Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра алгебры и методики преподавания математики

МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации

ЧАСТЬ 4: Уравнения, неравенства

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2012

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
П62

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 1 от 13.09.2012 г.

Составители: доцент кафедры алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат педагогических наук **А.В. Виноградова;** доцент кафедры алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат педагогических наук **В.В. Устименко**

Р е ц е н з е н т :
заведующий кафедрой геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент
С.А. Шлапаков

Математика : методические рекомендации / сост. :
П62 А.В. Виноградова, В.В. Устименко. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2012. – Ч. 4 : Уравнения, неравенства. – 51 с.

Данные методические рекомендации написаны в соответствии с действующей программой по математике и предназначены для студентов дневного и заочного отделений факультета начальных классов вузов. Автор кратко излагает необходимый теоретический материал, затем приводит подробно разобранные примеры и, наконец, дает примерные задания контрольной работы для самостоятельного решения.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ВВЕДЕНИЕ

Курс математики призван дать студентам педагогического факультета подготовку, необходимую для успешного обучения математике учащихся начальных классов.

Как известно, одними из основных понятий курса математики являются действительные числа и действия над ними, величины и их измерение. Существующие в настоящее время трактовки понятий числа и величины требуют от студентов овладения рядом понятий математики, таких, как «уравнение», «неравенство», «функция», «текстовая задача» и др. Овладеть курсом математики, приобрести необходимые умения и навыки можно лишь в процессе решения математических задач. Предлагаемые методические рекомендации призваны оказать помощь студентам педагогического факультета в достижении этой цели.

В данной работе большое внимание уделяется вопросам совершенствования логической грамотности учителя, формированию у него в процессе решения задач таких умений, как умение разграничивать математический и методический материал, умение анализировать задания из учебников математики начальных классов с точки зрения используемых при их выполнении теоретических положений и др.

В методическое пособие включены такие темы, как «Уравнения, неравенства, их системы и совокупности», «Текстовые задачи». Все темы хорошо проиллюстрированы и содержат задачи с решениями и обоснованиями по данным темам.

Структура издания такова: материал разбит на темы, некоторые темы – на пункты. Выделение пунктов – небольших по объему порций теоретического материала и задач, должно помочь студентам не только не только лучше овладеть необходимыми знаниями, но и более четко организовать свою самостоятельную учебную деятельность.

1. УРАВНЕНИЯ. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

1.1 УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Возьмем два выражения с переменной: $4x$ и $5x+2$. Соединив их, знаком равенства, получим предложение 4x=5x+2. Оно содержит: переменную и при подстановке значений переменной обращается в высказывание. Например, при $x=-2$ предложение $4x=5x+2$ обращается в истинное числовое равенство $4(-2) = 5(-2)+2$, а при $x=1$ - в ложное $4\cdot 1=5(1)+2$. Поэтому предложение $4x=5x+2$ есть высказывательная форма. Ее называют *уравнением с одной переменной.*

В общем виде уравнение с одной переменной можно определить так:

***Пусть f(x) и g(x) - два выражения с переменной x и областью определения X. Тогда высказывательная форма (или равенство) вида f(x)= g(x) называется уравнением с одной переменной*.**

Областью определения (или областью допустимых значений переменной $\boldsymbol{x}$ уравнения $f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$ называют множество всех значений переменной $\boldsymbol{x}$, при которых одновременно имеют смысл выражения $f(\boldsymbol{x})$ и $g(\boldsymbol{x})$.

Чтобы определить область определения уравнения $f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$, нужно найти пересечение множеств определения выражений $f(\boldsymbol{x})$ и $g(\boldsymbol{x})$.

Значение переменной x из множества X, при котором уравнение обращается в истинное числовое равенство, называется *корнем уравнения* (или его решением). *Решить уравнение* - это значит найти множество его корней.

Если множество всех корней уравнения $\mathrm{f}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{g}(\boldsymbol{x})$ состоит из k не равных между собой чисел $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_k}$, то говорят, что это уравнение имеет только ровно k корней, то есть множество всех его корней есть множество $\{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_k}\}$.

Если множество всех корней уравнения $\mathrm{f}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{g}(\boldsymbol{x})$ состоит из одного числа $\boldsymbol{x_0}$, то говорят, что это уравнение имеет единственный корень $\boldsymbol{x_0}$.

Если множество всех корней уравнения – пустое множество, то пишут «уравнение не имеет корней», либо знак $\varnothing$.

Так, корнем уравнения 4х=5х+2, если рассматривать его на множестве **R** действительных чисел, является число -2. Других корней это, уравнение не имеет. Значит, множество его корней есть {-2}.

Пусть на множестве действительных чисел задано уравнение *(х-1)(х+2)=0*. Оно имеет два корня – числа 1 и -2. Следовательно, множество корней данного уравнения таково: *{-2,-1}*.

Уравнение *(3х+1)-2=6х+2*, заданное на множестве действительных чисел, обращается в истинное числовое равенство при всех; действительных значениях переменной *х*: если раскрыть скобки в левой части, то получим *6х+2=6х+2*. В этом случае говорят, что его корнем является любое действительное число, а множеством корней является множество всех действительных чисел.

Уравнение (*3х+1)-2=6х+1*, заданное на множестве действительных чисел, не обращается в истинное числовое равенство ни при одном действительном значении *х* (после раскрытия скобок в левой, части получаем, что *6х+2=6х+1*, что невозможно ни при одном *х*). В этом случае говорят, что уравнение не имеет корней, и что множество его корней пусто.

Виды уравнений:

Линейное уравнение имеет общий вид $ax + b = 0$.

Под **алгебраическим** уравнением принято понимать уравнение, которое может быть записано в виде $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, где a_n, a_{n-1}, … , a_0 – заданные числа, x – неизвестное. n – наибольшую степень неизвестного – называют степенью алгебраического уравнения. Уравнение называется **алгебраическим,** если над неизвестным не совершается иных действий, кроме умножения, вычитания, умножения, деления, и вынесение общего множителя за скобки, возведение в целую положительную степень. Например $6x-(3-2x)=(3x+4)+5x-1$; Например $\frac{5x+1}{3}-\frac{20x+1}{5}=\frac{8-5x}{6}$.

Уравнение второй степени имеет общий вид $ax^2+bx+c=0$, биквадратное $ax^4+bx^2+c=0$. *Возвратное уравнение* : $ax^4+bx^3+cx^2+bmx+am^2=0$. *Уравнение n-ой степени* имеет общий вид следующий: $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0, a_0\neq 0$.

Дробное алгебраическое уравнение содержит в знаменателе выражение, зависящее от неизвестных, с помощью тождественных преобразований его можно привести к виду $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены. Алгебраическое уравнение называется дробно-рациональным, если его запись содержит хотя бы одну алгебраическую дробь, знаменатель которой не является многочленом нулевой степени.

Например, уравнения $\frac{1}{x}=3$; $\frac{x^2+4}{5x-2}=1$; $\frac{2}{x^2-+1}=\frac{1}{x+1}+\frac{2x-1}{x^3+1}$. являются дробно-рациональными.

Иррациональным алгебраическим называется уравнение, в котором некоторое рациональное или алгебраическое выражение от неизвестного находится под знаком радикала. Например, $x+2=\sqrt{x+1}$.При решении иррациональных уравнений в элементарной математике ставится задача отыскания только действительных корней.

Уравнения, не сводящиеся к алгебраическим с помощью элементарных алгебраических преобразований (умножение, перенесение слагаемых из одной части уравнения в другую, приведение подобных слагаемых и вынесение общего множителя за скобки, возведение в целую положительную степень), называются *трансцендентными.*

Показательным называется уравнение, содержащее неизвестное только в показателях степени при основаниях, которые могут быть либо числами, либо параметрами *(* $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ *где* $a > 0, a \neq 1$*).*

Логарифмическим называется уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифмической функции, основание которой либо число, либо параметр ($log_a f(x) = log_a g(x)$*, где* $a > 0, a \neq 1$.

Тригонометрические уравнения содержат в себе тригонометрические функции. Решение произвольного тригонометрического уравнения, как правило, сводится к решению одного или нескольких простейших уравнений *(* $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$ *).*

Чтобы решить какое-либо уравнение, его сначала преобразовывают, заменяя другим, более простым; полученное уравнение опять преобразовывают, заменяя более простым, и т.д. Этот процесс продолжают до тех пор, пока не получают уравнение, корни которого можно найти известным способом. Но чтобы эти корни были корнями заданного уравнения, необходимо, чтобы в процессе преобразований получились уравнения, множества корней которых совпадают. Такие уравнения называют *равносильными.*

Два уравнения $f_1(x)=g_1(x)$ ***и*** $f_2(x)=g_2(x)$ ***называются равносильными, если множества их корней совпадают***.

Например, уравнения $x^2-9=0$ *и* $(2x+6)(x-3)=0$ равносильны, так как оба имеют своими корнями числа *3* и *-3*. Равносильны и уравнения $(3x+1)2=6x+1$ *и* $x^2+1=0$, так как оба не имеют корней.

Замена уравнения равносильным ему уравнением называется равносильным преобразованием.

Выясним теперь, какие преобразования позволяют получать равносильные уравнения.

Теорема 1. Пусть уравнение *f(x) = g(x)* задано на множестве и *h(x)* - выражение, определенное на том же множестве. Тогда уравнения *f(x)=g(x)* (1) и *f(x)+h(x)=g(x)+h(x)* (2) равносильны.

Доказательство. Обозначим через T_1 -множество решений уравнения (1), а через T_2, - множество решений уравнения (2). Тогда уравнения (1) и (2) будут равносильны, если $T_1 = T_2$,. Чтобы убедиться в этом, необходимо показать, что любой корень из T_1, является корнем уравнения (2) и, наоборот, любой корень из T_2 является корнем уравнения (1).

Пусть число *a* – корень уравнения (1). Тогда $a \in T_1$, и при подстановке в уравнение (1) обращает его в истинное числовое равенство *f(a)=g(a),* а выражение *h(x)* обращает в числовое выражение *h(a),* имеющее смысл на множестве X. Прибавим к обеим частям истинного равенства *f(a)=g(a)* числовое выражение *h(a).* Получим, согласно свойствам истинных числовых равенств, истинное числовое равенство *f(a)+h(a)=g(a)+h(a),* которое свидетельствует о том, что число, а является корнем уравнения (2). Т. о. доказано, что каждый корень уравнения (1) является корнем и уравнения (2), т.е. $T_1 \subset T_2$.

Пусть теперь *a* - корень уравнения (2). Тогда $a \in T_2$ и при подстановке в уравнение (2) обращает его в истинное числовое равенство *f(a)+h(a)=g(a)+h(a).* Прибавим к обеим частям этого равенства числовое выражение *−h(a).* Получим истинное числовое равенство *f(a)=g(a)*, которое свидетельствует о том, что число *a* - корень уравнения (1). Т. о. доказано, что каждый корень уравнения (2) является и корнем уравнения (1), т.е $T_2 \subset T_1$.

Так как $T_1 \subset T_2$ и $T_2 \subset T_1$, то по определению равных множеств $T_2 = T_1$, а значит, уравнения (1) и (2) равносильны.

