Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра геометрии и математического анализа

С.А. Шлапаков, С.М. Бородич

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Методические рекомендации

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2013

УДК 517.51(075.8)
ББК 22.161.54я73
Ш68

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 6 от 21.02.2013 г.

Авторы: заведующий кафедрой геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **С.А. Шлапаков;** старший преподаватель кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова **С.М. Бородич**

Рецензент:
доцент кафедры информатики и информационных технологий ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент *А.И. Бочкин*

Шлапаков, С.А.
Ш68 Теория функций действительного переменного : методические рекомендации / С.А. Шлапаков, С.М. Бородич. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2013. – 51 с.

Излагается учебный материал, сопровождающийся демонстрационными примерами, которые формируют практические навыки, что способствует качественному его усвоению. Предназначается для студентов специальностей физико-математического профиля.

УДК 517.51(075.8)
ББК 22.161.54я73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Теория функций действительного переменного» играет важнейшую роль в системе математической подготовки преподавателей математики и физики. Это и естественно, так как основные понятия и методы теории функций являются в настоящее время необходимым элементом математического образования каждого грамотного математика.

Изучение этой учебной дисциплины вооружит будущих преподавателей математики строгими обоснованиями изученного ими курса математического анализа. К тому же они получат ряд сведений, касающихся современных представлений о таких важных для преподавания и изучения математики понятиях, какими являются множество, число, функция, предел, интеграл. Наряду с этим, студенты ознакомятся с рядом новых для них вопросов, изучение которых необходимо для их будущей созидательной работы в качестве преподавателя математики: элементарными сведениями из теории множеств, сравнением бесконечных множеств, строением линейных множеств, сведениями об обобщении как методе исследования на примере теории интеграла Лебега.

Методические рекомендации по своей сути являются кратким изложением первой части учебной дисциплины «Теория функций», вторая же часть дисциплины отражена в методическом пособии «Теория функций комплексного переменного», изданном ранее. Рекомендации предназначены в первую очередь студентам, обучающимся по специальности 02 05 03 Математика. Дополнительная специальность, хотя окажутся весьма полезными всем тем, кто желает систематизировать и углубить свои знания в соответствующей области математики. Они особенно необходимы студентам заочной формы обучения, так как часть учебного материала читаемого курса выносится на самостоятельное изучение.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МНОЖЕСТВАХ

1.1. Основные операции над множествами

В окружающей нас действительности мы наблюдаем как отдельные предметы (автомобиль, книга, дерево), так и их совокупности или множества (множество книг в библиотеке, множество деревьев в лесу). Однако можно представить себе совокупности или множества более абстрактного содержания, как например, множество определенным образом подобранных чисел, множество векторов, множество функций определенного вида. Понятие совокупности или множества не принадлежит к таким, которые определяются через другие более простые понятия. Поэтому понятие множества является первичным. Говоря о некотором множестве, мы называем его элементами те предметы или объекты, из которых оно составлено.

Множества принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита, при необходимости снабжая их индексами, например, A, D, F_1, G_2. Пусть A – некоторое множество. Тот факт, что элемент a принадлежит множеству A, обозначают символически так: $a \in A$. Если элемент a не из множества A, то это обозначается следующим образом: $a \notin A$. Далее будем рассматривать два множества A и B.

Определение 1.1.1. Если каждый элемент множества B входит также и во множество A, то говорят, что B есть часть или подмножество множества A. Символически это записывают так: $B \subset A$.

Например, множество всех натуральных чисел N является подмножеством множества всех рациональных чисел Q, а последнее в свою очередь является подмножеством множества всех действительных чисел R, т.е. $N \subset Q \subset R$.

Замечание 1.1.1. Соотношение $B \subset A$ не исключает и совпадения B с A, т.е. само множество A включается в число его подмножеств.

Определение 1.1.2. Множества A и B считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов. Сей факт обозначают так: $A = B$.

Замечание 1.1.2. Ясно, что если относительно двух множеств A и B установлено, что одновременно $B \subset A$ и $A \subset B$, то это и означает, что $A = B$.

Обычно множества определяются указанием какого-нибудь признака, по которому относительно произвольного объекта можно судить, входит он в данное множество или нет. Этот признак называется характеристическим свойством, например, в геометрии в качестве него выступает геометрическое место точек. Если хотят показать, что множество P состоит из элементов определенного вида x, то записывают: $P = \{x\}$. Конечное множество, т.е. множество, количество элементов которого выражено некоторым числом (это число может быть как известным, так и неизвестным, важно лишь существование такого числа), может быть задано перечислением всех его элементов. Например, $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Однако иногда, определяя какое-нибудь множество, мы можем еще не знать, содержит ли это множество по крайней мере один элемент. К примеру, нас может интересовать множество действительных корней того или иного алгебраического уравнения, но дальнейшее исследование может показать, что данное уравнение совсем не имеет действительных корней. В связи с этим вводится понятие пустого множества.

Определение 1.1.3. Пустым называют множество, не содержащее ни одного элемента. Пустое множество обозначают символом $\varnothing$. Запись $A=\varnothing$ говорит о том, что *A* пустое множество.

Замечание 1.1.3. Пустое множество считается подмножеством любого множества.

Рассмотрим операции над множествами, которые приводят к образованию новых множеств.

Определение 1.1.4. Объединением (суммой) двух множеств *A* и *B* называется множество, обозначаемое $A\cup B$, которое состоит из всех элементов, входящих по крайней мере в одно из множеств *A* или *B*, т.е. $A\cup B=\{c \mid c\in A \text{ или } c\in B\}$.

Аналогичным образом определяется объединение любого количества множеств. При этом, если заданные множества обозначены A_α (значок α при этом может пробегать какое угодно множество, причем это не обязательно порядковый номер), то их сумма обозначается так: $\bigcup_\alpha A_\alpha$. По определению эта сумма состоит из всех элементов, входяших по крайней мере в одно из множеств A_α. Суммирование при этом распространяется на все значения, которые α может принимать в рассматриваемой задаче. То же относится и к вводимому ниже знаку пересечения.

Пример. Пусть для каждого действительного числа *x* множество A_x состоит из всех точек плоскости, имеющих заданную абсциссу *x*. Тогда сумма $\bigcup_x A_x$ есть совокупность всех точек плоскости, т.е. $\bigcup_x A_x=\{(x, y) \mid x\in R,\, y\in R\}$.

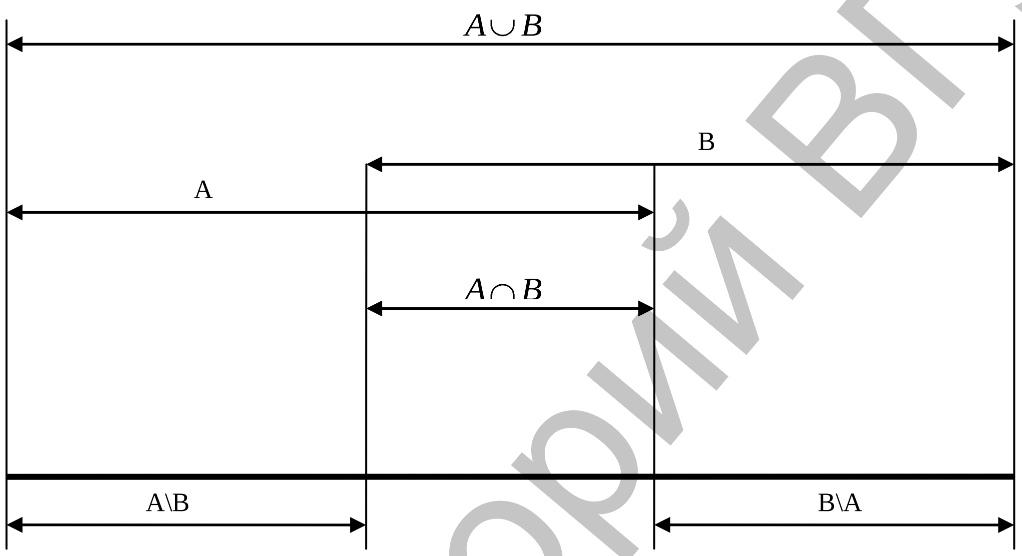
Определение 1.1.5. Пересечением (произведением) двух множеств *A* и *B* называется множество, обозначаемое $A\cap B$, состоящее из всех элементов, которые входят как в *A*, так и в *B*, т.е. $A\cap B=\{c \mid c\in A \text{ и } c\in B\}$.

Аналогично определяется пересечение $\bigcap_\alpha A_\alpha$ любого количества множеств A_α: это есть множество всех элементов, входящих в каждое A_α. Ясно, что если $B\subset A$, то $A\cup B=A,\quad A\cap B=B.$

Определение 1.1.6. Разностью множеств A и B называется множество, обозначаемое символом $A \setminus B$, которое состоит из всех элементов A, не входящих в B.

Замечание 1.1.4. 1) В определении разности $A \setminus B$ не требуется, чтобы $B \subset A$. 2) Нетрудно проверить, что $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$. Если $B \subset A$, то $(A \setminus B) \cup B = A$.

Определения 1.1.4 – 1.1.6 можно проиллюстрировать следующим образом:



Сформулируем теперь теорему, выражающую связь между операциями объединения и пересечения множеств, которая носит название дистрибутивного закона.

Теорема 1.1.1. Для любого множества слагаемых справедливы равенства:

$$\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right) \cap B = \bigcup_\alpha \left(A_\alpha \cap B\right), \qquad (1.1.1)$$

$$\left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right) \cup B = \bigcap_\alpha \left(A_\alpha \cup B\right). \qquad (1.1.2)$$

Доказательство. Доказывать будем первое равенство, второе устанавливается аналогично. Равенство (1.1.1.) установим с помощью двух противоположных включений.

Пусть $x \in \left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right) \cap B$, тогда $x \in \left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right)$ и $x \in B$. Значит $x \in A_{\alpha_0}$ при некотором α_0, тогда $x \in A_{\alpha_0} \cap B$, и следовательно, $x \in \bigcup_\alpha \left(A_\alpha \cap B\right)$. Тем самым доказано включение $\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right) \cap B \subset \bigcup_\alpha \left(A_\alpha \cap B\right)$.

Обратно, пусть $x \in \bigcup_\alpha \left(A_\alpha \cap B\right)$. Тогда $x \in A_{\alpha_0} \cap B$ при некотором α_0, а значит, $x \in A_{\alpha_0}$, и следовательно, $x \in \bigcup_\alpha A_\alpha$; кроме того, $x \in B$. Тем самым $x \in \left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right) \cap B$. Таким образом, $\bigcup_\alpha (A_\alpha \cap B) \subset \left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right) \cap B$ и справедливо равенство (1.1.1).

▲

<u>Замечание 1.1.5.</u> Хорошим дополнением к формулам (1.1.1) и (1.1.2) видятся следующие равенства:

1) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$; (1.1.3)

2) если $A = \bigcup_\alpha A_\alpha$, а B – произвольное множество, то

$$(A \setminus B) = \left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right) \setminus B = \bigcup_\alpha (A_\alpha \setminus B). \qquad (1.1.4)$$

<u>Определение 1.1.7.</u> Пусть A – некоторое множество, $B \subset A$. Тогда множество $A \setminus B$ называется *дополнением к множеству B относительно множества A.*

Ясно, что дополнением к множеству $A \setminus B$ является само множество *B*. Например, дополнением к множеству всех рациональных чисел относительно совокупности всех действительных чисел будет множество всех иррациональных чисел. Важнейшее свойство дополнений характеризует следующее утверждение.

<u>Теорема 1.1.2.</u> Если B_α – произвольные подмножества множества *A* (*α* пробегает некоторое множество индексов), а C_α – их дополнения, т.е. $C_\alpha = A \setminus B_\alpha$, то справедливы следующие равенства:

$$A \setminus \left(\bigcup_\alpha B_\alpha\right) = \bigcap_\alpha C_\alpha, \qquad (1.1.5)$$

$$A \setminus \left(\bigcap_\alpha B_\alpha\right) = \bigcup_\alpha C_\alpha. \qquad (1.1.6)$$

Доказательство. Докажем первую из формул, вторая доказывается аналогично. Пусть $x \in A \setminus (\bigcup_\alpha B_\alpha)$. Тогда $x \in A$, но $x \notin \bigcup_\alpha B_\alpha$, и значит, $x \notin B_\alpha$ ни при каком *α*. Следовательно, $x \in C_\alpha$ при всех *α*, т.е. $x \in \bigcap_\alpha C_\alpha$. Таким образом, $A \setminus (\bigcup_\alpha B_\alpha) \subset \bigcap_\alpha C_\alpha$.

Обратно, пусть $x \in \bigcap_\alpha C_\alpha$. Это значит, что $x \in C_\alpha$ при всех *α*. Следовательно, $x \in A$, но $x \notin \bigcup_\alpha B_\alpha$, и поэтому $x \in A \setminus \bigcup_\alpha B_\alpha$. Значит, выполняется включение $\bigcap_\alpha C_\alpha \subset A \setminus \bigcup_\alpha B_\alpha$ и равенство (1.1.5) доказано.

▲

1.2. Эквивалентные множества. Мощность множества

Некоторые множества можно легко сравнивать между собой в количественном отношении, т.е. по числу содержащихся в них элементов. Осуществить такое сравнение можно как с помощью непосредственного подсчета числа элементов, так и без него.

Пример. Сравнение числа студентов, пришедших в аудиторию, с числом имеющихся там стульев.

Непосредственный подсчет числа элементов, очевидно, теряет смысл при переходе к бесконечным множествам.

