание квантовых ям и барьеров с цилиндрической симметрией (рис. 1.). Такие структуры могут быть использованы как РТД путем размещения на оси трубки различных ионов.

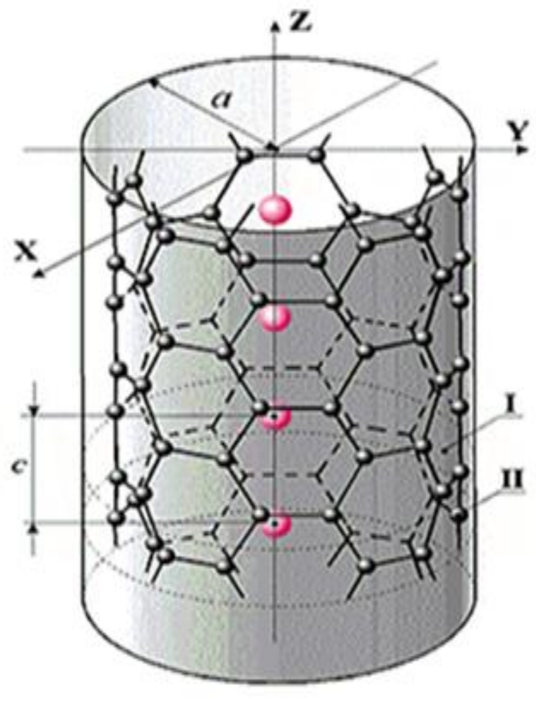

Рисунок 1 – Легированная металлом (цветные шарики) углеродная нанотрубка внутри цилиндрического потенциального барьера.
I – область постоянного межатомного потенциала, II – область атомного потенциала [3].