Данную теорему можно сформулировать иначе: если к обеим частям уравнения с областью определения X прибавить одно и то же выражение с переменной, определенное на том же множестве, то получим новое уравнение, равносильное данному.

Из этой теоремы вытекают **следствия**:

1. *Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число, то получим уравнение, равносильное данному.*

2. *Если какое-либо слагаемое (числовое выражение или выражение с переменной) перенести из одной части уравнения в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный, то получим уравнение, равносильное данному.*

Теорема 2. Пусть уравнение $f(x)=g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ - выражение, которое определено на том же множестве и не обращается в нуль ни при каких значениях x из множества X. Тогда уравнения $f(x)=g(x)$*и* $f(x)h(x)=g(x)h(x)$ равносильны.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1. Теорему 2 можно сформулировать иначе: если обе части уравнения с областью определения X умножить на одно и то же выражение, которое определено на том же множестве и не обращается на нем в нуль, то получим новое уравнение, равносильное данному.

Из этой теоремы вытекает **следствие**: *если обе части уравнения умножить (или разделить) на одно и то же число, отличное от нуля, то получим уравнение, равносильное данному.*

Приведем некоторые примеры *равносильных уравнений*: пусть на некотором множестве заданы функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ и $h(x)$.

1) уравнения $f(x) = g(x)$ и $f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$ равносильны;

2) уравнения $f(x) = g(x)$ и $f(x) - g(x)= 0$ равносильны, для любого $a \neq 0$;

4) уравнения $f(x) = g(x)$ и $f(x) = \varphi(x)$ равносильны, если для любого действительного х справедливо тождественное равенство $g(x) = \varphi(x)$.

5) уравнения $f(x) = g(x)$ и $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ равносильны для любого положительного числа $a \neq 1$.

6) уравнения $f(x) = g(x)$ и $f(x)^n = g(x)^n$ равносильны, если $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны и n натуральное число.

7) уравнения $f(x)=g(x)$ и $f(x)\bullet h(x)=g(x)\bullet h(x)$ равносильны при $h(x)\neq 0$;

8) уравнения $f(x)=g(x)$ и $f(x):h(x)=g(x):h(x)$ равносильны при $h(x)\neq 0$;

9) пусть число a таково, что $a>0$ и $a\neq 1$ и пусть на некотором множестве функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ положительны. Тогда на этом же множестве уравнения $f(x) = g(x)$ и $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильны.

Из *неравносильных преобразований* чаще всего используют:

1) преобразования, связанные с освобождением от знаменателя;
2) преобразования, связанные с сокращением на общий множитель;
3) преобразования, связанные с возведением в натуральную степень;
4) преобразования, связанные с логарифмическими формулами и логарифмированием уравнения;
5) преобразования, связанные с освобождением от знака абсолютной величины;
6) преобразования, связанные с тригонометрическими формулами и пр.

Укажем на некоторые из них:

1) $\left(f(x)=g(x)\right)\Rightarrow\left(f^{2k}(x)=g^{2k}(x)\right)$, где k - натуральное число;

2) $\left(f(x)+h(x)=g(x)+h(x)\right)\Rightarrow\left(f(x)=g(x)\right)$;

3) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}=h(x)\right)\Rightarrow\left(f(x)=g(x)\cdot h(x)\right)$;

4) $\left(\dfrac{f(x)\cdot h(x)}{g(x)\cdot h(x)}=0\right)\Rightarrow\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}=0\right)$;

5) $\left(\dfrac{f(x)}{h(x)}=\dfrac{g(x)}{h(x)}\right)\Rightarrow\left(f(x)=g(x)\right)$.

6) $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$.

Задача. Решим уравнение $1-\dfrac{x}{3}=\dfrac{x}{6}$ и обоснуем все преобразования, которые будут выполняться в процессе решения.

Преобразования	Обоснование преобразований
1. Приведем выражения, стоящие в левой и правой частях уравнения, к общему знаменателю: $\frac{6-2x}{6}=\frac{x}{6}$.	Выполнили тождественное преобразование выражения в левой части уравнения.
2. Отбросим общий знаменатель: $6 - 2x = x$.	Умножили на 6 обе части уравнения (теорема 2), получили уравнение, равносильное данному.
3. Выражение $-2x$ переносим в правую часть уравнения с противоположным знаком: $6 = x + 2x$.	Воспользовались следствием из теоремы 1, получили уравнение, равносильное предыдущему и, значит, данному.
4. Приводим подобные члены в правой части уравнения: $6 = 3x$.	Выполнили тождественное преобразование выражения.
5. Разделим обе части уравнения на 3: $x = 2$.	Воспользовались следствием из теоремы 2, получили уравнение, равносильное предыдущему, а значит, и данному.

Так как все преобразования, которые мы выполняли, решая данное уравнение, были равносильными, то можно утверждать, что 2 – корень этого уравнения.

Если же в процессе решения уравнения не выполняются условия теорем 1 и 2, то может произойти потеря корней или могут появиться посторонние корни. Поэтому важно, осуществляя преобразования уравнения с целью получения более простого, следить за тем, чтобы они приводили к уравнению, равносильному данному.

Рассмотрим, например, уравнение $x\ (x - 1) = 2x,\ x \in R$. Разделим обе части на x, получим уравнение $x - 1 = 2$, откуда $x = 3$, т.е. данное уравнение имеет единственный корень – число 3. Но верно ли это? Нетрудно видеть, что если в данное уравнение вместо переменной x подставить 0, оно обратится в истинное числовое равенство $0 \cdot (0 - 1) = 2 \cdot 0$. А это означает, что 0 – корень данного уравнения, который мы потеряли, выполняя преобразования. Проанализируем их. Первое, что мы сделали, – это разделили обе части уравнения на x, то есть умножили на выражение $\frac{1}{x}$, но при $x = 0$ оно не имеет смысла. Следовательно, мы не выполнили условие теоремы 2, что и привело к потере корня.

Чтобы убедиться в том, что множество корней данного уравнения состоит из двух чисел 0 и 3, приведем другое решение. Перенесем выражение $2x$ из правой части в левую: $x\ (x - 1) - 2x = 0$. Вынесем в левой части уравнения за скобки x и приведем подобные члены: $x\ (x - 3) = 0$. Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из них равен нулю, поэтому $x = 0$ или $x - 3 = 0$. Отсюда получаем, что корни данного уравнения $\{- 0; 3\}$.

В начальном курсе математики теоретической основой решения уравнений является взаимосвязь между компонентами и результатами действий. Например, решим уравнение $(x \cdot 9) : 24 = 3$, используя взаимосвязь между компонентами и результатами действий.

Так как неизвестное находится в делимом, то, чтобы найти делимое, надо делитель умножить на частное: $x \cdot 9 = 24 \cdot 3$, или $x \cdot 9 = 72$. Чтобы найти неизвестный множитель, надо произведение разделить на известный множитель: $x = 72 : 9$, или $x = 8$, следовательно, корнем данного уравнения является число 8.

1.2 ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. Линейные уравнения $ax=b$ решаются следующим образом: если $a \neq 0$ и $b\in R$, то $x=\frac{b}{a}$; если $a=0$ и $b=0$, то $x\in R$; если $a=0$ и $b \neq 0$, то $x\in\varnothing$.

2. Квадратные уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ решаются по готовой формуле $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ или по ***теореме Виета***: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$.

3. Дробно-рациональные уравнения решаются по следующей схеме:

а) перенести все члены уравнения в левую часть;

б) все члены уравнения в левой части привести к общему знаменателю, т.е. уравнение записать в виде $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=0$;

в) решить уравнение $f_1(x) = 0$ при $f_2(x) \neq 0$.

4. Решение иррационального уравнения основано на сведении его с помощью некоторых преобразований к рациональному уравнению. Как правило, это достигается возведением обеих частей уравнения в одну и ту же степень (иногда несколько раз). При возведении обеих частей иррационального уравнения в одну и ту же степень могут появиться посторонние корни, поэтому проверка полученных значений переменной является составной частью решения.

Задача. Решить уравнение $\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x}=1$.

Решение. Перенесем все члены уравнения в левую часть, получим: $\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x}-1=0$.. Приведем все члены уравнения к общему знаменателю, получим: $\frac{2x+x+2-x^2-2x}{x(x+2)}=0$. ОДЗ уравнения $x(x+2)\neq 0$, т.е. $x \neq 0$. $x \neq 2$.

Приведем подобные слагаемые в числителе: $\frac{-x^2+x+2}{x(x+2)}=0$ и решим уравнение $-x^2+x+2=0$.Получим: $x_1=-1$, $x_2=2$;

Ответ: $\{-1; 2\}$.

Задача. Решим уравнение $\sqrt{x}=x-6$. Возводим обе части уравнения в квадрат: $x=x^2-12x+36; x^2-13x+36=0; x_1=4, x_2=9.$

Проверка. $x=4$: $\sqrt{4}=4-6;\ \ 2\neq-2$, следовательно, $x=4$ — посторонний корень, $x=9$: $\sqrt{9}=9-6;\ \ 3=3$ (верное равенство), $x=9$ — корень уравнения.

Ответ: $\{9\}$.

Существуют методы, применяемые для всех видов уравнений и приводящие к более простым уравнениям. К таким методам относится метод группировки, метод введения новой переменной и метод подбора.

Метод группировки. Путем группировки слагаемых, применяя формулы сокращенного умножения, привести (если удастся) уравнение к виду, когда слева записано произведение нескольких множителей, а справа – нуль. Затем приравниваем к нулю каждый из множителей.

Задача. Решим уравнение $x^3 - 3x + 2 = 0$. Запишем уравнение, учитывая, что $-3x = -x - 2x$, следующим образом: $x^3 - x - 2x + 2 = 0$.

Группируем: $x(x^2-1) - 2(x-1) = 0 \Rightarrow (x-1)(x(x+1)-2) = 0 \Rightarrow x-1 = 0$ или $x^2 + x - 2 = 0$. Получаем, что $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$.

Ответ: $\{0: 1; -2\}$.

Сведение уравнения к более простому виду с помощью введения новой переменной.

Ищем в уравнении некоторое повторяющееся выражение, которое обозначим новой переменной, тем самым упрощая вид уравнения. В некоторых случаях, очевидно, что удобно обозначить.

Задача. Решить уравнение $\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}+4=0$.

Решение. С помощью подстановки $\frac{x^2+x-5}{x}=t$ получаем $t+\frac{3}{t}+4=0$. Далее решаем его как дробно-рациональное уравнение : $\frac{t^4+4t+3}{t}=0$;

$t^2 + 4t + 3 = 0$ и $t \neq 0$; $t_1 = –3$, $t_2 = –1$. Тогда $\frac{x^2+x-5}{x}=-3$ и $\frac{x^2+x-5}{x}=-1$.

Решаем получившиеся уравнения:

$\frac{x^2+x-5+3x}{x}=0$	$\frac{x^2+x-5+x}{x}=0$
$x^2 + 4x – 5 = 0$	$x^2 + 2x – 5 = 0$
$x_1 = –5$, $x_2 = 1$; $x \neq 0$	$x_3 = -1-\sqrt{6}$, $x_4 = -1+\sqrt{6}$ 1; $x \neq 0$

Ответ: $\{–5;\ 1;\ -1\pm\sqrt{6}\}$.