Определение 1.2.1. Пусть даны два множества A и B. Будем говорить, что между их элементами установлено *взаимно однозначное соответствие*, если указано правило, назовем его f, по которому каждому элементу $a \in A$ соответствует один элемент $b = f(a) \in B$, называемый образом элемента a, причем должны выполняться следующие 2 условия:

а) любым двум разным элементам a_1 и a_2 из множества A соответствуют различные элементы $b_1 = f(a_1)$ и $b_2 = f(a_2)$ из множества B, символически это будем записывать так:

$$\forall a_1, a_2 \in A, \quad a_1 \neq a_2 \quad \Rightarrow \quad b_1 = f(a_1) \neq b_2 = f(a_2), \quad b_1, b_2 \in B;$$

б) каждый элемент $b \in B$ является образом некоторого элемента $a \in A$ (элемент a называется прообразом элемента b), символически это будем записывать так: $\forall b \in B \quad \exists a \in A, \quad f(a) = b$.

Определение 1.2.2. Два множества A и B называются эквивалентными, если между их элементами может быть установлено взаимно однозначное соответствие; обозначение: $A \sim B$.

Определение 1.2.3. Пусть дано произвольное множество A. Рассмотрим наряду с A совокупность всех множеств, эквивалентных A. Такая совокупность называется *классом эквивалентных между собой множеств.*

Характеризуя общую количественную составляющую множеств из одного класса эквивалентности, приходим к понятию *мощности множества*.

Определение 1.2.4. Мощностью или *кардинальным числом* множества A называется соответствующий ему класс эквивалентности. Мощность множества A обозначается символом $|A|$.

Замечание 1.2.1. Понятие мощности обобщает понятие количества (числа) элементов на все множества, включая бесконечные.

Эквивалентные между собой множества называют также *равномощными*. Равномощность множеств A и B обозначается символически следующим образом: $|A| = |B|$.

Что касается конечных множеств, то их мощности определяются числами, выражающими количества элементов в них. Ясно, что два конечных множества эквивалентны тогда и только тогда, когда они состоят из одного и того же количества элементов. Рассмотрим примеры эквивалентных между собой бесконечных множеств.

Пример 1. Множество N всех натуральных чисел эквивалентно множеству Z_- всех целых отрицательных чисел. Взаимно однозначное соответствие получается с помощью формулы: $f(n) = -n$, $n \in N$.

Пример 2. Множество N всех натуральных чисел эквивалентно множеству Z_2 всех четных положительных чисел. Взаимно однозначное соответствие получается с помощью формулы: $f(n) = 2n$, $n \in N$.

Таким образом, $N \sim Z_2$, но при этом $Z_2 \subset N$. Этот пример показывает, что бесконечное множество может быть эквивалентно своей части в собственном смысле, т.е. части, отличной от всего множества. Среди конечных множеств такого не бывает.

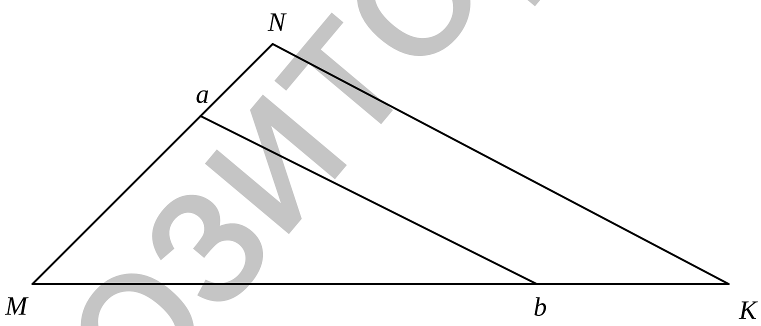
Пример 3. Множество R всех действительных чисел эквивалентно множеству R_1 всех действительных чисел из интервала $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Эквивалентность $R \sim R_1$ можно установить, например, с помощью соответствия: $f(x) = tg\, x$, $x \in R_1$.

Пример 4. Множество N всех натуральных чисел эквивалентно множеству Z всех целых чисел. Взаимно однозначное соответствие получается с помощью формулы:

$$f(n) = (-1)^n \left[\frac{n}{2}\right],\ n \in N,$$

где $[x]$ – целая часть числа x.

Пример 5. Пусть MNK – произвольный треугольник. A и B – множества всех точек на сторонах MN и MK соответственно. Беря произвольную точку $a \in A$, проводим из нее прямую, параллельную NK. Точку b, получаемую в пересечении этой прямой с MK, принимаем за образ точки a. Такое соответствие между множествами A и B будет, очевидно, взаимно однозначным. Следовательно, $A \sim B$.



Замечание 1.2.2. В качестве MN и MK могут выступать отрезки любой длины. Таким образом, любые два отрезка эквивалентны (как множества точек) независимо от соотношений между их длинами. К слову, если $[a, b]$ и $[c, d]$ – произвольные отрезки, то взаимно однозначное соответствие между множествами их точек x и y можно задать, например, с помощью формулы:

$$y = \frac{d-c}{b-a}(x-a)+c,\ \ x \in [a,b],\ y \in [c,d]. \qquad (1.2.1)$$

Справедливыми оказываются следующие утверждения, которые мы примем без доказательства.

Теорема 1.2.1. Если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$.

Теорема 1.2.2 (о мощности промежуточного множества). Если $A \supset A_1 \supset A_2$ и $A \sim A_2$, то $A \sim A_1$.

Теореме 1.2.3 (Кантор–Бернштейн). Если каждое из двух данных множеств эквивалентно некоторой части другого, то данные множества эквивалентны.

1.3. Счетные множества

Среди бесконечных множеств выделим те, которые в некоторых отношениях оказываются наиболее простыми (их свойства во многом напоминают свойства конечных множеств).

Определение 1.3.1. Множество A называется *конечным*, если оно равномощно множеству $\{1, 2, \ldots, n\}$ для некоторого $n \in \mathbf{N}$. Мощность такого множества идентифицируют с количеством его элементов: $|A| = n$.

Определение 1.3.2. Множество A называется *бесконечным*, если оно не является конечным.

Определение 1.3.3. Множество называется *счетным*, если оно эквивалентно множеству всех натуральных чисел $\mathbf{N}$. Мощность счётного множества обозначается $\aleph_0$.

Определение 1.3.4. Множество A называется *не более чем счётным*, если оно конечно или счётно.

Определение 1.3.5. Множество A называется *несчётным*, если оно бесконечно и не является счётным.

Если $\mathbf{N}$ – множество всех натуральных чисел, и A – произвольное числовое множество, причем $A \sim \mathbf{N}$, то существует взаимно однозначное соответствие между элементами этих множеств: $x_n = f(n)$. Тем самым можно считать, что каждому числу $x_n \in A$ сопоставлен номер $n \in \mathbf{N}$. Таким образом, элементы множества A могут быть расположены в виде бесконечной последовательности чисел x_n (числовая последовательность).

Замечание 1.3.1. Счетные множества могут быть охарактеризованы как такие бесконечные множества, элементы которых можно перенумеровать с помощью всех натуральных чисел. Мощность счетного множества называется *счетной мощностью*.

Перейдем к рассмотрению основных свойств счетных множеств.

Теорема 1.3.1. Из всякого бесконечного множества можно выделить счетное подмножество.

Доказательство. Пусть A – бесконечное множество. Возьмем любой его элемент и обозначим его a_1. Поскольку множество A является бесконечным, то берем из него еще один элемент и обозначаем его a_2. Поступая так и далее, получаем последовательность занумерованных элементов, т.е. счетное множество.

▲

Теорема 1.3.2. Всякое бесконечное подмножество счетного множества является счетным.

Доказательство. Пусть $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ – заданное счетное множество, $B=\{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots\}$ – бесконечное его подмножество. Располагая в порядке возрастания номеров все элементы множества *B*, мы сможем заново их перенумеровать всеми натуральными числами, взятыми по порядку (в качестве нового номера будет выступать индекс *k*). Следовательно, *B*– счетное множество.

▲

Теорема 1.3.3. Сумма конечного числа счетных множеств есть счетное множество.

Доказательство. Пусть $A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, где A_i– счетные множества. Выпишем элементы множеств A_i в виде следующей таблицы:

$$A_1:\ a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1k}, \ldots$$
$$A_2:\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2k}, \ldots$$
$$A_3:\ a_{31}, a_{32}, \ldots, a_{3k}, \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n:\ a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nk}, \ldots$$

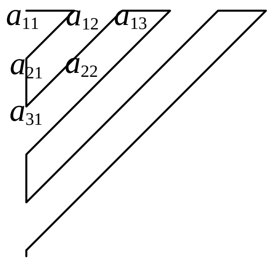
Нумеровать элементы таблицы будем по столбцам: сначала занумеруем элементы первого столбца, за ним – все элементы второго столбца и т.д. Если множества A_i содержат некоторые общие элементы, то нумеровать будем их один раз, например, когда он впервые встретится. Таким образом, элементы множества *A* оказываются занумерованными, т.е. множество *A* является счетным.

▲

Теорема 1.3.4. Сумма счетного множества счетных множеств является счетным множеством.

Доказательство. Пусть $A=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, где A_i– счетные множества. Выпишем элементы множеств A_i в виде таблицы, аналогичной ранее построенной, но она уже будет содержать бесконечное множество строк. Элементы такой таблицы можно занумеровать, например, по диагоналям.

$$A_1:\ a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1k}, \ldots$$
$$A_2:\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2k}, \ldots$$
$$A_3:\ a_{31}, a_{32}, \ldots, a_{3k}, \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n:\ a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nk}, \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$



При этом повторяющиеся элементы нумеруются по одному разу, как и в доказательстве предыдущей теоремы.

▲

<u>Замечание 1.3.1.</u> Если некоторые из множеств A_i являются конечными, то это не помешает нумерации по предложенной в доказательстве схеме. Если же все складываемые множества A_i будут конечными, то их сумма может быть или конечной или счетной.

<u>Теорема 1.3.5.</u> Множество *Q* всех рациональных чисел является счетным множеством.

Доказательство. Как известно, всякое рациональное число, отличное от нуля, представимо в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где $n \in N,\ m \in Z$. При фиксированном *n* количество всех дробей A_n, указанного выше вида, будет являться счетным множеством. Тогда множество

$$Q = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup \{0\}$$

будет счетным.

▲

<u>Теорема 1.3.6.</u> Если $A = B \cup C$, где *B* – любое бесконечное множество, а множество *C* является конечным или счетным, то *A*~*B*.

1.4. Множества мощности континуума

Счетными множествами далеко не исчерпываются все бесконечные множества. По своей сути счетные множества – это “наименьшие“ из всех бесконечных множеств. Покажем теперь, что существуют бесконечные несчетные множества.

<u>Теорема 1.4.1.</u> Множество всех действительных чисел, содержащихся на отрезке $[0, 1]$ несчетно.

Доказательство. От противного. Допустим, что все числа отрезка $[0, 1]$ могут быть как-то перенумерованы: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Разделим отрезок $[0, 1]$ на три равные части и из трех полученных отрезков выбираем тот (обозначим его $[a_1, b_1]$), который не содержит точку x_1. Отрезок $[a_1, b_1]$ снова делим на три равные части и берем из них такой отрезок $[a_2, b_2]$, который не содержит x_2. Продолжая так и далее, получим последовательность отрезков $[a_n, b_n]$, каждый из которых, начиная со второго, составляет третью часть от предыдущего, причем $x_n \notin [a_n, b_n]$ ни при каком *n*. По теореме о вложенных отрезках существует точка (число) *c*, общая для всех отрезков $[a_n, b_n]$. Поскольку $0 \le c \le 1$, а мы предположили, что все числа из отрезка $[0, 1]$ перенумерованы, то $c = x_n$ при некотором n. Но тогда, по построению, $c \notin [a_n, b_n]$ при этом n и мы приходим к противоречию.

▲

<u>Определение 1.4.1.</u> Будем говорить, что множество A имеет мощность континуума (сокращенно – мощность **c**), если оно эквивалентно множеству всех действительных чисел из отрезка $[0,1]$.

<u>Замечание 1.4.1.</u> Отметим, что любой промежуток с концами a и b (при $a \neq b$) имеет мощность **c**. В самом деле, эквивалентность отрезков $[0,1]$ и $[a,b]$ можно установить с помощью формулы (1.2.1), которая в данном случае имеет вид:

$$y = a + (b - a)x .$$

Если же из отрезка $[a,b]$ удалить одну или обе граничные точки, то по теореме 1.3.6 снова получается множество мощности **c**. В частности множество всех действительных чисел имеет мощность **c**, как и множество иррациональных чисел.

<u>Теорема 1.4.2.</u> Сумма конечного или счетного множества множеств мощности **c** также имеет мощность **c**.

Доказательство. Пусть множество A имеет вид

$$A = \bigcup_n A_n , \tag{1.4.1}$$

где индекс n пробегает конечное или счетное множество, а каждое из множеств A_n имеет мощность **c**. Ограничимся рассмотрением случая, когда слагаемые попарно не пересекаются. Для каждого n зададимся промежутком $[n-1, n)$. Так как промежуток имеет мощность **c**, то $A_n \sim [n-1, n)$. Тогда $A \sim \bigcup_n [n-1, n)$, где операция объединения распространяется на те же значения n, что и в формуле (1.4.1). Если в формуле (1.4.1) конечное число слагаемых, например, p, то $A \sim [0, p)$. Если же слагаемых бесконечное множество, т.е. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, то $A \sim [0, +\infty)$. В обоих случаях множество A оказывается эквивалентным некоторому промежутку и, следовательно, A имеет мощность **c**.

▲

<u>Замечание 1.4.2.</u> Если даны два множества A и B, причем $A \sim B_1 \subset B$, то не исключена возможность того, что $A \sim B$. Однако, если $A \sim B_1 \subset B$, но A не эквивалентно B, то говорят, что мощность множества A меньше мощности множества B. Согласно этому определению мощность счетного множества меньше мощности любого несчетного множества, в частности, меньше мощности **c**. С другой стороны, можно доказать, что мощности любых двух множеств сравнимы между собой в том смысле, что либо они равны, либо одна из них меньше другой. Таким образом, по отношению к любому множеству можно утверждать,

что его мощность или равна **c**, или больше **c**, или меньше **c**. Однако вопрос о том, существуют ли на самом деле несчетные множества, мощность которых меньше **c**, остается до сих пор открытым. Предположение, что таких множеств нет, т.е. что **c** – наименьшая из мощностей несчетных множеств, носит название гипотезы континуума.