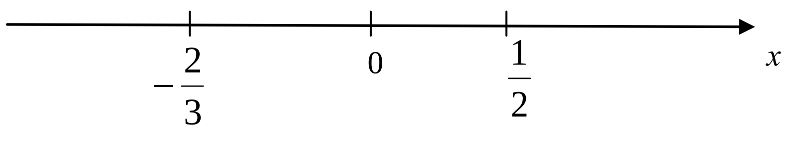
В более сложных случаях подстановка видна лишь после преобразований.

Задача. Решим уравнение $(x^2 + 2x)^2 – (x + 1)^2 = 55$. Перепишем его иначе, а именно $(x^2 + 2x)^2 – (x + 2x + 1) = 55$, сразу увидим подстановку $x + 2x = t$. Имеем $t^2 – t – 56 = 0$, $t_1 = –7$, $t_2 = 8$. Осталось решить $x^2 + 2x = –7$ и $x^2 + 2x = 8$. В результате получаем, что первое уравнение не имеет корней, а у второго $x_1 = –4$, $x_2 = 2$.

Рассмотрим еще один вид уравнений **- уравнения, содержащие модуль.** При решении уравнений с модулем используется определение модуля и метод интервалов.

Задача. Решить уравнение $|1 – 2x| + |3x + 2| + |x| = 5$.

Решение. Приравниваем к нулю выражения, стоящие под знаком модуля, отмечаем на числовой оси полученные значения, исследуем уравнение в каждом из полученных интервалов:



а) если $x\in\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)$, то $1–2x>0$, $3x+2<0$, $x<0$ и уравнение переписывается так: $1–2x–3x–2–x=5$, т.е. $–6x=6$, $x=–1\in\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)$.

б) если $x\in\left[-\frac{2}{3};0\right)$, то $1–2x>0$, $3x+2\geq 0$, $x<0$ и поэтому имеем $1–2x+3x+2–x=5$, и т.к. $3\neq 5$, то в промежутке $\left[-\frac{2}{3};0\right)$ корней нет;

в) если $x\in\left[0;\frac{1}{2}\right)$, то получаем $1–2x+3x+2+x=5$, т.е. $2x=2$, $x=1\notin\left[0;\frac{1}{2}\right)$;

г) если $x\in\left[\frac{1}{2};\infty\right)$, то $–1+2x+3x+2+x=5$, $6x=4$, $x=\frac{2}{3}\in\left[\frac{1}{2};\infty\right)$.

Ответ: $\{-1;\ \frac{2}{3}\}$.

Задача. Решить уравнение $|x^2-14|=|x^2-4|$.

Решение. Так как $|x^2-14|\geq 0$ и $|x^2-4|\geq 0$, то, возведя обе части уравнения в квадрат, получим равносильное уравнение $(x^2-14)^2 = = (x^2-4)^2$, т.е. $x^4-28x^2+196=x^4-8x^2+16$, т.е. $20x^2=180$, $x^2=9$, $x_{1,2}=\pm 3$.

1.3 УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Предикат вида *f(x;y) = g(x;y)* называют ***уравнением с двумя переменными.***

Любая пара *(a;b)* значений переменных, обращающая уравнение *f(x;y) = g(x;y)* в истинное числовое равенство, называется ***решением*** этого ***уравнения,*** а множество всех таких пар – ***множеством решений*** этого уравнения.

Пару чисел (a; b) модно изобразить на плоскости точкой M, имеющей координаты a и b. Рассматривая изображения всех точек множества решений уравнения с двумя неизвестными, получим некоторое подмножество точек плоскости. Его называют графиком уравнения.

Задача. Определить, являются ли пары (1; 5) и (–2; 7) решениями уравнения $x + 2y = 12$, и записать множество решений данного уравнения.

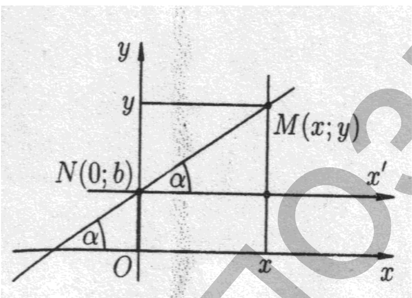
Решение. Если $x = 1$, а $y = 5$, то уравнение $x + 2y = 12$ обращается в неверное числовое равенство $1 + 2 \cdot 5 = 12$. Следовательно, пара (1; 5) не является решением уравнения.

Если $x = -2$, а $y = 7$, то данное уравнение обращается в верное равенство $-2 + 2 \cdot 7 = 12$. Следовательно, пара (–2, 7) является решением уравнения $x + 2y = 12$.

Данное уравнение имеет бесконечное множество решений. Для записи этого множества удобно выразить одну переменную через другую, например, x через y. Получим: $x = 12 - 2y$. Тогда множество T решений этого уравнения можно записать так: $T = \{(12 - 2y : y) \mid y \in R\}$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть на плоскости Оху задана произвольная прямая, не параллельная оси Оу. Ее положение определяется ординатой b точки N(0; b) пересечения с осью Оу и углом α между осью Ох и прямой (см. рисунок 1).



Под углом α ($0 \le \alpha < \pi$) наклона прямой понимается наименьший угол, на который нужно повернуть вокруг точки пересечения прямой и оси Ох против часовой стрелки ось Ох до ее совпадения с прямой.

Возьмем на прямой произвольную точку М(х; у) (см. рис). Проведем через точку N ось Nx', параллельную оси Ох и одинаково с ней направленную. Угол между осью Nx' и прямой равен α. В системе $Nx'y$ точка М имеет координаты х и у - b. Из определения тангенса угла следует равенство $tg\alpha = \frac{y-b}{x}$, т. е. $y = tg\alpha \cdot x + b$. Введем обозначение $tg\alpha = k$, получаем уравнение $y = kx+$ (1), которому удовлетворяют координаты любой точки М(х; у) прямой. Можно убедиться, что координаты любой точки P(x; y), лежащей вне данной прямой, уравнению (1) не удовлетворяют.

Число $k = tg\alpha$ называется угловым коэффициентом прямой, а уравнение (1) – уравнением прямой с угловым коэффициентом.

Если прямая проходит через начало координат, то b = 0 и, следовательно, уравнение этой прямой будет иметь вид $y = kx$.

Если прямая параллельна оси Ox, то $\alpha = 0$, следовательно, $k = tg\alpha = 0$ и уравнение (1) примета вид $y = b$.

Если прямая параллельна оси Oy, то $\alpha = \frac{\pi}{2}$, уравнение (1) теряет смысл, т.к. для нее угловой коэффициент $k = tg\alpha = tg\frac{\pi}{2}$ не существует. В этом случае уравнение прямой будет иметь вид $x = a$ (2), где a – абсцисса точки пересечения прямой с осью Ox. Отметим, что уравнения (1) и (2) есть уравнения первой степени.

Общее уравнение прямой

Рассмотрим уравнение первой степени относительно *x* и *y* в общем

$$Ax + By + C = 0, \quad (3)$$

где A, B, C – произвольные числа, причем A и B не равны нулю одновременно.

Покажем, что уравнение (3) есть уравнение прямой линии. Если B = 0, то уравнение (3) имеет вид $Ax + C = 0$, причем $A \neq 0$, т.е. $x = -\frac{C}{A}$. Это есть уравнение прямой, параллельной оси Oy и проходящей через точку $\left(-\frac{C}{A};0\right)$. Если $B \neq 0$, то из уравнения (3) получаем $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Это есть уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = tg\alpha = -\frac{A}{B}$.

Итак, уравнение (3) есть уравнение прямой линии, оно называется общим уравнением прямой.

Некоторые частные случаи общего уравнения прямой:

1) если A = 0, то уравнение приводится к виду $y = -\frac{C}{B}$. Это есть прямая, параллельная оси Ox;

2) если B = 0, то прямая параллельна оси Oy;

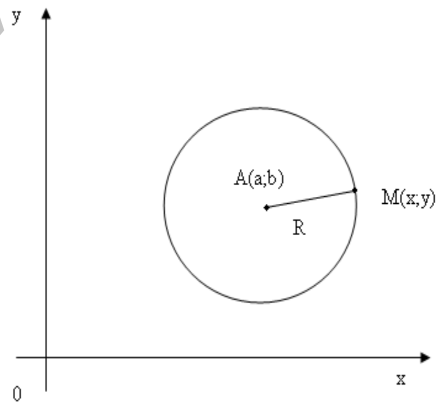
3) если C = 0, то получаем $Ax + By = 0$. Уравнению удовлетворяют координаты точки O(0; 0), прямая проходит через начало координат.

Уравнение окружности

Окружностью радиуса R с центром в точке A называется множество всех точек M плоскости, удовлетворяющих условию AM=R.

Теорема. Графиком уравнения $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R$ (1) является окружность с центром в точке A(a;b) и радиуса R.

Доказательство. Если точка M(x;y) лежит на окружности, то AM=R. Но $AM = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, поэтому $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R$. Значит, все точки окружности принадлежат графику уравнения (1) (рис .2)



Обратно, пусть точка M(x;y) принадлежит графику уравнения (1). Так как $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ - расстояние от точки M(x;y) до точки A(a;b), то MA=R, поэтому точка M(x;y) лежит на окружности. В другом виде уравнение окружности: $(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2$ (2)

Уравнение (2) называется каноническим уравнением окружности.

В частности, полагая a=0 и b=0, получим уравнение окружности с центром в начале координат $x^2 + y^2 = R^2$.

Например, уравнением окружности с центром в точке A(7;-6) и радиуса R=8 будет $(x-7)^2+(y+6)^2 = 64$

1.4 СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Пусть даны два уравнения $f_1(x,y) = g_1(x,y)$. ***Система уравнений представляет*** собой ***конъюнкцию этих уравнений***. Записывают систему так: $\begin{cases} f_1(x;y) = g_1(x;y), \\ f_2(x;y) = g_2(x;y). \end{cases}$ (1)

Решением этой системы является любая пара чисел (a;b), обращающая каждое из уравнений системы в верное числовое равенство. Множество таких пар есть пересечение множества решений первого уравнения с множеством решений второго.

Процесс решения системы обычно состоит в последовательном переходе с помощью некоторых преобразований от данной системы к другим, более простым, которые мы умеем решать. При этом нужно внимательно следить за тем, чтобы не потерять решения. Что касается посторонних для данной системы решений, которые могут появиться при преобразовании системы, то их обычно отсеивают с помощью проверки.

Если в результате преобразований системы (1) получена система $\begin{cases} h_1(x,y) = \varphi_1(x,y), \\ h_2(x,y) = \varphi_2(x,y) \end{cases}$ (2) такая, что каждое решение системы (1) является решением системы (2), то система (2) называется следствием системы (1). Аналогично, уравнение $F(x,y) = G(x,y)$ называют следствием системы (1), если равенство $F(x_0,y_0) = G(x_0,y_0)$ является верным для каждой пары чисел (x_0,y_0), образующих решение системы (1).

Если система (2) является следствием системы (1), а система (2) также является следствием системы (1), то эти системы называют равносильными. Системы называют **равносильными**, если множества их решений совпадают или системы не имеют решений.

Используя определения равносильности и следствия, можно утверждать, что:

1) если в системе уравнений заменить какое-либо уравнение на равносильное ему, а остальные уравнения оставить без изменения, то полученная при этом система будет равносильна исходной;

2) если к данной системе присоединить уравнение, являющееся следствием этой системы, то полученная система будет равносильна исходной;

3) если какое-либо уравнение данной системы заменить его следствием, а остальные уравнения оставить без изменения, то полученная система будет следствием исходной.

При решении систем уравнений нередко приходится применять такие преобразования систем, как умножение обеих частей уравнения на одно и то же число (или одну и ту же функцию), почленное сложение, вычитание, умножение и деление уравнений системы, возведение обеих частей уравнения в n-ю степень.

Сформулируем утверждения, связанные с этими преобразованиями:

1°. Система $\begin{cases} f_1 + \quad f_2 = \quad g_1 + \\ f_1 - \quad f_2 = \quad g_1 - \end{cases}$ полученная почленным сложением и вычитанием уравнений системы (1), равносильна системе (1).

2°. Система $\begin{cases} f_1 = g_1 \\ f_2^2 = g_2^2 \end{cases}$ является следствием системы (1). Если же функции f_2 и g_2 принимают неотрицательные значения в области определения системы (1), т.е. на множестве, где определены функции f_2 и g_2 и система (3) равносильна системе (1).

3°. Система $\begin{cases} f_1 = g_1 \\ f_2\ f_2 = g_1 g_2 \end{cases}$ является следствием системы (1). Если же не существует таких пар чисел x, y, при которых обе функции f_1 и g_1 обращаются в нуль, то данная система так же равносильна системе (1).

4°. Если не существует таких пар чисел x и y, при которых обе функции f_2 и g_2 одновременно обращаются в нуль, то система

$$\begin{cases} f_1 = g_1 \\ \dfrac{f_1}{f_2} = \dfrac{g_1}{g_2} \end{cases}$$

является следствием системы (1), а при дополнительном требовании, что одновременно не обращаются в нуль функции f_1 и g_1, данная система равносильна системе (1).

Основные методы решения систем уравнений:

1. *Метод подстановки*: из уравнения системы выражаем одно неизвестное через другое и подставляем во второе уравнение системы.

Задача. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 2x + y = 2, \\ 6x + 2y = 3. \end{cases}$

Решение. Из первого уравнения системы выражаем *y* через *x* и подставляем во второе уравнение системы. Получим систему $\begin{cases} y = 2 - 2x, \\ 6x + 2(2 - 2x) = 3 \end{cases}$ равносильную исходной. После приведения подобных членов система примет вид: $\begin{cases} y = 2 - 2x, \\ 2x = -1. \end{cases}$

Из второго уравнения находим: $x = -\frac{1}{2}$. Подставив это значение в уравнение *y* = 2 – 2*x*, получим *y* = 3. Следовательно, решением данной системы является пара чисел $\left(-\frac{1}{2}; 3\right)$.

2. *Метод алгебраического сложения*: путем сложения двух уравнений получить уравнение с одной переменной.

Задача. Решить систему уравнение: $\begin{cases} 3x + 4y = 5, \\ x - 2y = 4. \end{cases}$

Решение. Умножив обе части второго уравнения на 2, получим систему $\begin{cases} 3x+4y=5, \\ 2x-4y=8, \end{cases}$ равносильную исходной. Сложив два уравнения этой системы, придем к системе $\begin{cases} 3x+4y=5, \\ (3x+4)+(2x-4y)=5+8. \end{cases}$

После приведения подобных членов данная система примет вид: $\begin{cases} 3x+4y=5, \\ 5x=13. \end{cases}$ Из второго уравнения находим $x=\frac{13}{5}$. Подставив это значение в уравнение $3x + 4y = 5$, получим $3\cdot\frac{13}{5}+4y=5$, откуда $y=-\frac{7}{10}$. Следовательно, решением данной системы является пара чисел $\left(\frac{13}{5}; \frac{7}{10}\right)$.

3. *Метод введения новых переменных*: ищем в системе некоторые повторяющиеся выражения, которые обозначим новыми переменными, тем самым упрощая вид системы.

Задача. Решить систему уравнений: $\begin{cases} xy+x+y=5, \\ x^2y+xy^2=6. \end{cases}$

Решение. Запишем данную систему иначе: $\begin{cases} xy+x+y=5, \\ xy(x+y)=6. \end{cases}$

Пусть $x + y = u$, $xy = v$. Тогда получим систему $\begin{cases} u+v=5, \\ u\cdot v=6. \end{cases}$

Решим ее методом подстановки. Из первого уравнения системы выразим u через v и подставим во второе уравнение системы. Получим систему $\begin{cases} u=5-v, \\ (5-v)\cdot v=6, \end{cases}$ т.е. $\begin{cases} u=5-v, \\ v^2-5v+6=0. \end{cases}$

Из второго уравнение системы находим $v_1 = 2$, $v_2 = 3$.

Подставив эти значения в уравнение $u = 5 - v$, получим $u_1 = 3$, $u_2 = 2$. Тогда имеем две системы $\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2, \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=2, \\ xy=3. \end{cases}$

Решая первую систему, получим две пары чисел (1; 2), (2; 1). Вторая система решений не имеет.

2. НЕРАВЕНСТВА, СИСТЕМЫ И СОВОКУПНОСТИ НЕРАВЕНСТВ

2.1 Неравенства с одной переменной

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – два выражения с переменной x и областью определения X. Тогда неравенство вида $f(x) > g(x)$ или $f(x) < g(x)$ называется ***неравенством с одной переменной***. Множество X называется ***областью его определения.***

Значение переменной x из множества X, при котором неравенство обращается в истинное числовое неравенство, называется его ***решением.*** Решить неравенство – это значит найти множество его решений.

Линейным называется неравенство вида $ax > b$ $(ax \geq b,\ ax < b,\ ax \leq b)$

Неравенства вида $ax^2 + bx + c > 0$ и $ax^2 + bx + c < 0$, где x – переменная, a, b и c – некоторые действительные числа, причём $a \neq 0$, называют **неравенством второй степени** с одной переменной или квадратичным.

Неравенства вида: $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$; $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0$, где переменная находится в знаменателе и числителе, называют **дробно-рациональными**.

Иррациональным алгебраическим называется неравенство, в котором некоторое рациональное или алгебраическое выражение от неизвестного находится под знаком радикала. Например, $2 > \sqrt{x+1}$.

В основе решения неравенств лежит понятие равносильности.

Два неравенства называются ***равносильными,*** если их множества решений равны.

Теорема 1. Пусть неравенство $f(x) > g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ – выражение, определенное на том же множестве. Тогда неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x) + h(x) > g(x) + h(x)$ равносильны на множестве X.

Доказательство. Обозначим через T_1 множество решений неравенства (1), а через T_2 множество решений неравенства (2). Тогда неравенства

(1) и (2) будут равносильны, если $T_1 = T_2$. Чтобы убедиться в этом, необходимо показать, что любое решение из T_1 является решением неравенства (2) и наоборот, любое решение из T_2 является решением неравенства (1).

Пусть число *a* - решение неравенства (1). Тогда $a \in T_1$, и при подстановке в неравенство (1) обращает его в истинное числовое неравенство *f(a)>g(a)*, а выражение *h(x)* обращает в числовое выражение *h(a)*, имеющее смысл на множестве X. Прибавим к обеим частям истинного неравенства *f(a)>g(a)* числовое выражение *h(a)*. Получим, согласно свойствам истинных числовых неравенств, истинное числовое неравенство *f(a)+h(a)>g(a)+h(a)*, которое свидетельствует о том, что число *a* является корнем неравенства (2). Т. о. каждое решение неравенства (1) является решением неравенства (2), т.е. $T_1 \subset T_2$.

Пусть теперь *a* – корень неравенства (2). Тогда $a \in T_2$, и при подстановке в неравенство (2) обращает его в истинное числовое неравенство *f(a)+h(a)>g(a)+h(a)*. Прибавим к обеим частям этого неравенства числовое выражение −*h(a)*. Получим истинное числовое неравенство *f(a)>g(a)*, которое свидетельствует о том, что число *a* является корнем неравенства (1). Т. о. каждое решение неравенства (2) является решением неравенства (1), т.е. $T_2 \subset T_1$.

Так как $T_1 \subset T_2$ и $T_2 \subset T_1$, то $T_2 = T_1$, и неравенства (1) и (2) равносильны.

Данную теорему можно сформулировать иначе: если к обеим частям неравенства с областью определения X прибавить одно и то же выражение с переменной, определенное на том же множестве, то получим новое неравенство, равносильное данному.

Из этой теоремы вытекают ***следствия***:

1) Если к обеим частям неравенства $f(x) > g(x)$ прибавить одно и то же число *d*, то получим неравенство $f(x)+d>g(x)+d$, равносильное исходному.

2) Если какое-либо слагаемое (или выражение) перенести из одной части неравенства в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

Теорема 2. Пусть неравенство $f(x) > g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ – выражение, определенное на том же множестве, и для всех x из множества X выражение $h(x)$ принимает положительные значения. Тогда неравенства $f(x)>g(x)$ и $f(x)\cdot h(x)>g(x)\cdot h(x)$ равносильны на множестве X.

Из этой теоремы вытекает следствие: если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить на одно и то же положительное число d, то получим неравенство $f(x)\cdot d > g(x)\cdot d$, равносильное данному.

Теорема 3. Пусть неравенство $f(x) > g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ – выражение, определенное на том же множестве, и для всех x из множества X выражение $h(x)$ принимает отрицательные значения. Тогда неравенства $f(x)>g(x)$ и $f(x)\cdot h(x)<g(x)\cdot h(x)$ равносильны на множестве X.

Из этой теоремы вытекает ***следствие:*** если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить на одно и то же отрицательное число d и знак неравенства поменять на противоположный, то получим неравенство $f(x)\cdot d < g(x)\cdot d$, равносильное данному.

Задача. Является ли число $x = 5$ решением неравенства $2x + 7 > 10 – x$, $x \in R$? Найти множество решений этого неравенства.

Решение. Число $x=5$ является решением неравенства $2x + 7 > 10 – x$, так как $2\cdot5 + 7 > 10 – 5$ – истинное числовое неравенство. А множество его решений – это промежуток $(1; \infty)$, который находят, выполняя преобразование неравенства $2x + 7 > 10 – x \Rightarrow 3x > 3 \Rightarrow x > 1$.

Задача. Равносильны ли неравенства $2x + 7 > 10$ и $2x > 3$?

Решение. Данные неравенства равносильны, так как их множества решений равны и представляют собой промежуток $\left(\frac{2}{3};\infty\right)$.

Задача. Решим неравенство $5x - 5 < 2x + 16$ и обоснуем все преобразования, которые будут выполняться в процессе решения.

Преобразования	Обоснование преобразований
1. Перенесем выражение $2x$ в левую часть, а число -5 в правую, поменяв их знаки на противоположные: $5x - 2x < 16 + 5$.	Воспользовались следствием 2 из теоремы 3, получили неравенство, равносильное исходному.
2. Приведем подобные члены в левой и правой частях неравенства: $3x < 21$.	Выполнили тождественные преобразования выражений в левой и правой частях неравенства – они не нарушили равносильности неравенств: данного и исходного.
3. Разделим обе части неравенства на 3: $x < 7$.	Воспользовались следствием из теоремы 4, получили неравенство, равносильное исходному.