1.5. Замкнутые линейные множества

Далее будем рассматривать множества точек, лежащих на числовой прямой, – так называемые линейные множества.

<u>Определение 1.5.1.</u> Пусть *E* – линейное множество. Точка x_0 называется предельной точкой множества *E*, если всякий интервал, содержащий эту точку, содержит хотя бы одну точку множества *E*, отличную от точки x_0.

<u>Замечание 1.5.1.</u> 1) Точка x_0 может принадлежать множеству *E*, а может и не принадлежать ему.

2) Если $x_0 \in E$, но не является его предельной точкой, то x_0 – изолированная точка множества *E*.

3) Если x_0 – предельная точка множества *E*, то всякий интервал, содержащий эту точку, содержит также и бесконечное множество точек из *E*.

К понятию предельной точки можно подойти и с иной точки зрения, используя определение предела числовой последовательности.

<u>Теорема 1.5.1.</u> Точка x_0 будет предельной точкой множества *E* тогда и только тогда, когда из этого множества можно будет выделить последовательность различных точек $x_n \in E$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Доказательство. Пусть x_0 – предельная точка множества *E*. Рассмотрим интервал $(x_0 - 1, x_0 + 1)$ и выберем в нем точку $x_1 \in E,$ причем $x_1 \neq x_0$. Затем в интервале $\left(x_0 - \frac{1}{2},\ x_0 + \frac{1}{2}\right)$ выбираем точку $x_2 \in E,$ отличную от x_0 и x_1. И так далее. На *n*-ом шаге процесса мы выбираем в интервале $\left(x_0 - \frac{1}{n},\ x_0 + \frac{1}{n}\right)$ точку x_n, отличную от ранее выбранных. В результате из множества *E* выделена последовательность, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Обратно. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $x_n \in E$. Тогда в интервале $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$ будет находиться бесконечно много точек множества *E*, т.е. x_0 – предельная точка множества *E*.

▲

<u>Замечание 1.5.2.</u> Теорема позволяет переформулировать понятие предельной точки: x_0 является предельной точкой множества *E*,

если из этого множества можно выделить последовательность x_n таких различных точек, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

<u>Теорема 1.5.2</u> (Больцано–Вейерштрасс). Всякое бесконечное ограниченное множество *E* имеет хотя бы одну предельную точку.

Доказательство. В силу ограниченности множества *E* найдется отрезок $[a, b]$ такой, что $E \subset [a, b]$. Положим $c = \dfrac{a+b}{2}$ и рассмотрим отрезки $[a, c]$ и $[c, b]$. Очевидно, что хотя бы один из них содержит бесконечное множество точек из *E*. Берем такой отрезок и обозначим его $[a_1, b_1]$. Положим $c_1 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$. Обозначим через $[a_2, b_2]$ тот из отрезков $[a_1, c_1]$ и $[c_1, b_1]$, который содержит бесконечное множество точек из *E*. Продолжая процесс так и далее, получаем последовательность вложенных отрезков $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$, каждый из которых содержит бесконечно много точек из множества *E*, причем

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0, \ n \to \infty. \qquad (1.5.1)$$

По теореме о вложенных отрезках существует единственная точка x_0, которая является общей для всех отрезков, при этом $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = x_0$.

Покажем, что x_0 является предельной точкой множества *E*. Из формулы (1.5.1) непосредственно следует, что при достаточно большом *n* и произвольном малом $\varepsilon > 0$ будет выполняться включение $[a_n, b_n] \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Это говорит о том, что в интервале $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ содержится бесконечно много точек множества *E*.

▲

<u>Замечание 1.5.3.</u> Доказанную теорему можно переформулировать следующим образом: из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

<u>Определение 1.5.2.</u> Пусть *E* – произвольное множество. Множество всех его предельных точек называется производным множеством для множества *E*. Производное множество принято обозначать символом E'.

<u>Определение 1.5.3.</u> Множество *E* называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки, т.е. $E' \subset E$.

<u>Определение 1.5.4.</u> Множество *E* называется совершенным, если оно совпадает со своим производным множеством, т.е. $E = E'$.

<u>Определение 1.5.5.</u> Замыканием множества *E* называется множество $[E]$, получаемое присоединением к *E* всех его предельных точек, т.е. $[E] = E \cup E'$.

Пример 1. Пусть множество $E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$. Тогда $E' = \{0\}$ и множество *E* не является замкнутым.

Пример 2. Пусть $E = [a, b]$. Тогда $E' = [a, b]$, и значит, множество *E* является совершенным.

Теорема 1.5.2 Производное множество E' любого точечного множества *E* является замкнутым.

Доказательство

Если множество $E' = \varnothing$, то утверждение теоремы очевидно. В противном случае рассмотрим одну из предельных точек x_0 множества E' и произвольный интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. По определению предельной точки в нем содержатся точки множества E', отличные от x_0. Пусть $z \in E'$ – одна из таких точек, а т.к. *z* – предельная точка множества *E*, то $z \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ и в интервале $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ есть точки множества *E*. Отсюда точка x_0 должна быть предельной для *E* и, следовательно, $x_0 \in E'$. Таким образом, множество E' содержит все свои предельные точки и поэтому замкнуто.

▲

К основным свойствам замкнутых множеств относятся следующие:

- Пересечение любого числа замкнутых множеств является замкнутым множеством;
- Объединение конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество;
- Множество *E* является замкнутым тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием, т.е. $E = [E]$.

Замечание 1.5.4. Объединение бесконечного числа замкнутых множеств может и не быть замкнутым множеством, например,

$$E_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right], \ \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = (0, 1].$$

1.6. Открытые линейные множества

Пусть *E*– некоторое числовое множество, т.е. $E \subset R$.

Определение 1.6.1. Точка x_0 называется внутренней точкой множества *E*, если существует содержащий эту точку интервал (α, β) целиком содержащийся в *E*, т.е. $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset E$.

Определение 1.6.2. Множество *E* называется открытым, если все его точки являются внутренними.

Пример 1. Всякий интервал (α, β) является открытым множеством.

Пример 2. Числовая прямая *R* есть открытое множество.

Пример 3. Пустое множество является открытым.

Пример 4. Отрезок $[a, b]$ открытым множеством не является (его концы не относятся к внутренним точкам).

Теорема 1.6.1. Объединение любого числа открытых множеств является открытым множеством.

Доказательство. Пусть $A = \bigcup_{\tau} A_\tau$, A_τ – открытые множества. Покажем, что A – открытое множество. Пусть $x_0 \in A$. Тогда $x_0 \in A_{\tau_0}$ при некотором τ_0. Поскольку A_{τ_0} – открытое множество, то существует интервал (α, β) такой, что $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset A_{\tau_0}$, следовательно, $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset A$. Таким образом, x_0 – внутренняя точка множества A. В силу ее произвольности теорема доказана.

▲

Теорема 1.6.2. Пересечение конечного числа открытых множеств является открытым множеством.

Доказательство. Пусть $E = \bigcap_{i=1}^{n} E_i$, где E_i – открытые линейные множества. Если $E = \varnothing$, то теорема, очевидно, справедлива. В противном случае берем произвольную точку $x_0 \in E$. Тогда $x_0 \in E_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$. Для каждого i найдется интервал (α_i, β_i) такой, что $x_0 \in (\alpha_i, \beta_i) \subset E_i$. Положим $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ и $\beta = \min\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$. Тогда, очевидно, $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset E$, т.е. x_0 – внутренняя точка множества E.

▲

Введем в рассмотрение такое множество U, что все рассматриваемые множества окажутся его подмножествами. Такое множество U принято называть *универсальным множеством* или *универсумом*. Если выбрано некоторое универсальное множество U, то для всякого множества $M \subset U$ его *дополнение*, обозначаемое через $\overline{M}$, – это множество всех элементов универсума, которые не принадлежат множеству M:

$$\overline{M} = \{x \mid x \in U \quad и \quad x \notin M\}.$$

Таким образом, дополнение – это частный случай разности: $\overline{M} = U \setminus M$. Все отличие здесь состоит в том, что разность берется относительно фиксированного множества, содержащего все множества, которые в данной связи рассматриваются.

Замечание 1.6.1. Классы замкнутых и открытых множеств не охватывают вместе всех множеств и, кроме того, эти классы пересекаются. Существуют множества не замкнутые и не открытые одновременно (например, полуинтервал $(a, b]$) и существуют множества замкнутые и открытые одновременно (например, множество всех действительных чисел $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$).

Связь между открытыми и замкнутыми множествами усматривается, если перейти к дополнениям.

Теорема 1.6.3. Пусть U – некоторое универсальное множество, а G – открытое его подмножество, т.е. $G \subset U$. Тогда дополнение $\overline{U} = U \setminus G$ является замкнутым множеством.

Доказательство. Поскольку G – открытое, то найдется такой интервал (α, β), что $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset G$. Этот интервал не содержит точек множества $\overline{U}$. Значит x_0 – не предельная точка множества $\overline{U}$. Поэтому точка, являющаяся предельной для множества $\overline{U}$, не может быть во множестве G. Значит, множество $\overline{U}$ содержит все свои предельные точки, т.е. замкнуто.

▲

Теорема 1.6.4. Пусть U – некоторое универсальное множество, а F – замкнутое его подмножество. Тогда дополнение $\overline{U} = U \setminus F$ является открытым множеством.

Доказательство. Пусть $x_0 \in \overline{U}$. Тогда x_0 не является предельной точкой множества F в силу его замкнутости. Следовательно, существует интервал (α, β), содержащий точку x_0 и не содержащий ни одной отличной от x_0 точки множества F. Поскольку $x_0 \notin F$, то в интервале (α, β) нет точек множества F, следовательно, $(\alpha, \beta) \subset \overline{U}$ и поэтому x_0 – внутренняя точка $\overline{U}$.

▲

Пример 1. Пусть G – открытое множество и $G \subset [a, b]$. Тогда множество $[a, b] \setminus G$ является замкнутым.

Пример 2. Если F – замкнутое множество и $F \subset (a, b)$, то множество $(a, b) \setminus F$ является открытым.

1.7. Структура линейных открытых и замкнутых ограниченных множеств

Определение 1.7.1. Пусть G – открытое множество. Если интервал $(a, b) \subset G$, но его концы $a \notin G$ и $b \notin G$, то он называется составляющим интервалом множества G.

Теорема 1.7.1. Пусть G – непустое ограниченное открытое множество. Тогда каждая его точка принадлежит некоторому его составляющему интервалу.

Доказательство. Пусть $x_0 \in G$. Рассмотрим множество $F = [x_0, +\infty) \cap \overline{G}$. Это замкнутое множество, поскольку является пересечением замкнутых множеств, к тому же $F \neq \varnothing$. Множество F является ограниченным снизу и $\inf F = \mu \geq x_0$. Но $x_0 \in G$, следовательно, $x_0 \notin F$ и $\mu \neq x_0$. Поэтому $x_0 < \mu$.

С другой стороны $\mu \notin G$, т.к. $\mu \in F$. Покажем, что $[x_0, \mu) \subset G$. От противного. Тогда должна существовать точка $y \in [x_0, \mu)$, но $y \notin G$. Тогда $y \in F, y < \mu.$ Но это противоречит определению точки μ. Таким образом, мы установили, что

$$1)\ \mu > x_0, \qquad 2)\ \mu \notin G, \qquad 3)\ [x_0, \mu) \subset G.$$

Аналогично доказывается существование такой точки λ, что

$$1)\ \lambda < x_0, \qquad 2)\ \lambda \notin G, \qquad 3)\ (\lambda, x_0] \subset G.$$

Отсюда заключаем, что (λ, μ) есть составляющий интервал множества G и $x_0 \in (\lambda, \mu) \subset G$.

▲

<u>Теорема 1.7.2.</u> Если (λ, μ) и (σ, τ) – два составляющих интервала одного и того же открытого множества G, то они либо совпадают, либо не пересекаются.

Доказательство. Допустим, что найдется точка $x \in (\lambda, \mu) \cap (\sigma, \tau)$. Если предположить, что $\tau < \mu$, то $\tau \in (\lambda, \mu)$, что невозможно, т.к. $(\lambda, \mu) \subset G, \tau \notin G$. Поэтому $\mu \le \tau$. Поскольку μ и τ являются равноправными, то $\mu \ge \tau$, и следовательно, $\mu = \tau$. Аналогичным образом устанавливается, что $\sigma = \lambda$. Таким образом, $(\sigma, \tau) = (\lambda, \mu)$.

▲

<u>Замечание 1.7.1.</u> Множество различных составляющих интервалов непустого ограниченного открытого множества является конечным или счетным.

Резюмируя сказанное, получаем следующее утверждение.

<u>Теорема 1.7.3.</u> Каждое непустое ограниченное открытое множество G представимо в виде объединения не более чем счетного числа интервалов, которые попарно не пересекаются, но могут иметь общие концы, т.е.

$$G = \bigcup_k (\lambda_k, \mu_k), \lambda_k \notin G, \mu_k \notin G.$$

Изучим теперь структуру замкнутых ограниченных множеств. Пусть F – такое множество, а S – наименьший отрезок, содержащий его, т.е. $F \subset S$. Тогда множество $\overline{F} = S \setminus F$ будет открытым. Если оно не пусто, то к нему применима теорема 1.7.3 и имеет место следующее утверждение.

<u>Теорема 1.7.4.</u> Непустое ограниченное замкнутое множество F или является отрезком, или получается из некоторого отрезка удалением конечного или счетного множества попарно непересекающихся интервалов, концы которых принадлежат множеству F.