Решением неравенства $x < 7$ является промежуток $(-\infty;\ 7)$ и, следовательно, множеством решений неравенства $5x - 5 < 2x + 16$ является промежуток $(-\infty;\ 7)$.

2.2 Методы решения алгебраических неравенств

1. ***Линейные неравенства***, т.е. неравенства вида $ax > b$, где a и b – действительные числа, x – неизвестное.

В зависимости от коэффициентов a и b решением линейного неравенства может быть либо неограниченный промежуток, либо вся числовая прямая, либо пустое множество.

1. Если $a>0$, то от данного неравенства переходим к равносильному неравенству $x > \frac{b}{a}$. Множество его решений – промежуток $(\frac{b}{a};+\infty)$.

2. Если $a<0$, то переходим к равносильному неравенству $x<\frac{b}{a}$. Множество его решений – числовой промежуток $(-\infty;\frac{b}{a})$.

3. а) Если $a=0$ и $b<0$, то данное неравенство примет вид: $0x>b$. Этому неравенству удовлетворяет любое действительное число x. Множество его решений – числовой промежуток $(-\infty;+\infty)$.

б) Если $a=0$ и $b\geq 0$, то данное неравенство примет вид: $0x>b$. В этом случае неравенство решений не имеет.

Различные случаи решения линейного неравенства для учащихся целесообразно отразить в таблице.

$ax > b$		
$a > 0$	b – *любое число*	$x>\frac{b}{a}$
$a < 0$	b – *любое число*	$x<\frac{b}{a}$
$a = 0$	$b \geq 0$	*Решение нет*
	$b < 0$	x – *любое число*

Задача. Решить неравенство $4x + 5 > 2(2x - 3)$.

Решение. $4x+5>2(2x-3)\Leftrightarrow 4x+5>4x-6\Leftrightarrow 4x+5-4x+6>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 11>0\Rightarrow x\in R.$

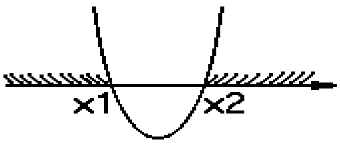
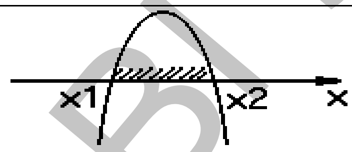
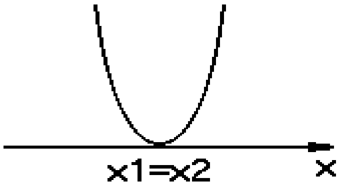
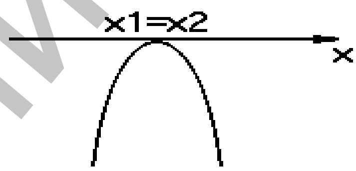
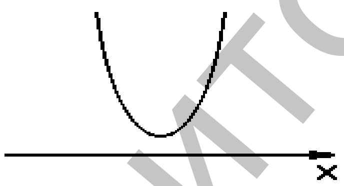
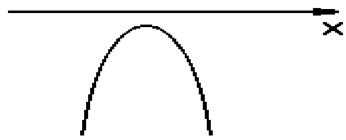
2. Квадратные неравенства имеют вид $ax^2+bx+c>0\ (<0),\ a\neq 0.$

Решение квадратных неравенств основано на применении свойств квадратичной функции, которые допускают наглядную геометрическую интерпретацию, а также методом интервалов.

Способы решения неравенств второй степени:

1. Способ схематического изображения графика квадратичной функции. В этом случае решение неравенства второй степени сводиться к нахождению промежутков, в которых соответствующая квадратичная

функция принимает положительные или отрицательные значения. При этом используют свойства квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ и особенности расположения её графика в зависимости от коэффициента a и дискриминанта квадратного трехчлена $D = b^2 - 4ac$.

Решить неравенство $ax^2 + bx + c > 0\,(a \neq 0)$		
	$a > 0$	$a < 0$
$D > 0$	 Ответ: $(-\infty; x1) \cup (x2; +\infty)$	 Ответ: $(x1; x2)$
$D = 0$	 Ответ: $(-\infty; x1) \cup (x1; +\infty)$	 Ответ: нет решений
$D < 0$	 Ответ: $(-\infty; +\infty)$	 Ответ: нет решений

С целью осознания решения учащимися неравенства вида $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$ следует добиваться от них понимания того, что решение неравенства сводится к отысканию значений переменной *x*, при которых значение соответствующей неравенству функции будет больше или меньше нуля, т.е. к нахождению таких значений переменной *x*, которые являются абсциссами точек графика с положительными или отрицательными ординатами.

2. Аналитический способ. Пусть требуется решить неравенство:

$$ax^2 + bx + c > 0$$

Если дискриминант квадратного трехчлена $D>0$, то, вычислив корни x_1 и x_2 и разложив левую часть на множители, получим неравенство:

$$a(x-x_1)(x-x_2)>0.$$

Разделив обе части на число a $(a\neq 0)$ перейдём к неравенству:

$(x-x_1)(x-x_2)>0$, если $a>0$, или $(x-x_1)(x-x_2)<0$, если $a<0$.

Затем воспользуемся условием, при котором произведение положительно либо отрицательно:

$$((x-x_1)(x-x_2)) \Leftrightarrow (\begin{cases} x-x_1<0 \\ x-x_2<0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-x_1>0 \\ x-x_2>0 \end{cases};$$

$$((x-x_1)(x-x_2)) \Leftrightarrow (\begin{cases} x-x_1<0 \\ x-x_2>0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-x_1>0 \\ x-x_2<0 \end{cases}.$$

Если $D=0$, то неравенство $ax^2+bx+c>0$ равносильно неравенству:

$$a\left(x+\frac{b}{2*a}\right)^2>0.$$

Множество всех действительных чисел, кроме $x=-\frac{b}{2a}$ является решением данного неравенства при условии, что знак неравенства совпадает со знаком коэффициента a.

Если $D<0$ и $a>0$, неравенство $ax^2+bx+c>0$ выполняется при всех значениях переменной.

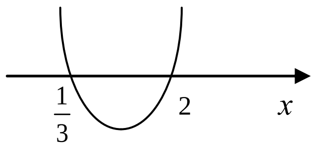
Если $D<0$ и $a<0$, неравенство $ax^2+bx+c>0$ не имеет решений.

3. В некоторых случаях для решения квадратичного неравенства можно воспользоваться методом интервалов при условии, что квадратичный трехчлен ax^2+bx+c можно разложить на множители.

Задача. Решить неравенство $3x^2 - 7x + 2 > 0$.

Решение. Найдем дискриминант квадратного трехчлена $3x^2 - 7x + 2$: $D = 49 - 24 = 25$. Вычислим его корни: $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=2$.

Схематично выполним соответствующий рисунок параболы:

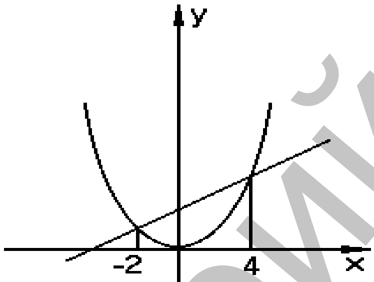


По рисунку найдем решение данного неравенства: $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (2; \infty)$.

Задача. Решить неравенство $x^2 - 2x - 8 \le 0$.

Решение**.** Запишем данное неравенство в виде: $x^2 \le 2x + 8$.

Построим в одной системе координат графики функций $y = x^2$ и $y = 2x + 8$



Найдём абсциссы точек пересечения данных графиков: $x^2 = 2x + 8$; $x^2 - 2x - 8 = 0$, $x_1 = -2$ или $x_2 = 4$.

Неравенство $x^2 \le 2x + 8$ будет выполнятся при тех и только тех значениях x, при которых график функции $y = x^2$ расположен ниже графика функции $y = 2x + 8$.

Ответ: $[-2;4]$.

3. Алгебраические неравенства высших степеней, т.е. неравенства вида $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0 > 0$ (< 0), $n > 2$.

С помощью методов решения алгебраических уравнений многочлен степени $n > 2$ разложить на множители, т.е. неравенство записать в виде

$a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) > 0$ (< 0).

При этом следует сокращать на заведомо положительные выражения или отрицательные (в последнем случае знак неравенства менять на противоположный). Затем методом интервалов найти решение.

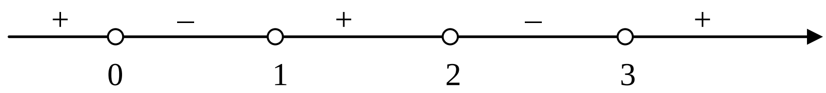
Задача. Решить неравенство $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x < 0$.

Решение. $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x < 0 \Leftrightarrow x\,(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\,(x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6) < 0 \Leftrightarrow x\,(x - 1)\,(x^2 - 5x + 6) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\,(x - 1)\,(x - 2)\,(x - 3) < 0.$

Используем метод интервалов:



По рисунку запишем решение данного неравенства $x \in (0; 1) \cup (2; 3)$.

3. Дробно-рациональные неравенства. При решении таких неравенств можно придерживаться следующей схемы: перенести все члены неравенства в левую часть; все члены неравенства в левой части привести к общему знаменателю, т.е. неравенство записать в виде $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} > 0\ (< 0)$.

Неравенства вида: $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$ (1) и $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0$ (2), где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - многочлены, решаются с помощью метода интервалов.

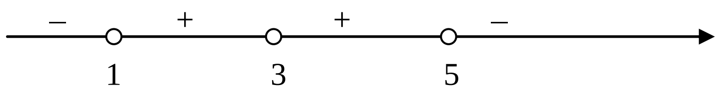
Неравенство $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$ равносильно неравенству $P_n(x)Q_m(x) > 0$, а неравенство $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0$ равносильно системе $\begin{cases} P_n(x)Q_m(x) \geq 0 \\ Q_m(x) \neq 0 \end{cases}$.

Задача. Решить неравенство $\dfrac{4-x}{x-5} > \dfrac{1}{1-x}$.

Решение. $\dfrac{4-x}{x-5} > \dfrac{1}{1-x} \Leftrightarrow \dfrac{4-x}{x-5} - \dfrac{1}{1-x} > 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \dfrac{4-x-4x+x^2-x+5}{(x-5)(1-x)} > 0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{x^2-6x+9}{(x-5)(1-x)} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-3)^2}{(x-5)(1-x)} > 0.$

Используем метод интервалов:

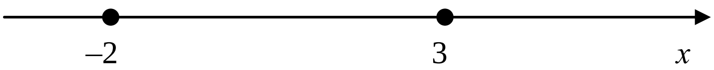


По рисунку запишем решение неравенства: $x \in (1; 3) \cup (3; 5)$.

5. Неравенства с модулем. При решении неравенств с неизвестными под знаком модуля пользуются определением модуля, его свойствами, методом промежутков.

Задача. Решить неравенство $|x - 3| + |x + 2| - x > 5$.

Решение. На числовой оси отметим значения, при которых $x - 3 = 0$ и $x + 2 = 0$.



Рассмотрим неравенство на каждом из полученных промежутков.

а) Если $x < 2$, то неравенство принимает вид $-x + 3 - x - 2 - x > 5$, т.е. $-3x > 4$, $x < -\frac{4}{3}$. Из соотношений $x < -2$ и $x > -\frac{4}{3}$ следует, что $x < -2$ является решением данного неравенства.

б) Если $-2 \leq x < 3$, то неравенство примет вид $-x + 3 + x + 2 - x > 5$, т.е. $-x > 0$, $x < 0$.

Из соотношений $-2 \leq x < 3$ и $x < 0$ следует, что $-2 \leq x < 3$ является решением данного неравенства.

в) Если $x \geq 3$, то $x - 3 + x + 2 - x > 5$, т.е. $x > 6$, является решением данного неравенства.

Объединим найденные решения данного неравенства на различных промежутках и получим окончательное решение $(-\infty; 0) \cup (6; \infty)$.

2.3 Системы и совокупности неравенств с одной переменной

Пусть даны два неравенства $f_1(x) > g_1(x)$ и $f_2(x) > g_2(x)$. ***Система неравенств*** представляет ***собой конъюнкцию этих неравенств***. Записывают систему так: $\begin{cases} f_1(x) > g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x). \end{cases}$

Решением этой системы является всякое значение переменной *x*, которое обращает каждое из неравенств в истинное числовое неравенство. *Множество решений системы неравенств есть пересечение множеств* *решений неравенств, образующих данную систему.*

Неравенство $|x| < a$, где $a > 0$, равносильно системе $\begin{cases} x < a, \\ x > -a \end{cases}$ или двойному неравенству $-a < x < a$.

Совокупность неравенств $f_1(x) > g_1(x)$ и $f_2(x) > g_2(x)$ ***представляет*** собой ***дизъюнкцию этих неравенств***.

Записывают совокупность так: $\left[\begin{array}{l} f_1(x) > g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x). \end{array}\right.$

Решением этой совокупности является всякое значение переменной x, которое обращает в истинное числовое неравенство хотя бы одно из неравенств совокупности. *Множество решений совокупности есть объединение множеств решений неравенств, образующих совокупность.*

Неравенство $|x| > a$, где $a > 0$, равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} x > a, \\ x < -a. \end{array}\right.$

Задача. Найти множество решений системы неравенств: $\begin{cases} 5(x+1) - 9x - 3 > -6(x+2), \\ 3(3+2x) < 7x - 2(x-8). \end{cases}$

Решение. Найдем множества решений каждого из неравенств системы, а затем – их пересечение. Преобразуем каждое из неравенств к виду $x > a$ или $x < a$.

$$\begin{cases} 5(x+1) - 9x - 3 > -6(x+2), \\ 3(3+2x) < 7x - 2(x-8). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 5 - 9x - 3 > -6x - 12, \\ 9 + 6x < 7x - 2x + 16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 9x + 6x > -12 - 5 + 3, \\ 6x - 7x + 2x < 16 - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > -14, \\ x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -7, \\ x < 7. \end{cases}$$

Множество решений неравенства $x > -7$ есть числовой промежуток $(-7; \infty)$, а множество решений неравенства $x < 7$ – промежуток $(-\infty; 7)$. Найдем их пересечение: $(-7; \infty) \cap (-\infty; 7) = (-7; 7)$. Таким образом, множеством решений данной системы является промежуток $(-7; 7)$.

Задача. Решить неравенство $|x + 3| \leq 4$.

Решение. Данное неравенство равносильно двойному неравенству $-4 \le x + 3 \le 4$. Решая его, находим, что $-7 \le x \le 1$, т.е $x \in [-7; 1]$.

Задача. Найти множество решений совокупности $\left[\begin{array}{l} 2x-3 > x-1, \\ 4x+3 > 8-x. \end{array}\right.$

Решение. Найдем сначала множества решений каждого из неравенств совокупности, а затем их объединение.

Преобразуем каждое из неравенств совокупности, заменяя его равносильным: $\left[\begin{array}{l} 2x-3 > x-1, \\ 4x+3 > 8-x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-x > 3-1, \\ 4x+x > 8-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2, \\ 5x > 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2, \\ x > 1. \end{array}\right.$

Множество решений неравенства $x > 2$ есть числовой промежуток $(2; \infty)$, а множество решений неравенства $x > 1$ – промежуток $(1; \infty)$. Найдем их объединение: $(2; \infty) \cup (1; \infty) = (1; \infty)$. Следовательно, множество решений совокупности есть числовой промежуток $(1; \infty)$.

Задача. Решить неравенство $|x + 3| > 5$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} x+3 > 5, \\ x+3 < -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2, \\ x < 8. \end{array}\right.$$

Таким образом, решением полученной совокупности является числовой промежуток $(-\infty; -8) \cup (2; \infty)$.

2.4 Графическое решение неравенств, систем и совокупностей неравенств с двумя переменными

Пусть $f(x, y)$ и $g(x, y)$ – два выражения с переменными x и y и областью определения X. Тогда неравенства вида $f(x, y) > g(x, y)$ или $f(x, y) < g(x, y)$ называется ***неравенством с двумя переменными***.

Значение переменных x, y из множества X, при которых неравенство обращается в истинное числовое неравенство, называется его ***решением*** и обозначается (x, y). ***Решить неравенство*** – найти множество таких пар.

Если каждой паре чисел *(x, y)* из множества решений неравенства поставить в соответствие точку *M(x, y)*, получим множество точек на плоскости, задаваемое этим неравенством. Его называют ***графиком данного неравенства***. Чтобы изобразить множество решений неравенства $f(x, y) > g(x, y)$, поступают следующим образом. Сначала заменяют знак неравенства знаком равенства и находят линию, имеющую уравнение $f(x,y) = g(x,y)$. Эта линия делит плоскость на несколько частей. После этого достаточно взять в каждой части по одной точке и проверить, выполняется ли в этой точке неравенство $f(x, y) > g(x, y)$. Если оно выполняется в этой точке, то оно будет выполняться и во всей части, где лежит эта точка. Объединяя такие части, получаем множество решений.

Задача. Решить графически неравенство $y > x$.

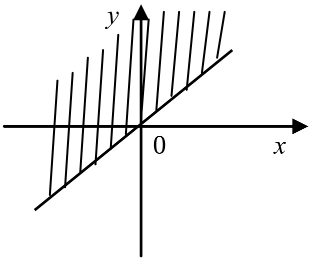


Рис. 3.

Решение. Сначала заменим знак неравенства знаком равенства и построим в прямоугольной системе координат линию, имеющую уравнение $y = x$.

Эта линия делит плоскость на две части. После этого возьмем в каждой части по одной точке и проверим, выполняется ли в этой точке неравенство $y > x$.

Задача. Решить графически неравенство $x^2 + y^2 \leq 25$.

Решение. Сначала заменим знак неравенства знаком равенства и проведем линию $x^2 + y^2 = 25$. Это окружность с центром в начале координат и радиусом 5. Полученная окружность делит плоскость на две части. Проверяя выполнимость неравенства $x^2 + y^2 \leq 25$ в каждой части, получаем, что графиком является множество точек окружности и части плоскости внутри окружности.

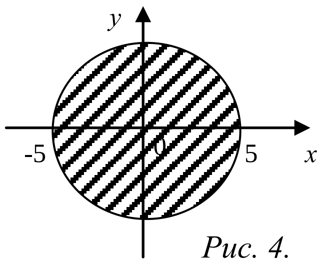


Рис. 4.

Пусть даны два неравенства $f_1(x, y) > g_1(x, y)$ и $f_2(x, y) > g_2(x, y)$.

Система неравенств представляет собой ***конъюнкцию этих неравенств. Решением системы*** является всякое значение *(x, y)*, которое обращает каждое из неравенств в истинное числовое неравенство. ***Множество решений системы*** неравенств есть пересечение множеств решений неравенств, образующих данную систему.

Совокупность неравенств представляет собой ***дизъюнкцию этих неравенств. Решением совокупности*** является всякое значение (x, y), которое обращает в истинное числовое неравенство хотя бы одно из неравенств совокупности. ***Множество решений совокупности*** есть объединение множеств решений неравенств, образующих совокупность.

Задача. Решить графически систему неравенств $\begin{cases} y \geq x, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$

Решение. Сначала заменяем знак неравенства знаком равенства и проводим в одной системе координат линии $y = x$ и $x^2 + y^2 = 25$. Решаем каждое неравенство системы.

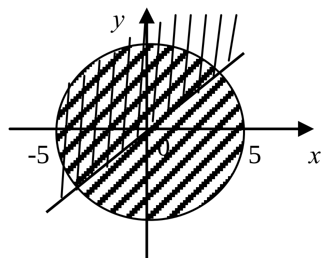


Рис. 5.

Графиком системы будет множество точек плоскости, являющихся пересечением (двойная штриховка) множеств решений первого и второго неравенств.

Задача. Решить графически совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} y \leq x + 4, \\ x^2 + y^2 \leq 16. \end{array}\right.$

Решение. Сначала заменяем знак неравенства знаком равенства и проводим в одной системе координат линии $y = x + 4$ и $x^2 + y^2 = 16$. Решаем каждое неравенство совокупности. Графиком совокупности будет множество точек плоскости, являющихся объединением множеств решений первого и второго неравенств.

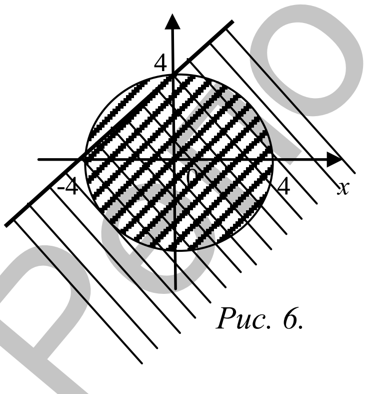


Рис. 6.

3. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Кроме различных понятий, предложений, доказательств в любом математическом курсе есть текстовые задачи. Эти задачи сформулированы на естественном языке. Текстовые задачи являются не только средством формирования математических понятий, но и средством формирования умений строить математические модели реальных явлений, средством развития мышления детей.

Так как **текстовые задачи** есть словесная модель явления, то, как и во всякой модели, в текстовой задаче описывается не все явление в целом, а лишь некоторые его стороны и количественные характеристики.

Формулировка любой задачи состоит из нескольких утверждений и требований. ***Утверждения*** называют условием. ***Требование*** – это вопрос, на который надо найти ответ, опираясь на условия, которые указаны в задаче. Условия и требования связаны. Систему взаимосвязанных условий и требований называют высказывательной моделью задачи.

Например. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной *5 см* и *12 см*. Найти катеты треугольника.

В данной задаче можно выделить такие элементарные *условия:*

1) треугольник, о котором идет речь в задаче, прямоугольный;

2) в этот треугольник вписана окружность;

3) точка касания окружности с гипотенузой делит ее на два отрезка;

4) длина одного отрезка равна *5 см;*

5) длина другого отрезка равна *12 см.*

Требование этой задачи можно расчленить на два элементарных:

1) найти длину одного катета;
2) найти длину другого катета треугольника.