<u>Замечание 1.7.2.</u> а) Попарно непересекающиеся интервалы называются смежными интервалами множества F.

b) Если множество F совершенно, то смежные интервалы не имеют общих концов.

c) Ясно и обратное – всякое множество, получаемое из отрезка удалением некоторого множества интервалов, является замкнутым.

d) Говоря о наименьшем отрезке, содержащем множество F, имеется в виду, что $a = \inf F$, $b = \sup F$, $F \subset [a, b]$.

2. МЕРА ЛИНЕЙНЫХ МНОЖЕСТВ. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

2.1. Мера открытого ограниченного множества

В теории функций действительного переменного большую роль играет понятие меры точечного множества, обобщающее понятие длины промежутка, площади прямоугольника, объема параллепипеда. Открытые множества обладают наиболее простой структурой. Поэтому понятие меры для них определим изначально.

Определение 2.1.1. Мерой интервала $I = (a, b)$ называется его длина, т.е. b-a. Это число будем обозначать так: $m(I) = b - a$.

Замечание 2.1.1. Очевидно, что всегда $m(I) > 0$.

Теорема 2.1.1. Если в интервале Δ содержится конечное число попарно непересекающихся интервалов $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, то справедливо неравенство:

$$\sum_{k=1}^{n} m(\delta_k) \le m(\Delta).$$

Доказательство. Пусть $\Delta = (A, B)$, $\delta_k = (a_k, b_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Не ограничивая общности можно считать, что интервалы δ_k перенумерованы в порядке возрастания левых концов, т.е. $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Но тогда $b_k \le a_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, и $Q = (B - b_n) + (a_n - b_{n-1}) + \cdots + (a_2 - b_1) + (a_1 - A) \ge 0$. Принимая во внимание равенство $m(\Delta) = \sum_{k=1}^{n} m(\delta_k) + Q$, получаем требуемое.

▲

Замечание 2.1.2. Теорема остается справедливой и в случае счетного множества интервалов $\delta_k = (a_k, b_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$.

Определение 2.1.2. Мерой непустого открытого ограниченного множества G называется сумма длин всех его составляющих интервалов δ_k, т.е. $m(G) = \sum_{k} m(\delta_k)$.

Замечание 2.1.3. 1) Из определения непосредственно вытекают следующие свойства меры: a) $m(G) < +\infty$; b) $m(\varnothing) = 0$; c) если G_1 и G_2 – открытые ограниченные множества, причем $G_1 \subset G_2$, то $m(G_1) \le m(G_2)$.

2) Мера открытого ограниченного множества *G* есть точная нижняя грань мер всевозможных открытых ограниченных множеств, содержащих *G*.

Теорема 2.1.2. Если открытое ограниченное множество *G* является объединением конечного или счетного множества попарно непересекающихся открытых множеств G_k, т.е. $G=\coprod_k G_k$, то справедливо равенство: $m(G)=\sum_k m(G_k)$.

Доказательство. Пусть $\delta_i^{(k)}\ (i=1,2,\dots)$ являются составляющими интервалами множества G_k. Покажем, что каждый из них является составляющим интервалом для суммы *G*. Во-первых, $\delta_i^{(k)}\subset G$. Осталось убедиться, что концы интервалов не принадлежат множеству *G*. Предположим, что, например, правый конец интервала $\delta_i^{(k)}$ принадлежит *G*. Тогда этот правый конец (назовем его β) должен принадлежать какому-нибудь из слагаемых множеств. Пусть $\beta\in G_{k'}$. Ясно, что $k'\neq k$, поскольку $\beta\notin G_k$. Но множество $G_{k'}$ является открытым и точка β принадлежит одному из составляющих интервалов этого множества, например, $\beta\in\delta_{i'}^{k'}$. Но это влечет за собой то, что $\delta_i^k\cap\delta_{i'}^{k'}\neq\varnothing$, а это противоречит условию $G_k\cap G_{k'}=\varnothing$.

Итак, каждый интервал $\delta_i^{(k)}$ есть составляющий интервал множества *G*. С другой стороны, каждая точка множества *G* принадлежит хотя бы одному $\delta_i^{(k)}$ и все эти интервалы различны. Таким образом, совокупность $\delta_i^{(k)}\ (i=1,2,\dots)$ есть множество составляющих интервалов суммы *G*. Тогда

$$m(G)=\sum_i\sum_k m(\delta_i^{(k)})=\sum_k\left(\sum_i m(\delta_i^{(k)})\right)=\sum_k m(G_k).$$

▲

Замечание 2.1.4. Для того, чтобы перенести теорему на случай пересекающихся слагаемых, приведем два факта, имеющих очевидный смысл.

a) Пусть отрезок $[a,b]$ и система интервалов (a_i,b_i), $i=1,2,\dots,n$ таковы, что

$$[a,b]\subset\bigcup_{i=1}^n(a_i,b_i).$$

Тогда

$$b-a\le\sum_{i=1}^n(b_i-a_i).$$

b) Пусть интервал Δ есть сумма конечного или счетного множества открытых множеств G_k, т.е. $\Delta=\bigcup_k G_k$. Тогда

$$m(\Delta)\le\sum_k m(G_k).$$

Теорема 2.1.3. Если открытое ограниченное множество G есть сумма конечного числа или счетного множества открытых множеств G_k, т.е. $G=\bigcup_k G_k$, то $m(G)\le\sum_k m(G_k)$.

Доказательство. Пусть δ_i $(i=1,2,\dots)$ являются составляющими интервалами суммы G. Тогда $m(G)=\sum_i m(\delta_i)$. Но

$$\delta_i=\delta_i\cap G=\delta_i\cap\left(\bigcup_k G_k\right)=\bigcup_k(\delta_i\cap G_k) \text{ и } m(\delta_i)\le\sum_k m(\delta_i\cap G_k).$$

Тогда

$$m(G)=\sum_i m(\delta_i)\le\sum_i\left(\sum_k m(\delta_i\cap G_k)\right)=\sum_k\left(\sum_i m(\delta_i\cap G_k)\right). \qquad (2.1.1)$$

С другой стороны,

$$G_k=G_k\cap\left(\bigcup_i \delta_i\right)=\bigcup_i(G_k\cap\delta_i).$$

При этом слагаемые в правой части последнего равенства попарно не пересекаются и, следовательно,

$$m(G_k)=\sum_i m(G_k\cap\delta_i).$$

С учетом (2.1.1) получаем доказательство теоремы.

▲

2.2. Мера замкнутого ограниченного множества

Пусть F – непустое ограниченное замкнутое множество, а S – наименьший отрезок, содержащий его, т.е. $F\subset S$. Тогда множество $\overline{F}=S\setminus F$ будет открытым и поэтому имеет определенную меру $m(\overline{F})$.

Определение 2.2.1. Мерой непустого ограниченного замкнутого множества F называется число $m(F)$, которое определяется по формуле:

$$m(F)=b-a-m(\overline{F}),$$

где $S=[a,b]$– минимальный отрезок такой, что $F\subset S$.

Пример 1. $F=[c,d]$. Для него, очевидно, $S=[c,d]$ и $\overline{F}=\varnothing$. Поэтому $m(F)=d-c$, т.е. мера отрезка равна его длине.

Пример 2. Пусть F – сумма конечного числа попарно непересекающихся отрезков, т.е. $F=\coprod_{k=1}^{n}[a_k,b_k]$. Будем считать, что отрезки перенумерованы в порядке возрастания левых концов. Тогда имеем:

$$b_k<a_{k+1},\ (k=1,2,\dots,n-1),\ S=[a_1,b_n],\ \overline{F}=\coprod_{k=1}^{n-1}(b_k,a_{k+1}).$$

Поэтому

$$m(F)=b_n-a_1-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-b_k)=b_n-a_1-a_2+b_1-a_3+b_2-\dots-a_n+b_{n-1}=\sum_{k=1}^{n}(b_n-a_n).$$

Таким образом, мера суммы конечного числа попарно непересекающихся отрезков численно равна сумме длин этих отрезков.

Рассмотрим некоторые свойства меры замкнутых ограниченных линейных множеств.

Свойство 1. Если F – ограниченное замкнутое множество, то его мера неотрицательна, т.е. $m(F) \ge 0$.

Свойство 2. Если ограниченное замкнутое множество F содержится в некотором интервале I, т.е. $F \subset I$, то $m(F) = m(I) - m(\overline{F})$.

Свойство 3. Если F_1 и F_2 – ограниченные замкнутые множества, причем $F_1 \subset F_2$, то $m(F_1) \le m(F_2)$.

Свойство 4. Если F – замкнутое множество, а G – ограниченное открытое множество, причем $F \subset G$, то $m(F) \le m(G)$.

Замечание 2.2.1. Понятие меры ограниченного множества может быть истолковано в терминах точной нижней и точной верхней граней числовых множеств.

a) Мера открытого ограниченного множества G есть точная верхняя грань мер всевозможных замкнутых множеств, содержащихся в нем.
b) Мера замкнутого ограниченного множества F есть точная нижняя грань мер всевозможных открытых ограниченных множеств, содержащих его.

Теорема 2.2.1. Пусть ограниченное замкнутое множество F есть сумма конечного числа попарно непересекающихся замкнутых множеств F_k, т.е. $F = \coprod_{k=1}^{n} F_k$, тогда $m(F) = \sum_{k=1}^{n} m(F_k)$.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем рассматривать случай двух слагаемых. Пусть $F = F_1 \coprod F_2$. Берем произвольное число $\varepsilon > 0$. Подберем два открытых множества G_1 и G_2 так, чтобы выполнялось:

$$F_i \subset G_i,\; m(G_i) < m(F_i) + \frac{\varepsilon}{2} \quad (i = 1, 2).$$

Положим $G = G_1 \cup G_2$. Тогда G – открытое ограниченное множество, причем $F \subset G$ и будет выполняться:

$$m(F) \le m(G) \le m(G_1) + m(G_2) < m(F_1) + m(F_2) + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем:

$$m(F) \le m(F_1) + m(F_2).$$

С другой стороны, в силу свойства плотности множества действительных чисел существуют такие открытые множества B_1 и B_2, что

$$F_i \subset B_i \;\; (i = 1, 2), \quad B_1 \cap B_2 = \varnothing.$$

Зададимся опять произвольным $\varepsilon > 0$ и найдем такое открытое ограниченное множество G, что будет выполняться:

$$F \subset G, \quad m(G) \le m(F) + \varepsilon.$$

Тогда множества $B_1 \cap G$ и $B_2 \cap G$ будут открытыми ограниченными, причем

$$F_1 \subset B_1 \cap G, \quad F_2 \subset B_2 \cap G, \quad (B_1 \cap G) \cap (B_2 \cap G) = \varnothing .$$

Поэтому

$$m(F_1) + m(F_2) \le m(B_1 \cap G) + m(B_2 \cap G) = m\big((B_1 \cap G) \cup (B_2 \cap G)\big).$$

Но

$$(B_1 \cap G) \cup (B_2 \cap G) \subset G .$$

Значит

$$m(F_1) + m(F_2) \le m(G) \le m(F) + \varepsilon ,$$

и в силу произвольности $\varepsilon > 0$

$$m(F_1) + m(F_2) \le m(F) .$$

Поэтому

$$m(F) = m(F_1) + m(F_2) .$$

▲

2.3. Внешняя и внутренняя меры ограниченного множества

Будем теперь распространять понятие меры на ограниченные множества.

Определение 2.3.1. Внешней мерой $m^*(E)$ ограниченного множества E будем называть точную нижнюю грань мер всевозможных открытых ограниченных множеств, содержащих множество E:

$$m^*(E) = \inf_{E \subset G} \{m(G)\} .$$

Определение 2.3.2. Внутренней мерой $m_*(E)$ ограниченного множества E будем называть точную верхнюю грань мер всевозможных замкнутых множеств, содержащихся во множестве E:

$$m_*(E) = \sup_{F \subset E} \{m(F)\} .$$

Замечание 2.3.1. Очевидно, что для всякого ограниченного множества E существуют внешняя и внутренняя меры, причем выполняются схожие неравенства:

$$0 \le m^*(E) < +\infty , \; 0 \le m_*(E) < +\infty .$$

Перейдем к рассмотрению свойств внешней и внутренней мер.

Теорема 2.3.1. Если G есть открытое ограниченное множество, то для него выполняются равенства:

$$m^*(G) = m_*(G) = m(G) .$$

Теорема 2.3.2. Если F есть замкнутое ограниченное множество, то для него выполняются равенства:

$$m^*(F) = m_*(F) = m(F) .$$

Теорема 2.3.3. Для всякого ограниченного множества E справедливо неравенство:

$$m_*(E) \le m^*(E) .$$

Доказательство. Пусть G – открытое ограниченное множество и $E \subset G$. Если множество F замкнуто и $F \subset E$, то ясно, что $F \subset G$. Поэтому $m(F) \le m(G)$ и $m_*(E) \le m(G)$. А поскольку выше приведенные рассуждения справедливы для всякого открытого ограниченного множества G, то $m_*(E) \le m^*(E)$.

▲

<u>Теорема 2.3.4.</u> Если A и B ограниченные множества, причем $A \subset B$, то их внешняя и внутренняя меры связаны соотношениями:

$$m^*(A) \le m^*(B) \text{ и } m_*(A) \le m_*(B).$$

Доказательство. Оба неравенства доказываются аналогичным образом. Докажем второе из них. Пусть S есть множество, состоящее из мер всевозможных замкнутых подмножеств множества A, а T – такое же множество для множества B. Тогда будет выполняться:

$$m_*(A) = \sup\{S\}, \quad m_*(B) = \sup\{T\}.$$

Пусть F замкнуто и $F \subset A$, тогда $F \subset B$ и $S \subset T$. Утверждение теоремы следует из того, что точная верхняя грань подмножества не превосходит таковой для самого множества, т.е. $\sup\{S\} \le \sup\{T\}$.