По ***отношению между условиями и требованиями различают*** определенные, неопределенные и переопределенные задачи.

Определенные задачи – это задачи, в которых условий столько, сколько необходимо и достаточно для выполнения требований. ***Неопределенные задачи*** – задачи, в которых условий недостаточно для получения ответа. ***Переопределенные*** – это задачи с лишним условием.

Текстовые ***задачи различаются*** и ***характером своих объектов***. В одних задачах объектами являются реальные предметы, в других – все объекты математические (числа, геометрические фигуры, функции и пр.). Первые задачи, в которых хотя бы один объект есть реальный предмет, называются ***практическими,*** вторые – ***математическими задачами.***

Стандартные задачи решают с использованием правил и положений, которые однозначно определяют программу решения данных задач и выполнение каждого шага этой программы. ***Нестандартные задачи*** – это такие, для которых в математическом курсе не имеется общих правил решения.

Текстовые ***задачи можно классифицировать по их содержанию:***

1. *Задачи на движение*: Лодка прошла по течению реки расстояние между двумя пристанями за 6 ч, а обратно – за 8ч. За сколько времени пройдет расстояние между пристанями плот, пущенный по течению реки?

2. *Задачи на работу и производительность труда*: Несколько рабочих выполняют работу за *14* дней. Если бы их было на *4* человека больше, и каждый работал в день на *1* час дольше, то та же работа была бы сделана за *10* дней. Если бы их было еще на *6* человек больше, и каждый работал бы на *1* час дольше, то эта работа была бы сделана за *7* дней. Сколько было рабочих, и сколько часов в день они работали?

3. *Задачи на концентрацию и процентное содержание*: Морская вода содержит *5%* соли. Сколько килограммов пресной воды надо прибавить к *40 кг* морской, чтобы содержание соли в смеси было *2%*?

4. *Задачи на проценты и процентный прирост*: После сушки *200 кг* зерна с *16%* влажностью его масса уменьшилась на *20 кг*. Вычислите с точностью до *0,1%,* какой стала влажность зерна.

5. *Задачи с целочисленными неизвестными*: Произведение двузначного числа и суммы его цифр равно *144*. Найдите это число, если в нем вторая цифра больше первой на *2*.

6. *Задачи на части*: Для варки варенья из вишни на *2* части ягод берут *3* части сахара. Сколько сахара надо взять на *10 кг* ягод?

Решить математическую задачу – это значит найти такую последовательность общих положений математики, применяя которые к условиям задачи получаем то, что требуется найти – ответ.

Основными методами решения текстовых задач являются арифметический и алгебраический метод, а так же комбинированный.

Решить задачу ***арифметическим методом*** – значит найти ответ на требование задачи посредством выполнения арифметических действий над данными в задаче числами. Одну и туже задачу можно решить различными арифметическими способами. Они отличаются друг от друга логикой рассуждений в процессе решения задачи.

Решить задачу ***алгебраическим методом*** – значит найти ответ на требование задачи путем составления и решения уравнения или системы уравнений.

Текстовые задачи ***алгебраическим методом*** решают по схеме:

1) выделяют величины, о которых идет речь в тексте задачи, и устанавливают зависимость между ними;
2) вводят переменные, т.е. обозначают буквами неизвестные величины;
3) с помощью введенных переменных и данных задачи составляют уравнение или систему уравнений;
4) решают полученное уравнение или систему;
5) проверяют найденные значения по условию задачи и записывают ответ.

Комбинированный метод решения включает как арифметический, так и алгебраический способы решения.

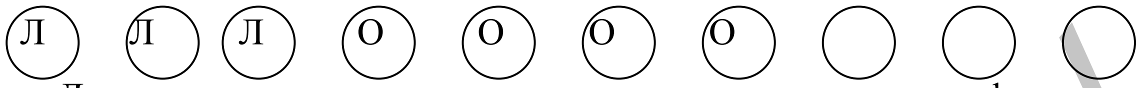
В начальной школе ***задачи делят по количеству действий*** при решении на простые и составные. Задачи, в которых для ответа на вопрос нужно выполнить только одно действие, называют ***простыми.*** Если для ответа на вопрос задачи нужно выполнить два и более действий, то такие задачи называют ***составными.***

Составную задачу, тек же как и простую, можно решить, используя различные способы.

Например. Рыбак поймал 10 рыб. Из них 3 леща, 4 окуня, остальные – щуки. Сколько щук поймал рыбак?

Практический способ.

Обозначим каждую рыбу кругом. Нарисуем *10* кругов и обозначим пойманных рыб.



Для ответа на вопрос задачи можно не выполнять арифметические действия, так как количество пойманных щук соответствует не обозначенным кругам – их *3*.

Арифметический способ.

1) *3+4=7(р)* – пойманные рыбы;   2) *10 – 7 = 3(р)* – пойманные щуки.

Алгебраический способ.

Пусть x - пойманные щуки. Тогда количество всех рыб можно записать выражением: $3 + 4 + x$. По условию задачи известно, что рыбак поймал всего 10 рыб. Значит: $3 + 4 + x = 10$. Решив это уравнение, получим x = 3 и тем самым ответим на вопрос задачи.

Графический способ.

Этот способ, так же как и практический, позволят ответить на вопрос задачи, не выполняя арифметических действий.

Следует иметь в виду, что понятие «решение задачи» в начальной школе можно рассматривать с различных точек зрения: решение как результат, т.е. как ответ на вопрос, поставленный в задаче, и решение как процесс нахождения этого результата. Для знакомства с задачей необходимо приобретать определенный опыт в соотнесении предметных, текстовых, схематических и символических моделей, которые учащиеся смогут использовать для интерпретации текстовой модели.

Каким бы из основных методов ни решалась текстовая задача, приходиться выполнять ряд действий, общих для всех методов.

В математике принято следующее ***деление процесса решения задач***:

1) анализ текста задачи, схематическая запись задачи, исследование задачи;
2) поиск способа решения задачи и составление плана решения;

3) осуществление найденного плана;

4) анализ найденного решения задачи, проверка.

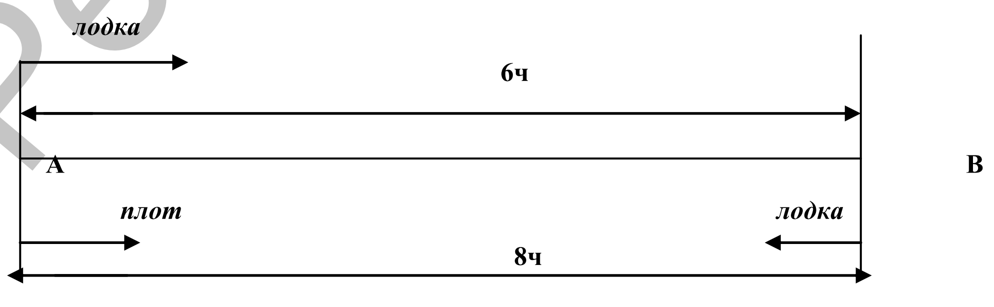
Методы поиска решения задачи можно назвать следующие:

1) Анализ: а) когда в рассуждениях двигаются от искомых к данным задачи; б) когда целое расчленяют на части;
2) Синтез: а) когда двигаются от данных задачи к искомым; б) когда элементы объединяют в целое;
3) Переформулировка задачи (четко формулировать промежуточные задания, возникающие по ходу поиска решения);
4) Индуктивный метод решения задачи: на основе точного чертежа усмотреть свойства фигуры, сделать выводы и доказать их;
5) Применение аналогии (вспомнить аналогичную задачу);
6) Прогнозирование – предвидение тех результатов, к которым может привести поиск.

Рассмотрим более подробно *процесс решения следующей задачи*: Лодка прошла по течению реки расстояние между двумя пристанями за 6 ч, а обратно – за 8ч. За сколько времени пройдет расстояние между пристанями плот, пущенный по течению реки?

Анализ задачи. В задаче речь идет о двух объектах: лодка и плот. Лодка имеет собственную скорость, а плот и река, по которой плывут лодка и плот, имеет определенную скорость течения. Именно поэтому лодка совершает путь по течению реки за меньшее время *(6ч)*, чем против течения *(8ч)*. Но эти скорости в задаче не даны, так же как неизвестно и расстояние между пристанями. Однако требуется найти не эти неизвестные, а время, за которое плот проплывет это расстояние.

Схематическая запись:



Поиск способа решения задачи. Нужно найти время, за которое плот проплывет расстояние между пристанями *А* и В. Для того, чтобы найти это время, надо знать расстояние *AB* и скорость течения реки. Оба они неизвестны, поэтому обозначим расстояние АВ буквой *S (км),*а скорость течения *a км/ч.* Чтобы связать эти неизвестные с данными задачи, нужно знать собственную скорость лодки. Она тоже неизвестна, положим, она равна *V км/ч.* Отсюда возникает план решения, заключающийся в том, чтобы составить систему уравнений относительно введенных неизвестных.

Осуществление решения задачи. Пусть расстояние равно *S (км),* скорость течения реки *a км/ч,* собственная скорость лодки *V км/ч*, а искомое время движения плота равно *x ч.*

Тогда скорость лодки по течению реки равна *(V+a) км/ч.* За *6ч* лодка, идя с этой скоростью, прошла расстояние в *S (км).* Следовательно, *6(V+a)= S* (1). Против течения эта лодка идет со скоростью *(V-a) км/ч* и данный путь она проходит за *8ч*, поэтому *8(V-a)= S* (2). Плот, плывя со скоростью течения реки *a км/ч,* проплыл расстояние *S (км)* за *x ч,* следовательно, $ax = S$ (3).

Полученные уравнения образуют систему уравнений относительно неизвестных *a, x, S, V.* Так как требуется найти лишь *x*, то остальные неизвестные постараемся исключить.

Для этого из уравнений (1) и (2) найдем: $V+a = \frac{S}{6}$, $V-a = \frac{S}{8}$. Вычитая из первого уравнения второе, получим: $2a= \frac{S}{6} - \frac{S}{8}$. Отсюда $a= \frac{S}{48}$. Подставим найденное выражение в уравнение (3): $\frac{S}{48} \times x = \frac{S}{48}$. Откуда $x=48$.

Проверка решения. Мы нашли, что плот проплывет расстояние между пристанями за *48 ч*. Следовательно, его скорость, равная скорости течения реки, равна $\frac{S}{48}$. Скорость же лодки по течению реки равна $\frac{S}{6}$ *км/ч,* а против течения $\frac{S}{8}$ *км/ч.* Для того, чтобы убедиться в правильности решения, достаточно проверить, будут ли равны собственные скорости лодки, найденные двумя способами: $\frac{S}{8} + \frac{S}{48}$ и $\frac{S}{6} - \frac{S}{48}$. Произведя вычисления, получим верное равенство: $\frac{7S}{48} = \frac{7S}{48}$. Значит, задача решена правильно.

Ответ: плот проплывет расстояние между пристанями за *48* часов.

Анализ решения. Мы свели решение этой задачи к решению системы трех уравнений с четырьмя неизвестными. Однако найти надо было одно неизвестное. Поэтому возникает мысль, что данное решение не самое удачное, хотя и простое. Можно предложить другое решение.