▲

<u>Теорема 2.3.5.</u> Если ограниченное множество E является суммой конечного числа или счетного множества множеств E_k, т.е. $E = \bigcup\limits_k E_k$, то справедливым оказывается неравенство:

$$m^*(E) = \sum_k m^*(E_k).$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть открытые множества G_k таковы, что

$$E_k \subset G_k \text{ и } m(G_k) \le m^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Обозначим через I какой-нибудь интервал, содержащий множество E. Тогда

$$E \subset I \cap \left(\bigcup_k G_k \right).$$

Следовательно,

$$m^*(E) \le m\left(I \cap \left(\bigcup_k G_k \right) \right) = m\left(\bigcup_k (I \cap G_k) \right) \le$$
$$\le \sum_k m(I \cap G_k) \le \sum_k m(G_k) \le \sum_k m^*(E_k) + \varepsilon.$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ получаем утверждение теоремы.

▲

<u>Теорема 2.3.6.</u> Если ограниченное множество E является суммой конечного числа или счетного множества попарно непересекаю-

щихся множеств E_k, т.е. $E = \coprod_k E_k$, то справедливым оказывается неравенство

$$m_*(E) \geq \sum_k m_*(E_k).$$

Доказательство. Рассмотрим первые n множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ найдутся такие замкнутые множества F_k, что будет выполняться:

$$F_k \subset E_k,\ m(F_k) > m_*(E_k) - \frac{\varepsilon}{n} \quad (k = 1,2, \ldots, n).$$

Множества F_k попарно не пересекаются, и их сумма $\coprod_{k=1}^{n} F_k$ является замкнутым множеством. Отсюда

$$m_*(E) \geq m\left(\coprod_{k=1}^{n} F_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m(F_k) > \sum_{k=1}^{n} m_*(E_k) - \varepsilon.$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n} m_*(E_k) \leq m_*(E).$$

Если же слагаемых множеств будет счетное множество, то устанавливаются сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} m_*(E_k)$ и неравенство $\sum_{k=1}^{\infty} m_*(E_k) \leq m_*(E).$

▲

Замечание 2.3.2. Теорема перестает быть справедливой, если отбросить условие отсутствия общих точек у множеств E_k, например, если $E_1 = [0,1]$, $E_2 = [0,1]$, $E = E_1 \cup E_2$, то $m_*(E) = 1$ и $m_*(E_1) + m_*(E_2) = 2$.

Теорема 2.3.7. Пусть E – ограниченное множество. Если I – интервал, содержащий это множество, т.е. $I \supset E$, то справедливо равенство

$$m^*(E) + m_*(I \setminus E) = m(I).$$

Доказательство. Зададимся произвольным числом $\varepsilon > 0$ и найдем такое замкнутое множество F, что будет выполняться

$$F \subset I \setminus E, \quad m(F) > m_*(I \setminus E) - \varepsilon.$$

Положим $G = I \setminus F$. Оно будет открытым ограниченным множеством, причем $E \subset G$ и поэтому

$$m^*(E) \leq m(G) = m(I) - m(F) < m(I) - m_*(I \setminus E) + \varepsilon,$$

а в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем:

$$m^*(E) + m_*(I \setminus E) \leq m(I).$$

Для получения обратного неравенства

$$m^*(E) + m_*(I \setminus E) \geq m(I) \qquad (2.3.1)$$

выбираем $\varepsilon > 0$ и находим такое открытое ограниченное множество G_0, что будет выполняться

$$G_0 \supset E, \quad m(G_0) < m^*(E) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть $I = (A, B)$. Построим такой интервал (a, b), что $(A, B) \supset (a, b)$, причем

$$A < a < A + \frac{\varepsilon}{3}, \quad B - \frac{\varepsilon}{3} < b < B.$$

Положим далее

$$G = (\ \cap G_0) \cup (A, a) \cup (b, B).$$

Множество G является открытым и ограниченным, причем

$$G \supset E, \quad m(G) < m^*(E) + \varepsilon.$$

Кроме того, множество $F = I \setminus G$ будет замкнутым, поскольку $F = [a, b] \cap (I \setminus G)$. Так как $F \subset I \setminus E$, то

$$m_*(I \setminus E) \geq m(F) = m(I) - m(G) > m(I) - m^*(E) - \varepsilon.$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ получаем неравенство (2.3.1), что и доказывает теорему.

▲

Замечание 2.3.3. Из доказательства теоремы следует равенство

$$m^*(I \setminus E) - m_*(I \setminus E) = m^*(E) - m_*(E).$$

2.4. Измеримые множества

Определение 2.4.1. Ограниченное множество E называется измеримым, если его внешняя и внутренняя меры совпадают, т.е. $m^*(E) = m_*(E)$. Их общее значение называется мерой множества E и обозначается символом $\mu(E)$, т.е. $\mu(E) = m^*(E) = m_*(E)$.

Предложенный способ определения понятия меры принадлежит Лебегу, в связи с чем измеримое множество называют “множеством, измеримым по Лебегу”. Если множество неизмеримо, то о его мере нельзя говорить, а символ $\mu(E)$ считается лишенным смысла.

Замечание 2.4.1. Понятие измеримости можно обобщить на некоторые неограниченные множества.

Теорема 2.4.1. Открытое ограниченное множество E измеримо и его вновь определенная мера совпадает с мерой, введенной для него ранее, т.е. $\mu(E) = m(E)$.

Теорема 2.4.2. Замкнутое ограниченное множество F измеримо и его вновь определенная мера совпадает с мерой, ранее введенной для него, т.е. $\mu(F) = m(F)$.

Теорема 2.4.3. Если E – ограниченное множество, а I – интервал, причем $E \subset I$, то множества E и $I \setminus E$ одновременно измеримы или нет.

Теорема 2.4.4. Сумма конечного числа измеримых множеств является измеримым множеством.

Доказательство. Пусть $E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$, причем E_k – измеримые множества. Берем произвольное число $\varepsilon > 0$ и построим для каждого k такое замкнутое множество F_k и такое открытое ограниченное множество G_k, чтобы выполнялось следующее:

$$F_k \subset E_k \subset G_k, \quad \mu(G_k) - \mu(F_k) < \frac{\varepsilon}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Положим $F = \bigcup_{k=1}^{n} F_k, \quad G = \bigcup_{k=1}^{n} G_k$. Тогда множество F замкнуто, а множество G открыто и ограничено, причем $F \subset E \subset G$. Поэтому

$$\mu(F) \le m_*(E) \le m^*(E) \le \mu(G). \tag{2.4.1}$$

Множество $G \setminus F = G \cap (G \setminus F)$ является открытым и ограниченным, а, значит, измеримым, множество F также измеримо. В силу того, что выполняются соотношения $G = F \cup (G \setminus F), \quad F \cap (G \setminus F) = \varnothing$, имеем:

$$\mu(G) = \mu(F) + \mu(G \setminus F) \text{ или } \mu(G \setminus F) = \mu(G) - \mu(F). \tag{2.4.2}$$

Аналогичным образом устанавливается, что

$$\mu(G_k \setminus F_k) = \mu(G_k) - \mu(F_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.4.3}$$

Опираясь на очевидное включение

$$G \setminus F \subset \bigcup_{k=1}^{n} (G_k \setminus F_k),$$

все множества в котором являются открытыми и ограниченными, с учетом (2.4.2) и (2.4.3) будем иметь:

$$\mu(G \setminus F) \le \sum_{k=1}^{n} \mu(G_k \setminus F_k) \text{ или } \mu(G) - \mu(F) \le \sum_{k=1}^{n} (\mu(G_k) - \mu(F_k)) < \frac{\varepsilon}{n} \cdot n = \varepsilon .$$

Из (2.4.1) заключаем, что $m^*(E) - m_*(E) < \varepsilon$, а в силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ имеем $m^*(E) = m_*(E)$, что и доказывает теорему.

▲

Замечание 2.4.2. Доказанная теорема остается справедливой и в случае, если ограниченное множество E является суммой счетного множества измеримых множеств E_k, т.е. $E = \bigcup_{k} E_k$.

Теорема 2.4.5. Пересечение конечного числа или счетного множества измеримых множеств является измеримым множеством.

Теорема 2.4.6. Разность двух измеримых множеств является измеримым множеством.

Теорема 2.4.7. Пусть множества $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ являются измеримыми. Если $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \subset \ldots$ и сумма $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ является ограниченным множеством, то множество E измеримо и $\mu(E) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n)$.

Теорема 2.4.8. Пусть множества $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ являются измеримыми, причем $E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \supset \ldots$ и $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$. Тогда множество E измеримо и $\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

2.5. Измеримые функции

Если каждому $x \in E$ поставлено в соответствие некоторое число $f(x)$, то говорят, что на множестве E задана функция $f(x)$. При этом будут допускаться и бесконечные значения функции, лишь бы они имели только определенный знак ($+\infty$ или $-\infty$). Рассмотрим функцию $f(x)$, заданную на множестве E. Символом $E(f > a)$, где $a \in \mathbf{R}$, будем обозначать множество тех $x \in E$, для которых выполнено неравенство $f(x) > a$, т.е.

$$E(f > a) = \{x \in E \mid f(x) > a\}. \tag{2.5.1}$$

Аналогичным образом вводятся символы $E(f \geq a)$, $E(f = a)$, $E(f \leq a)$, $E(a < f \leq b)$.

Определение 2.5.1. Функция $f(x)$, заданная на множестве E, называется измеримой (по Лебегу), если измеримо множество E и если при любом конечном $a \in R$ измеримо множество $E(f > a)$, определяемое (2.5.1).

Определение 2.5.2. Будем говорить, что некоторое соотношение выполняется *почти всюду на множестве* E, если оно выполняется на множестве $E_0 \subset E$, причём $\mu(E \setminus E_0) = 0$.

Определение 2.5.3. Две функции $f(x)$ и $g(x)$, заданные на одном и том же множестве E, называются эквивалентными, если они совпадают на E почти всюду. Эквивалентность функций $f(x)$ и $g(x)$ будем обозначать так: $f \sim g$.

Определение 2.5.4. Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, называется *ступенчатой*, если этот отрезок можно разбить точками $c_0 = a < c_1 < c_2 < \ldots < c_n = b$ на конечное число частей, внутри которых (т.е. на интервалах (c_k, c_{k+1}), $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$) функция $f(x)$ постоянна.

Свойства измеримых функций сформулируем в виде отдельных теорем.

Теорема 2.5.1. Всякая функция, заданная на множестве меры нуль, измерима.

Теорема 2.5.2. Если функция $f(x)$ является измеримой на множестве E и множество $A \subset E$ измеримо, то $f(x)$ измерима на множестве A.

Теорема 2.5.3. Пусть функция $f(x)$ задана на измеримом множестве E, которое представимо в виде суммы конечного числа или счетного множества измеримых множеств E_k, т.е. $E=\bigcup_k E_k$. Если $f(x)$ измерима на каждом из множеств E_k, то она измерима и на *E*.

<u>Теорема 2.5.4.</u> Если функция $f(x)$ является измеримой на множестве *E*, а $g(x)\sim f(x)$, то функция $g(x)$ будет также измеримой на множестве *E*.

<u>Теорема 2.5.5.</u> Функция $f(x)$, принимающая постоянное значение на измеримом множестве *E*, является измеримой на нем.

<u>Теорема 2.5.6.</u> Ступенчатая функция $f(x)$, заданная на измеримом множестве *E*, является измеримой на этом множестве.

<u>Теорема 2.5.7.</u> Пусть функция $f(x)$ является измеримой на множестве *E*. Тогда при любом действительном *a* будут измеримы множества: $E(f\ge a),\quad E(f=a),\quad E(f\le a),\quad E(f<a)$.

Доказательство. Сначала рассмотрим множество $E(f\ge a)$. Его можно представить в виде

$$E(f\ge a)=\bigcap_{k=1}^{\infty}E\left(f>a-\frac{1}{k}\right),$$

значит оно является измеримым. Далее имеем:

$$E(f=a)=E(f\ge a)\setminus E(f>a),$$
$$E(f\le a)=E\setminus E(f>a),$$
$$E(f<a)=E\setminus E(f\ge a).$$

▲

<u>Замечание 2.5.1.</u> Легко видеть, что если хоть одно из множеств $E(f\ge a),\quad E(f\le a),\quad E(f<a)$ оказывается измеримым при любом действительном *a*, то функция $f(x)$ измерима на множестве *E*, которое также предполагается измеримым. В определении измеримости множество $E(f>a)$ можно заменить на любое из выше указанных.

<u>Теорема 2.5.8.</u> Пусть функция $f(x)$ является измеримой на множестве *E*, а *k* – конечное число. Тогда оказываются измеримыми следующие функции:

1) $f(x)+k$, 2) $k\cdot f(x)$, 3) $|f(x)|$, 4) $f^2(x)$, 5) $\dfrac{1}{f(x)}$ при $f(x)\ne 0$.

Доказательство. 1) Измеримость функции $f(x)+k$ вытекает из соотношения

$$E(f+k>a)=E(f>a-k).$$

2) Измеримость функции $k\cdot f(x)$ при $k=0$ следует из теоремы 2.5.5; при $k\ne 0$ имеем

$$E(kf>a)=\begin{cases}E\left(f>\dfrac{a}{k}\right), & k>0,\\ E\left(f<\dfrac{a}{k}\right), & k<0.\end{cases}$$

3) Функция $|f(x)|$ измерима потому, что

$$E\{|f| > a\} = \begin{cases} E, & a < 0, \\ \{E(f > a)\} \cup \{E(f < -a)\}, & a \ge 0. \end{cases}$$

4) Измеримость функции $f^2(x)$ вытекает из того, что

$$E\{f^2 > a\} = \begin{cases} E, & a < 0, \\ E\{|f| > \sqrt{a}\}, & a \ge 0. \end{cases}$$

5) При $f(x) \ne 0$ имеем представление

$$E\left(\frac{1}{f} > a\right) = \begin{cases} E(f > 0), & a = 0, \\ \{E(f > 0)\} \cap \left(E(f < \dfrac{1}{a}\right), & a > 0, \\ E\left(f < \dfrac{1}{a}\right) \cap \{(E(f < 0)) \cup (E(f > 0))\}, & a < 0, \end{cases}$$

из которого следует измеримость функции $\dfrac{1}{f(x)}$.

▲

Теорема 2.5.9. Функция $f(x)$, заданная и непрерывная на отрезке $E = [a, b]$, является измеримой на нем.

Доказательство. Заметим, что множество $F = E(f \le a)$ замкнуто. В самом деле, пусть x_0 – предельная точка этого множества и $x_n \to x_0, \quad x_n \in F$. Тогда $f(x_n) \le a$, а в силу непрерывности функции $f(x)$ будет выполнено $f(x_0) \le a$, т.е. $x_0 \in F$, что означает замкнутость, а значит, измеримость множества *F*. Но $E(f > a) = E \setminus F$, что говорит об измеримости функции $f(x)$.

▲

Замечание 2.5.3. Из самого определения измеримой функции следует, что функция, заданная на неизмеримом множестве, неизмерима. Однако существуют неизмеримые функции, заданные на измеримых множествах.

Определение 2.5.5. Пусть $M \subset E = [a, b]$. Функция

$$\varphi_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M, \\ 0, & x \in E \setminus M \end{cases}$$

называется характеристической функцией множества *M*.

Теорема 2.5.10. Множество *M* и его характеристическая функция $\varphi_M(x)$ одновременно измеримы или нет.

Доказательство. Если $\varphi_M(x)$ измеримая функция, то измеримость множества *M* вытекает из соотношения $M = E\{\varphi_M > 0\}$. Обратно, если *M* является измеримым множеством, то измеримость его характеристической функции усматривается из соотношений

$$E(\varphi_M > a) = \begin{cases} E, & a < 0, \\ M, & 0 \le a < 1, \\ 0, & a \ge 1. \end{cases}$$

▲

Оказывается, что класс измеримых функций является замкнутым относительно арифметических операций и операции предельного перехода.

Теорема 2.5.10. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – конечные измеримые функции, заданные на множестве *E*. Тогда оказывается измеримой и каждая из следующих функций:

1) $f(x)+g(x)$, 2) $f(x)-g(x)$, 3) $f(x)g(x)$, 4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, если $g(x) \neq 0$.

Теорема 2.5.11. Пусть на множестве *E* задана последовательность измеримых функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ и некоторая функция $F(x)$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = F(x)$, причем равенство может выполняться почти всюду на *E*, то функция $F(x)$ является измеримой.

Замечание 2.5.4. При изучении какой-нибудь функции сам собою встает вопрос о точном или приближенном представлении ее с помощью функций более простой природы. Оказывается, что понятие измеримой функции тесно связано с понятием непрерывной функции.

Теорема 2.5.12 (М. Фреше). Для всякой измеримой и почти везде конечной функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, существует последовательность непрерывных функций, которая сходится к $f(x)$ почти всюду.

Структуру класса измеримых функций проясняет следующее утверждение.

Теорема 2.5.13 (Н.Н. Лузин). Пусть $f(x)$ является измеримой и почти всюду конечной функцией, заданной на отрезке $[a, b]$. Тогда, каковым бы ни было $\delta > 0$, найдется такая непрерывная функция $\varphi(x)$, что выполняется неравенство

$$\mu(E(f \neq \varphi)) < \delta .$$

В частности, если $|f(x)| \le k$, то $|\varphi(x)| \le k$.

Замечание 2.5.5. Теорему Лузина можно переформулировать следующим образом: измеримая и почти всюду конечная функция становится непрерывной, если пренебречь множеством сколь угодно малой меры.

2.6. Определение интеграла Лебега от ограниченной функции. Верхняя и нижняя суммы Лебега и их основные свойства

Классическое определение интеграла, данное О. Коши и развитое Б. Риманом, состоит в следующем:

А) Рассматривается ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$. Отрезок разбивается на частичные отрезки:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Б) На каждом частичном отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ выбирается точка $\varsigma_k \in [x_k, x_{k+1}]$ и составляется интегральная сумма

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\varsigma_k)\Delta x_k, \quad \Delta x_k = x_{k+1} - x_k. \qquad (2.6.1)$$

В) Если S_n при стремлении к нулю диаметра разбиения $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k$ стремится к конечному пределу *I*, не зависящему ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$, ни от выбора точек ς_k, то этот предел *I* называется интегралом Римана функции $f(x)$ и обозначается символом $\int_a^b f(x)dx$, т.е.

$$\lim_{\lambda \to 0} S_n = I = \int_a^b f(x)dx.$$

Замечание 2.6.1. Всякая непрерывная на отрезке функция является интегрируемой по Риману. Существуют также и разрывные функции, интегрируемые по Риману, например, монотонная разрывная функция.

Примером ограниченной функции, которая не будет интегрируемой по Риману, является функция Дирихле $D(x)$, которая определяется на отрезке $[0, 1]$ следующим образом:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \cap Q, \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus Q. \end{cases}$$

Эта функция не интегрируема по Риману, так как интегральная сумма (2.6.1) равна нулю в случае, если все ς_k являются иррациональными, и равна 1, если все ς_k – рациональны.

Замечание 2.6.2. Определение интеграла по Риману выглядит оправданным лишь для непрерывных функций, для прочих же функций оно выглядит довольно случайным.

Лебегом был предложен другой способ интегрирования, в котором точки *x* объединяются в множества E_k не по случайному признаку своей близости на оси *OX*, а по признаку достаточной близости соответствующих значений функции. С этой целью Лебег предложил разбивать на части не отрезок $[a, b]$, расположенный на оси абсцисс, а отрезок $[A, B]$, лежащий на оси ординат и включающий область значений функции $f(x)$:

$$y_0 = A < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = B.$$

Если составить множества $E_k = E(y_k \le y < y_{k+1})$, то станет ясно, что различным точкам $x \in E_k$ отвечают близкие значения функции $y = f(x)$. В отличие от конструкции интеграла Римана сами точки *x* могут быть весьма далеки друг от друга. В частности, хорошим представителем значений функции $y = f(x)$ на множестве E_k может служить, например, $y_k = f(x_k)$. Итак, естественным видится положить в основу понятия интеграла сумму

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot \mu(E_k).$$

Перейдем теперь к точным определениям. Пусть на измеримом множестве E задана измеримая ограниченная функция $y = f(x)$, причем $A < f(x) < B$. Разобьем отрезок $[A, B]$ на части точками y_k:

$$y_0 = A < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = B. \qquad (2.6.2)$$

Соотнесем каждому полуинтервалу $[y_k, y_{k+1})$ его, так называемое, множество Лебега E_k:

$$E_k = E(y_k \le y < y_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \qquad (2.6.3)$$

Из (2.6.3) легко усматриваются следующие свойства множеств E_k:

- множества E_k являются измеримыми;
- множества E_k попарно не пересекаются;
- $E = \coprod_{k=0}^{n-1} E_k$;
- $\mu(E) = \sum_{k=0}^{n-1} \mu(E_k)$.

Введем теперь нижнюю $\underline{S}$ и верхнюю $\overline{S}$ суммы Лебега

$$\underline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \mu(E_k), \quad \overline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} \mu(E_k). \qquad (2.6.4)$$

Из (2.6.4) очевидно следует соотношение $\overline{S} - \underline{S} \ge 0$. С другой стороны, если положить $\lambda = \max\limits_{0 \le k \le n-1} (y_{k+1} - y_k)$, то будем иметь:

$$\overline{S} - \underline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} (y_{k+1} - y_k) \mu(E_k) \le \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \mu(E_k) = \lambda \cdot \mu(E).$$

Таким образом,

$$0 \le \overline{S} - \underline{S} \le \lambda \cdot \mu(E). \qquad (2.6.5)$$

Число λ называется *диаметром разбиения (2.6.2)* по аналогии с построением интеграла Римана. Основное свойство интегральных сумм Лебега выражается следующим утверждением.

Теорема 2.6.1. Пусть некоторому способу разбиения T_0 отрезка $[A, B]$ отвечают суммы Лебега $\underline{S_0}$ и $\overline{S}_0$. Если к разбиению T_0 добавить новую точку разбиения, например, $\overline{y}$, получив тем самым разбиение T_1, то для вновь построенных сумм Лебега $\underline{S}$ и $\overline{S}$ будем иметь соотношения:

$$\underline{S_0} \le \underline{S}, \quad \overline{S} \le \overline{S_0},$$

другими словами, при добавлении новых точек деления нижняя сумма не уменьшается, а верхняя – не увеличивается.

Доказательство. Рассуждения будем проводить для нижних сумм. Для верхних сумм доказательство аналогичное.

Предположим, что $y_i < \overline{y} < y_{i+1}$. Тогда при $k \neq i$ полуинтервалы $[y_k, y_{k+1})$, а с ними и множества E_k будут фигурировать и в новом способе разбиения. Полуинтервал же $[y_i, y_{i+1})$ при переходе к новому разбиению будет заменен двумя полуинтервалами $[y_i, \overline{y})$ и $[\overline{y}, y_{i+1})$, что повлечет разбиение множества E_i на 2 множества $E_i^{'} = E(y_i \le f < \overline{y})$ и $E_i^{''} = E(\overline{y} \le f < y_{i+1})$. Очевидно, что $E_i = E_i^{'} \coprod E_i^{''}$, а также $\mu(E_i) = \mu\left(E_i^{'}\right) + \mu\left(E_i^{''}\right)$. Из вышеизложенного становится ясно, что нижняя сумма $\underline{S}$ получается из $\underline{S_0}$ заменой слагаемого $y_i\mu(E_i)$ в $\underline{S_0}$ на сумму двух слагаемых $y_i\mu\left(E_i^{'}\right) + \overline{y}\mu\left(E_i^{''}\right)$ в $\underline{S}$. Таким образом, $\underline{S_0} \le \underline{S}$.

▲

<u>Замечание 2.6.3.</u> Всякая нижняя сумма $\underline{S}$ не больше любой верхней суммы $\overline{S}$.

Зафиксируем какую-нибудь верхнюю сумму $\overline{S}_0$. Поскольку для всякой нижней суммы $\underline{S}$ выполняется неравенство $\underline{S} \le \overline{S_0}$, то множество $\{\underline{S}\}$ всех нижних сумм Лебега будет ограниченным сверху. Пусть $U = \sup \underline{S}$. Тогда ясно, что $U \le \overline{S_0}$. В силу произвольности суммы $\overline{S}_0$, последнее неравенство доказывает, что множество $\{\overline{S}\}$ всех верхних сумм Лебега ограничено снизу. Пусть $V = \inf \overline{S}$. Очевидно, при любом способе разбиения отрезка $[A, B]$ будет выполняться соотношение:

$$\underline{S} \le U \le V \le \overline{S}. \qquad (2.6.6)$$

Ввиду (2.6.5) будем иметь:

$$0 \le V - U \le \lambda\mu(E). \qquad (2.6.7)$$

В силу произвольности числа $\lambda > 0$ получаем, что $U = V$.

<u>Определение 2.6.1.</u> Общее значение величин U и V называется *интегралом Лебега* функции $f(x)$ по множеству E. Этот интеграл обозначается символом $\int_E f(x)dx$. Функция $f(x)$ при этом называется *интегрируемой по Лебегу* на множестве E.

<u>Замечание 2.6.4.</u> Из сказанного выше следует, что каждая измеримая ограниченная функция интегрируема в смысле Лебега. Процесс интегрирования по Лебегу приложим к гораздо более широкому классу функций, чем процесс интегрирования по Риману.

<u>Теорема 2.6.2.</u> Если диаметр разбиения $\lambda \to 0$, то интегральные суммы Лебега $\underline{S}$ и $\overline{S}$ будут стремиться к интегралу $\int_E f(x)dx$, т.е.

$$\lim_{\lambda \to 0} \underline{S} = \lim_{\lambda \to 0} \overline{S} = \int_E f(x)dx.$$

Доказательство. Из (2.6.5) заключаем, что $\lim\limits_{\lambda\to 0}(\overline{S}-\underline{S})=0$ или $\lim\limits_{\lambda\to 0}\underline{S}=\lim\limits_{\lambda\to 0}\overline{S}$, а из (2.6.6) имеем неравенство $\underline{S}\le\int_E f(x)dx\le\overline{S}$, которое и доказывает утверждение теоремы.

▲

2.7. Существование и основные свойства интеграла Лебега

Свойства интеграла Лебега будем формулировать для измеримых ограниченных функций.

Теорема 2.7.1 (теорема о среднем). Если измеримая функция $f(x)$ на измеримом множестве E удовлетворяет неравенствам $a\le f(x)\le b$, то

$$a\cdot\mu(E)\le\int_E f(x)dx\le b\cdot\mu(E).$$

Теорема 2.7.2. Если функция $f(x)$ является постоянной на измеримом множестве E, т.е. $f(x)=C$, то

$$\int_E f(x)dx=C\cdot\mu(E).$$

Теорема 2.7.3. Если измеримая функция $f(x)$ на измеримом множестве E неотрицательна, т.е. $f(x)\ge 0$, то

$$\int_E f(x)dx\ge 0.$$

Теорема 2.7.4. Если $\mu(E)=0$, то для любой ограниченной функции $f(x)$, заданной на множестве E, справедливо равенство

$$\int_E f(x)dx=0.$$

Теорема 2.7.5. Пусть на измеримом множестве E определена измеримая ограниченная функция $f(x)$. Если E_k – измеримые множества и $E=\coprod\limits_k E_k$, то выполняется равенство

$$\int_E f(x)dx=\sum_k\int_{E_k} f(x)dx.$$

Теорема 2.7.6. Если измеримые ограниченные функции $f(x)$ и $g(x)$, заданные на множестве E, эквивалентны между собой, то выполняется равенство:

$$\int_E f(x)dx=\int_E g(x)dx.$$

Теорема 2.7.7. Интеграл от функции, эквивалентной нулю, равен нулю.

Замечание 2.7.1. 1) Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Рассмотрим, например, на множестве $E=[-1,1]$ функцию

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x\le 0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

Интеграл от нее легко вычисляется:

$$\int_E f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx=-1+1=0.$$

Однако функция $f(x)$ не эквивалентна нулю.

2) Функция Дирихле $D(x)$ является интегрируемой по Лебегу, т.к. она эквивалентна нулю.

<u>Теорема 2.7.8.</u> Если интеграл от неотрицательной измеримой ограниченной функции $f(x)$ равен нулю, то эта функция эквивалентна нулю.

<u>Теорема 2.7.9.</u> Если на измеримом множестве E заданы две ограниченные измеримые функции $f(x)$ и $g(x)$, то справедливым оказывается равенство:

$$\int_E [f(x)+g(x)]dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx.$$

Доказательство. Пусть $a < f(x) < b$ и $A < g(x) < B$. Произведем разбиения отрезков $[a,b]$ и $[A,B]$, представляющих области изменения заданных функций:

$$a = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = b, \quad A = Y_0 < Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_N = B.$$

Введем в рассмотрение следующие множества:

$$E_k = (y_k \le f < y_{k+1}), \quad B_i = E(Y_i \le g < Y_{i+1}).$$

Далее рассмотрим множества:

$$T_{ki} = E_k \cap B_i, \quad k = 0,1,\ldots,n-1; \quad i = 0,1,\ldots,N-1. \qquad (2.7.1)$$

Очевидно, что множество E получается дизъюнктивным объединением множеств (2.7.1):

$$E = \coprod_k \coprod_i T_{ki}. \qquad (2.7.2)$$

Поэтому

$$\int_E [f(x)+g(x)]dx = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{N-1} \int_{T_{ki}} [f(x)+g(x)]dx.$$

Но на множестве T_{ki} будут выполняться неравенства

$$y_k + Y_i \le f(x) + g(x) \le y_{k+1} + Y_{i+1},$$

и следовательно, на основании теоремы 2.7.1 будем иметь:

$$(y_k + Y_i)\mu(T_{ki}) \le \int_{T_{ki}} [f(x)+g(x)]dx \le (y_{k+1} + Y_{i+1})\mu(T_{ki}). \qquad (2.7.3)$$

Суммируя по k и i неравенства (2.7.3), получаем:

$$\sum_k\sum_i (y_k + Y_i)\mu(T_{ki}) \le \int_E [f(x)+g(x)]dx \le \sum_k\sum_i (y_{k+1} + Y_{i+1})\mu(T_{ki}).$$

Подсчитаем отдельно сумму $\sum_k\sum_i y_k \mu(T_{ki})$:

$$\sum_k\sum_i y_k\mu(T_{ki}) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k\left(\sum_{i=0}^{N-1}\mu(T_{ki})\right) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k\left(\mu\left(\coprod_{i=1}^{N-1} T_{ki}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k\left(\mu\left(\coprod_{i=1}^{N-1}(E_k \cap B_i)\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} y_k\mu\left(E_k \cap \left(\bigcup_{i=0}^{N-1} B_i\right)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k\mu(E_k \cap E) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k\mu(E_k).$$

Это есть не что иное, как нижняя сумма Лебега $\underline{S}_f$ функции $f(x)$. Проделав похожее с остальными суммами, будем иметь

$$\underline{S}_f + \underline{S}_g \le \int_E [f(x)+g(x)]dx \le \overline{S_f} + \overline{S_g}. \qquad (2.7.4)$$

Перейдя в (2.7.4) к пределу, получаем доказательство утверждения теоремы.

▲

Теорема 2.7.10. Если на измеримом множестве E задана измеримая ограниченная функция $f(x)$ и C – постоянная, то справедливо равенство:

$$\int_E C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_E f(x)dx,$$

т.е. постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

Теорема 2.7.11. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы и ограничены на измеримом множестве E, то выполняется равенство:

$$\int_E [f(x)-g(x)]dx = \int_E f(x)dx - \int_E g(x)dx.$$

Теорема 2.7.12. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы и ограничены на измеримом множестве E, причем $f(x) \le g(x)$, то

$$\int_E f(x)dx \le \int_E g(x)dx.$$

Теорема 2.7.13. Если функция $f(x)$ является измеримой и ограниченной на измеримом множестве E, то

$$\left| \int_E f(x)dx \right| \le \int_E |f(x)|dx.$$

2.8. Предельный переход под знаком интеграла Лебега

Пусть на множестве E задана последовательность измеримых ограниченных функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$, которая почти всюду сходится к измеримой ограниченной функции $f(x)$. Ставится вопрос о справедливости соотношения:

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_E f(x)dx. \qquad (2.8.1)$$

Если (2.8.1) верно, то говорят о предельном переходе под знаком интеграла. Простой пример показывает, что это не всегда так.

Пусть функции $f_n(x)$ определены на отрезке $[0,1]$ следующим образом:

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & x \in \left(0, \dfrac{1}{n}\right), \\ 0, & x \notin \left(0, \dfrac{1}{n}\right). \end{cases}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} n\,dx = 1,$$

но

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_E 0\,dx = 0.$$

Естественно поставить вопрос о тех дополнительных ограничениях на функции $f_n(x)$, чтобы (2.8.1) имело место. Для изучения вопроса о предельном переходе нам понадобится понятие сходимости последовательности $f_n(x)$ функций по мере к функции $f(x)$.

<u>Определение 2.8.1.</u> Пусть на измеримом множестве *E* заданы последовательность измеримых и почти везде конечных функций $f_n(x)$ и измеримая и почти везде конечная функция $f(x)$. Если, каково бы ни было число $\sigma > 0$, окажется, что

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(E\left(|f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\right)\right) = 0, \qquad (2.8.2)$$

то говорят, что последовательность $f_n(x)$ *сходится по мере* к функции $f(x)$ на множестве *E*. Это символически будем обозначать так: $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

<u>Теорема 2.8.1</u> (А. Лебег). Пусть на измеримом множестве *E* задана последовательность измеримых ограниченных функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$, сходящаяся по мере к измеримой ограниченной функции $f(x)$, т.е. $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Если существует такая постоянная *K*, что для каждого $n \in N$ при всех $x \in E$ будет выполняться неравенство $|f_n(x)| < K$, то переходить к пределу под знаком интеграла можно, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

Доказательство. Зададимся числом $\sigma > 0$ и положим

$$A_n = \{x \in E \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\}, \quad B_n = \{x \in E \mid |f_n(x) - f(x)| < \sigma\}.$$

Тогда с учетом того, что $|f(x)| \leq K$ почти для всех $x \in E$, будем иметь:

$$\left|\int_E f_n(x)dx - \int_E f(x)dx\right| \leq \int_E |f_n(x) - f(x)|dx = \int_{A_n} |f_n(x) - f(x)|dx +$$

$$+ \int_{B_n} |f_n(x) - f(x)|dx \leq \int_{A_n} \left(|f_n(x)| + |f(x)|\right)dx + \int_{B_n} \sigma dx \leq 2K \cdot \mu(A_n) + \sigma \cdot \mu(B_n).$$

А это в свою очередь приводит к оценке

$$\left|\int_E f_n(x)dx - \int_E f(x)dx\right| \leq 2K \cdot \mu(A_n) + \sigma \cdot \mu(E).$$

Займемся теперь оценкой каждого из слагаемых, стоящих в правой части. Берем $\varepsilon > 0$ и находим по нему такое $\sigma > 0$, что будет выполняться неравенство:

$$\sigma \cdot \mu(E) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Зафиксируем это $\sigma > 0$. Из определения сходимости по мере (2.8.2) имеем $\mu(A_n) \to 0$, как только $n \to \infty$. Следовательно, для всех $n \geq N_0$ выполняется $2K \cdot \mu(A_n) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, т.е. $\left|\int_E f_n(x)dx - \int_E f(x)dx\right| < \varepsilon$.

▲

Замечание 2.8.1. 1) Доказанная теорема остается справедливой и в случае, когда неравенство $|f_n(x)|<K$ выполняется лишь почти всюду на множестве E.

2) При сходимости $f_n \xrightarrow{п.в.} f$ теорема также остается в силе, поскольку из сходимости почти всюду следует сходимость по мере.

2.9. Сравнение интегралов Римана и Лебега

Пусть на отрезке $[a,b]$ определена функция $f(x)$, вообще говоря, не являющаяся ограниченной на нём. Пусть $x_0\in[a,b]$ и $\delta>0$. Обозначим $m_\delta(x_0)$ и $M_\delta(x_0)$ соответственно точную нижнюю и точную верхнюю границы значений функции $f(x)$ на интервале $(x_0-\delta,x_0+\delta)$, т.е.

$m_\delta(x_0)=\inf\{f(x)\}$, $M_\delta(x_0)=\sup\{f(x)\}$, $x\in\{(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap[a,b]\}$. Тогда, очевидно,

$$m_\delta(x_0)\le f(x_0)\le M_\delta(x_0).$$

Если уменьшать $\delta>0$, то $m_\delta(x_0)$ может только расти, а $M_\delta(x_0)$ – убывать. Поэтому существуют пределы

$$\lim_{\delta\to 0+} m_\delta(x_0)=m(x_0), \quad \lim_{\delta\to 0+} M_\delta(x_0)=M(x_0).$$

Причем, очевидно, что

$$m_\delta(x_0)\le m(x_0)\le f(x_0)\le M(x_0)\le M_\delta(x_0).$$

Определение 2.9.1. Функции $m(x)$ и $M(x)$ называются соответственно нижней и верхней функциями Бэра для функции $f(x)$.

Замечание 2.9.1. Функции Бэра $m(x)$ и $M(x)$ являются измеримыми.

Теорема 2.9.1 (Р. Бэр). Пусть функция $f(x)$ в точке x_0 принимает конечное значение. Для того, чтобы $f(x)$ была непрерывной в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$m(x_0)=M(x_0).$$

Замечание 2.9.1. Интегрируемость по Риману ограниченной функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ равносильна тому, что $M(x)\sim m(x)$. В самом деле, для интегрируемости $f(x)$ по Риману, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство:

$$(L)\int_a^b [M(x)-m(x)]dx=0,$$

из которого в виду неравенства $M(x)-m(x)\ge 0$ следует требуемое.

Теорема 2.9.2. Всякая функция, интегрируемая по Риману, будет интегрируемой в смысле Лебега и оба интеграла совпадают.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ является интегрируемой на отрезке $[a,b]$. Тогда она необходимо ограничена на нем и $M(x)\sim m(x)$. Но $m(x)\le f(x)\le M(x)$, следовательно,

$$f(x)\sim m(x), \qquad (2.9.1)$$

и значит, $f(x)$ измеримая как функция эквивалентная измеримой. А тогда она интегрируема по Лебегу и на основании (2.9.1) имеем

$$(L)\int_a^b f(x)dx = (L)\int_a^b m(x)dx. \qquad (2.9.10)$$

Если $\underline{\sigma_n}$ – нижняя сумма Дарбу, то можно записать соотношения

$$\underline{\sigma_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} (R)\int_a^b f(x)dx,$$

$$\underline{\sigma_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} (L)\int_a^b m(x)dx.$$

С учётом (2.9.10) отсюда получаем доказательство теоремы.

▲

2.10. Интеграл Лебега от неотрицательной измеримой функции

Займемся теперь обобщением определения интеграла Лебега на неограниченные функции. Сначала будем рассматривать неотрицательные функции.

<u>Теорема 2.10.1.</u> Пусть функция $f(x)$ является измеримой и неотрицательной на множестве *E*, а *N* – натуральное число. Тогда функция $[f(x)]_N$, определяемая формулой

$$[f(x)]_N = \begin{cases} f(x), & f(x) \le N, \\ N, & f(x) > N, \end{cases}$$

будет измеримой.

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно следует из рассмотрения множества Лебега функции $[f(x)]_N$:

$$E\{[f]_N > a\} = \begin{cases} E(f > a), & a < N, \\ \varnothing, & a \ge N. \end{cases}$$

▲

В условиях теоремы функция $[f(x)]_N$ является ограниченной и поэтому интегрируемой по Лебегу. Из определения функции $[f(x)]_N$ имеем очевидные неравенства

$$[f(x)]_1 \le [f(x)]_2 \le [f(x)]_3 \le \dots,$$

из которых вытекают соотношения

$$\int_E [f(x)]_1 dx \le \int_E [f(x)]_2 dx \le \int_E [f(x)]_3 dx \le \dots .$$

Поэтому существует конечный или бесконечный предел этой числовой последовательности

$$\lim_{N\to\infty} \int_E [f(x)]_N dx. \qquad (2.10.1)$$

Определение 2.10.1. Предел (2.10.1) называется *интегралом Лебега* функции $f(x)$ по множеству E. Он обозначается стандартным символом, т.е.

$$\int_E f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_E [f(x)]_N dx. \qquad (2.10.2)$$

Если этот интеграл конечен, то функция $f(x)$ называется интегрируемой в смысле Лебега или суммируемой на множестве E.

Замечание 2.10.1. Нетрудно видеть, что для ограниченной (измеримой и неотрицательной) функции $f(x)$ новое определение интеграла совпадает с данным ранее, т.к. при достаточно большом числе N будет выполняться равенство

$$[f(x)]_N = f(x).$$

Поэтому всякая ограниченная (измеримая и неотрицательная) функция будет суммируемой.

Теорема 2.10.1. Если функция $f(x)$ является суммируемой на множестве E, то она почти всюду конечна на этом множестве.

Доказательство. Положим $A = E(f = +\infty)$. На множестве A функция $[f(x)]_N$ равна N, поэтому

$$\int_E [f(x)]_N dx \geq \int_A [f(x)]_N dx = N \cdot \mu(A).$$

Если бы оказалось, что $\mu(A) > 0$, то интеграл $\int_E [f(x)]_N dx$ возрастал бы неограниченно вместе с N, что противоречит суммируемости $f(x)$.

▲

Теорема 2.10.2. Если $\mu(E) = 0$, то всякая неотрицательная функция $f(x)$ будет суммируемой на множестве E, причем будет выполняться соотношение

$$\int_E f(x)dx = 0.$$

Теорема 2.10.3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны на множестве E, т.е. $f \sim g$, то справедливо равенство

$$\int_E f(x)dx = \int_E g(x)dx.$$

Теорема 2.10.4. Если функция $f(x)$ неотрицательна и измерима на множестве E, а E_0 – измеримое подмножество множества E, то справедливо неравенство

$$\int_{E_0} f(x)dx \leq \int_E f(x)dx.$$

Теорема 2.10.5. Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ являются неотрицательными измеримыми функциями, заданными на множестве E, $k \geq 0$ и $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Тогда оказываются справедливыми равенства

$$\int_E (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_E f(x)\,dx,$$

$$k\int_E f(x)\,dx = \int_E kf(x)\,dx.$$

Теорема 2.10.6. Пусть $E=\coprod_k E_k$. Тогда для всякой неотрицательной измеримой функции $f(x)$, определенной на множестве E, будет справедливым равенство

$$\int_E f(x)dx=\sum_k \int_{E_k} f(x)dx.$$

2.11. Суммируемые функции

Будем теперь распространять определение интеграла Лебега на неограниченные функции любого знака. Это оказывается возможным не для всех измеримых функций.

Предположим, что функция $f(x)$ измерима и определена на измеримом множестве E. Введем в рассмотрение функции

$$f_+(x)=\begin{cases} f(x), & f(x)\ge 0,\\ 0, & f(x)<0.\end{cases} \qquad (2.11.1)$$

и

$$f_-(x)=\begin{cases} 0, & f(x)\ge 0,\\ -f(x), & f(x)<0.\end{cases} \qquad (2.11.2)$$

Эти функции будут измеримыми и неотрицательными, поэтому существуют оба интеграла $\int_E f_+(x)dx$ и $\int_E f_-(x)dx$ (они могут быть и бесконечными). Нетрудно заметить, что

$$f(x)=f_+(x)-f_-(x).$$

Поэтому условимся считать, что

$$\int_E f_+(x)dx-\int_E f_-(x)dx=\int_E f(x)dx. \qquad (2.11.3)$$

Разность, стоящая в левой части (2.11.3), имеет смысл, если хотя бы одна из функций (2.11.1), (2.11.2) окажется суммируемой (разность в (2.11.3) может быть равной и бесконечности).

Определение 2.11.1. Если хотя бы одна из функций $f_+(x)$ или $f_-(x)$ окажется суммируемой на множестве E, то разность (конечная или бесконечная), стоящая в левой части (2.11.3), называется интегралом Лебега от функции $f(x)$ по множеству E и обозначается $\int_E f(x)dx$, т.е.

$$\int_E f(x)dx=\int_E f_+(x)dx-\int_E f_-(x)dx. \qquad (2.11.4)$$

Замечание 2.11.1. Для того, чтобы интеграл Лебега существовал и был конечным числом, необходимо и достаточно, чтобы обе функции $f_+(x)$ и $f_-(x)$ были суммируемыми.

Определение 2.11.2. Функция $f(x)$ называется интегрируемой по Лебегу или суммируемой на множестве E, если интеграл (2.11.4) существует и конечен. Класс всех функций, заданных и суммируемых на множестве E, обозначают символом $L(E)$ или просто L.

Теорема 2.11.1. Для того чтобы измеримая функция $f(x)$ была суммируемой на множестве *E*, необходимо и достаточно, чтобы суммируемой была функция $|f(x)|$. Если это условие выполнено, то

$$\left|\int_E f(x)dx\right| \le \int_E |f(x)|dx. \qquad (2.11.5)$$

Доказательство. Справедливость утверждения теоремы вытекает из того, что

$|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$. В самом деле

$$\left|\int_E f(x)dx\right| = \left|\int_E f_+(x)dx - \int_E f_-(x)dx\right| \le \int_E \left(f_+(x) + f_-(x)\right)dx = \int_E |f(x)|dx.$$

▲

К свойствам суммируемых функций относятся следующие утверждения.

Теорема 2.11.2. Суммируемая на множестве *E* функция $f(x)$ будет почти всюду конечной на нем.

Теорема 2.11.3. Если *E* – множество меры нуль, т.е. $\mu(E) = 0$, то на этом множестве каждая функция $f(x)$ будет суммируемой и

$$\int_E f(x)dx = 0.$$

Теорема 2.11.4. Функция $f(x)$, суммируемая на некотором множестве *E*, будет суммируемой и на всяком его измеримом подмножестве.

Теорема 2.11.5. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ являются измеримыми на множестве *E* и $|f(x)| \le g(x)$. Если суммируема функция $g(x)$, то будет суммируемой и функция $f(x)$.

Теорема 2.11.6. Если $f(x) \sim g(x)$ на множестве *E*, то из существования одного из интегралов $\int_E f(x)dx$ и $\int_E g(x)dx$ следует существование другого и их равенство.

Теорема 2.11.7. Если функция $f(x)$ суммируема на множестве *E*, а $\varphi(x)$ – измерима и ограничена на нем, то их произведение $f(x)\varphi(x)$ является функцией, суммируемой на множестве *E*.

Теорема 2.11.8 (абсолютная непрерывность интеграла Лебега). Пусть функция $f(x)$ суммируема на множестве *E*. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого измеримого подмножества $E_\delta \subset E$ такого, что $\mu(E_\delta) < \delta$, будет выполняться соотношение

$$\left|\int_{E_\delta} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

2.12. Функции, интегрируемые с квадратом

Будем в дальнейшем рассматривать функции, заданные на множестве $E = [a; b]$.

Определение 2.12.1. Измеримая функция $f(x)$ называется функцией, интегрируемой (суммируемой) с квадратом, если

$$\int_a^b f^2(x)\,dx < +\infty.$$

Множество таких функций обычно обозначают символом L_2.

Приведем ряд утверждений, которые характерны для функций класса L_2.

Теорема 2.12.1. Всякая функция $f(x)$, интегрируемая с квадратом, является интегрируемой, т.е. $L_2 \subset L$.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из теоремы 2.11.5, если учесть, что

$$|f(x)| \le \frac{1+f^2(x)}{2}.$$

▲

Теорема 2.12.2. Произведение двух функций $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемых с квадратом, есть функция интегрируемая.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из теоремы 2.11.5. если учесть, что

$$|f(x)g(x)| \le \frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}.$$

▲

Теорема 2.12.3. Алгебраическая сумма функций $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемых с квадратом, есть функция, интегрируемая с квадратом.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из тождества

$$\left(f(x) \pm g(x)\right)^2 = f^2(x) \pm 2f(x)g(x) + g^2(x).$$

▲

Теорема 2.12.4 (неравенство Коши-Буняковского). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы с квадратом, т.е. $f(x), g(x) \in L_2$, то справедливым оказывается соотношение:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b g^2(x)dx\right). \qquad (2.12.1)$$

Доказательство. Будем рассматривать квадратный трехчлен $\psi(u) = Au^2 + 2Bu + C$, причем $A > 0$. Если $\psi(u) \ge 0$ при всех u, то $B^2 \le AC$ (в случае невыполнения последнего неравенства оказалось бы, что $\psi\left(-\frac{B}{A}\right) = \frac{1}{A}\left(AC - B^2\right) < 0$). Положим теперь

$$\psi(u) = \int_a^b \left[u f(x) + g(x)\right]^2 dx = u^2\int_a^b f^2(x)dx + 2u\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx.$$

Этот многочлен является неотрицательным, поэтому для него будет выполняться соотношение (2.12.1).

▲

Следствие 2.12.1. Если $f \in L_2$, то

$$\int_a^b |f(x)| dx \le \sqrt{b-a} \cdot \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}.$$

Теорема 2.12.5 (неравенство Коши). Если $f, g \in L_2$, то выполняется неравенство

$$\sqrt{\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)^2 dx} \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}. \qquad (2.12.2)$$

Доказательство. Рассмотрим неравенство (2.12.1) и извлечем квадратный корень из обеих его частей:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx},$$

откуда следует

$$2\int_a^b f(x)g(x)dx \le 2\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}.$$

Тогда

$$\int_a^b f^2(x)dx + 2\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \le$$
$$\le \int_a^b f^2(x)dx + 2\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx} + \int_a^b g^2(x)dx$$

или

$$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)^2 dx \le \left(\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}\right)^2,$$

что и завершает доказательство теоремы.

▲

Замечание 2.12.1. Неравенство Коши (2.12.2) позволяет рассматривать множество L_2 с новой точки зрения. Именно, если мы сопоставим каждой функции $f \in L_2$ число, обозначаемое $\|f\|$:

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx},$$

то будем иметь следующее:

- $\|f\| \ge 0$, причем $\|f\| = 0$ тогда и только тогда, когда $f \sim 0$.
- $\|k \cdot f\| = |k| \cdot \|f\|$, k– число, в частности $\|f\| = \|-f\|$.
- $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$.

Число $\|f\|$ называется нормой функции $f(x)$. Аналогия между числами $\|f\|$ и $|x|$ бросается в глаза. Введение нормы позволяет на множество L_2 смотреть как на некоторое пространство, в котором можно производить измерения, если принять число $\rho(f,g) = \|f-g\|$ за расстояние между элементами $f, g \in L_2$. Эта точка зрения принадлежит Д. Гильберту, поэтому пространство L_2 часто называют пространством Гильберта.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Является ли конечное множество, состоящее из числа 0, пустым множеством?

2. Приведите примеры подмножеств известных вам множеств. Какие из этих подмножеств являются собственными подмножествами?

3. Какое множество имеет большую мощность, множество натуральных чисел или множество нечетных чисел? Множество нечетных чисел или множество простых чисел?

4. Можно ли сказать. Что если $A=B$, то $A \sim B$ и, наоборот, можно ли сказать, что, если $A \sim B$, то $A=B$? Приведите примеры.

5. Назовите несколько счетных множеств. Покажите их эквивалентность друг другу.

6. Докажите, что разность $A \setminus B$ счетного множества A и конечного множества B есть конечное множество.

7. Рассмотрите все подмножества некоторого конечного непустого множества и убедитесь, что число этих подмножеств больше числа элементов исходного множества.

8. Докажите, что всякое конечное множество не может быть эквивалентным своей собственной части.

9. Докажите счетность множества простых чисел.

10. Покажите равномощность множеств точек интервалов $(0, 2)$ и $(1, 6)$; $(1, 3)$ и (a, b) при помощи формул и геометрически.

11. Покажите равномощность множеств точек прямой и полупрямой.

12. Покажите, что множество точек произвольной окружности эквивалентно множеству всех точек прямой.

13. Покажите, что множество всех конечных десятичных дробей есть множество счетное.

14. Приведите примеры множеств мощности континуума, кроме множества всех действительных чисел, множества чисел отрезка, множества чисел интервала.

15. Приведите примеры ограниченных бесконечных множеств. Укажите, из каких точек состоят их производные множества.

16. Может ли некоторое множество быть одновременно и замкнутым и открытым? Существуют ли множества одновременно не замкнутые и не открытые? Приведите примеры.

17. Могут ли все точки некоторого множества быть его граничными точками?

18. Приведите примеры множеств, включающих в себя все свои граничные точки, не включающих в себя ни одной граничной точки, включающих в себя часть своих граничных точек.

19. Докажите, что конечное множество не может иметь предельных точек.

20. Приведите примеры линейных ограниченных множеств. Укажите для каждого из них верхнюю и нижнюю грани.

21. Приведите примеры линейных ограниченных множеств, содержащих обе свои грани, одну из них, и не содержащих граней.

22. Докажите, что для измеримости ограниченного множества E необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ существовало такое открытое множество $G \supset E$, что $m^*(G \setminus E) < \varepsilon$.

23. Какой особенностью отличается множество точек разрыва ограниченной функции, которая является интегрируемой по Лебегу, но не интегрируемой по Риману? Приведите примеры таких функций.

24. Докажите измеримость функции $f(x) = D(x) \cdot \sin(x)$, определенной на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, где $D(x)$ – функция Дирихле.

25. Вычислите интеграл Лебега функции $f(x) = \varphi(x)$, если x рационально, $f(x) = [\varphi(x)]^2$, если x иррационально, где $\varphi(x)$ – некоторая непрерывная функция на множестве точек отрезка $[0,1]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антоневич, А.Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения: учебник / А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно. – Минск: БГУ, 2006. – 430 с.

2. Вулих, Б.З. Краткий курс теории функций действительного переменного / Б.З. Вулих. – М.: Наука, 1965. – 302 с.

3. Макаров, И.П. Теория функций действительного переменного / И.П. Макаров. – М.: Просвещение, 1958. – 175 с.

4. Очан, Ю.С. Сборник задач и теорем по теории функций действительного переменного / Ю.С. Очан. – М.: Просвещение, 1965. – 230 с.

5. Соболев, В.И. Лекции по дополнительным главам математического анализа / В.И. Соболев. – М.: Наука, 1968. – 288 с.

6. Натансон, И.П. Теория функций вещественной переменной / И.П. Натансон. – М.: Наука, 1974. – 480 с.

7. Александров, П.С. Теория функций действительного переменного и теория топологических пространств / П.С. Александров. – М.: Наука, 1978. – 418 с.

Учебное издание

ШЛАПАКОВ Сергей Алексеевич

БОРОДИЧ Сергей Митрофанович

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Методические рекомендации

Технический редактор *Г.В. Разбоева*

Компьютерный дизайн *И.В. Волкова*

Подписано в печать 2013. Формат $60x84^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,96. Уч.-изд. л. 1,81. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
ЛИ № 02330/110 от 30.01.2013.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.