Зная, что лодка проплыла расстояние *AB* по течению реки за 6ч, а против – за *8ч*, найдем, что в *1ч* лодка, идя по течению реки проходит $\frac{1}{6}$ часть этого расстояния, а против течения $\frac{1}{8}$. Тогда разность между ними $\frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$ есть удвоенная часть расстояния *AB*, проплываемая плотом за *1ч*. Значит. Плот за *1ч* проплывет $\frac{1}{48}$ часть расстояния *AB*, следовательно, все расстояние *AB* он проплывет за *48 ч*.

При таком решении нам не понадобилось составлять систему уравнений. Однако это решение сложнее приведенного выше (не всякий догадается найти разность скоростей лодки по течению и против течения реки).

Рассмотрим решение некоторых текстовых задач, классифицированных по содержанию.

***Задача на движение*:** с турбазы в город, находящийся от нее на расстоянии *24* км, вышел турист со скоростью *4 км/ч*. Через *2 ч* вслед за ним отправился второй турист. С какой скоростью он должен идти, чтобы догнать первого туриста до его прихода в город?

Решение: Так как первый турист шел со скоростью 4 км/ч и прошел расстояние *24 км,* то можно определить время его пути : $\frac{24}{4}$ = *6(ч).* Пусть скорость второго туриста *х км/ч.* Тогда его время определится как $\frac{24}{õ}$. Но чтобы догнать первого туриста (т.е. быть в пути как минимум *6 ч*), ему необходимо еще 2 часа (те, на которые он позже вышел). Значит, можно составить уравнение: $\frac{24}{\tilde{o}}$ *+2=6,* откуда *x=6.* Следовательно, второй турист должен идти со скоростью *6 км/ч,* чтобы догнать первого туриста.

Ответ: 6 км/ч.

Задача на работу и производительность труда**:** несколько рабочих выполняют работу за *14* дней. Если бы их было на *4* человека больше, и каждый работал в день на *1* час дольше, то та же работа была бы сделана за *10* дней. Если бы их было еще на *6* человек больше, и каждый работал бы на *1* час дольше, то эта работа была бы сделана за *7* дней. Сколько было рабочих, и сколько часов в день они работали?

Решение: Пусть *a* – число рабочих, *x* – число часов их работы в день. Введем единицу работы, равную всей работе и пусть y – производительность в час каждого рабочего.

Тогда один рабочий за *x* часов выполняет *xy* единиц работы. Согласно условию *14axy = 1*. Аналогично, если рабочих стало *a+4* и они работают каждый день *x+1* час: *10(a+4)(x+1)y = 1.*

Для случая, когда рабочих еще на *6* человек больше *(a+10)* и они работают еще на *1* час дольше *(x+2)* каждый день, получаем уравнение *7(a+10)(x+2)y = 1.* Из данных уравнений получаем систему с тремя неизвестными. Решая ее, получим *x=6, a=20.*

Ответ: рабочих было *20* человек и они работали *6* часов в день.

Задача на концентрацию и процентное содержание: морская вода содержит *5%* соли. Сколько килограммов пресной воды надо прибавить к *40 кг* морской, чтобы содержание соли в смеси было *2%*?

Решение: Пусть необходимо прибавить *x* кг пресной воды. Тогда масса смеси будет *(x+40) кг.* По условию в ней содержится *2%* соли, т.е $((x+40)\times\frac{2}{100})$ *кг.* В *40 кг* морской же воды по условию было $(40\times\frac{5}{100})$ *кг* соли. Так как количество соли в морской воде и смеси одно и тоже, то можно составить уравнение*: (40+x)* $\times$ *0,02 = 40* $\times$ *0,05.* Решая его, найдем, что *x=60*. Проверкой убеждаемся, что число *60* удовлетворяет условию.

Ответ: к 40 кг морской воды необходимо добавить *60 кг* пресной.

Задача на проценты и процентный прирост: после сушки *200 кг* зерна с *16%* влажностью его масса уменьшилась на *20 кг*. Вычислите с точностью до *0,1%,* какой стала влажность зерна.

Решение: масса зерна уменьшилась на *20 кг*, значит, она стала *200 – 20 = 180 (кг).* Так как влажность *200 кг* зерна составляла *16%,* а влажность *180 кг* зерна предположим составит *х%*, то можно составить пропорциональную зависимость: *200 (кг) – 16%*

180 (кг) – х%.

Решая пропорцию, получим уравнение: $x = \frac{16 \times 180}{200}$; откуда *х=14,4.* Значит, влажность зерна стала *14,4%.*

Ответ: 14,4%.

***Задача с целочисленными неизвестными*:** произведение двузначного числа и суммы его цифр равно *144*. Найдите это число, если в нем вторая цифра больше первой на *2*.

Решение: Пусть $\overline{\grave{a}\hat{a}}$ - данное число. Тогда это число можно представить в виде $\overline{\grave{a}\hat{a}}$*=10а+в.* Сумма цифр будет представлена как *а+в.* По условию произведение этого двузначного числа и суммы его цифр равно *144*. Значит, получим уравнение: *(10а+в)(а+в)=144.* Из второго условия имеем, что вторая цифра в данном числе больше первой на *2,* т.е. *в=а+2.* Получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} (10a+в)(a+в)=144. \\ в=a+2 \end{cases}$$

Решая эту систему получим уравнение с одной переменной: $11a^2+13a-70=0$, откуда *а=2, в=4*. Значит искомое число есть *24.*

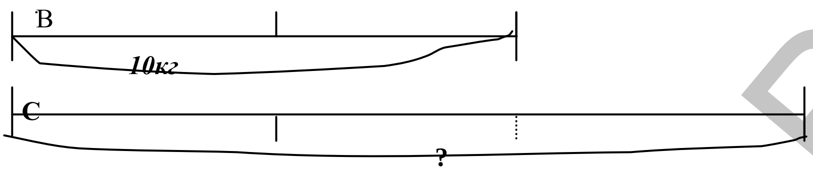
Ответ: 24.

Задачи на части. Само название вида задач говорит о том, что рассматриваемые в них величины состоят из частей**.** В некоторых из них части представлены явно, в других надо суметь выделить, приняв подходящую величину за 1 часть и определив, из скольких таких частей состоят другие величины, о которых идет речь в задаче.

Например, для варки варенья из вишни на *2* части ягод берут *3* части сахара. Сколько сахара надо взять на *10 кг* ягод?

Решение: В задаче идет речь о массе ягод и массе сахара, необходимых для варки варенья. Известно, что всего ягод *10 кг* и что на *2* части ягод надо брать *3* части сахара. Требуется найти массу сахара, чтобы сварить варенье из *10 кг* ягод.

Изобразим при помощи отрезка массу ягод. Тогда половина отрезка представляет собой массу ягод, которая приходиться на *1* часть. Сахара же по условию задачи надо *3* таких части.



Запишем решение по действиям с пояснениями:

1) *10 : 2 = 5* (кг) – столько кг ягод приходится на каждую часть;

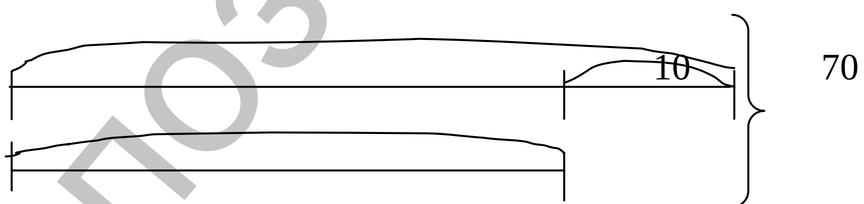
2) $5 \times 3 = 15$ (кг) – столько надо взять сахара.

Ответ: необходимо взять *15 кг* сахара.

Задача. В первой пачке было на *10* тетрадей больше, чем во второй. Всего было *70* тетрадей. Сколько тетрадей было в каждой пачке?

Решение: В задаче рассматриваются две пачки тетрадей. Всего тетрадей *70.* В одной пачке на *10* тетрадей больше. Требуется узнать количество тетрадей в каждой пачке.

Изобразим при помощи отрезка количество тетрадей во второй пачке.



По чертежу видно, что если тетради во второй пачке составляют *1* часть всех тетрадей, то тетради в первой пачке составляют *1* часть и еще *10* тетрадей.

Если эти *10* тетрадей убрать из первой пачки, то в пачках станет поровну. Запишем решение по действиям.

1) *70 – 10 = 60* (т.) – столько тетрадей приходится на *2* равные части, или столько было бы тетрадей в двух пачках, если бы их было поровну;

2) *60 : 2 = 30* (т.) – столько тетрадей приходится на *1* часть, или столько тетрадей было во второй пачке;

3) *30 + 10 = 40* (т.) – столько тетрадей было в первой пачке.

Мы использовали при решении вспомогательную модель – чертеж, которая показывает и второй способ решения. Если за *1* часть принять тетради в первой пачке, то чтобы во второй стало столько же, надо к ней прибавить *10* тетрадей:

1) *70 + 10 = 80* (т.)

2) *80 : 2 = 40* (т.)

3) *40 – 10 = 30* (т.)

Существует и третий арифметический способ решения данной задачи:

1) *10 : 2 = 5*(т.) – столько тетрадей надо переложить из первой пачки во вторую, чтобы в них стало поровну;

2) *70 : 2 = 35* (т.) – столько тетрадей в каждой пачке, если из первой переложить во вторую *5* тетрадей;

3) *35 + 5 = 40* (т.) – столько тетрадей в первой пачке;

4) *35 – 5 = 30* (т.) – столько тетрадей во второй пачке.

Ответ: в первой пачке *40* тетрадей, во второй – *30* тетрадей.

Рассматривая процесс решения текстовой задачи, мы использовали термин «модель», «моделирование». Это не случайно. Во всех науках модели выступают как мощное орудие познания. Мы установили ранее, что текстовая задача – это словесная модель некоторого явления. Чтобы решить такую задачу, надо перевести ее на язык математических действий, т.е. построить ее математическую модель.

Математическая модель – это описание какого-либо реального процесса на математическом языке. Математической моделью текстовой задачи является выражение (запись по действиям), если задача решается арифметическим методом, и уравнение (система уравнений), если задача решается алгебраическим методом.

В процессе решения задачи четко выделяют ***три этапа математического моделирования***:

I этап – это перевод условий задачи на математический язык; при этом выделяются необходимые для решения данные и искомые и математическими способами описываются связи между ними;

II этап – внутримодельное решение, т.е. нахождение значения выражения, выполнение действий, решение уравнения;

III этап – интерпретация, т.е. перевод полученного решения на тот язык, на котором была сформулирована исходная задача.

Наибольшую сложность в процессе решения текстовой задачи представляет перевод текста с естественного языка на математический. Чтобы облегчит эту процедуру, строят вспомогательные модели – схемы, таблицы, рисунки и др. Тогда процесс решения задачи можно рассматривать как переход от одной модели к другой.

Все **модели можно разделить** на схематизированные и знаковые по видам средств, используемых для их построения.

Схематизированные модели делятся на вещественные и графические модели (в зависимости от того, какое действие они обеспечивают). **Вещественные модели** текстовых задач обеспечивают физическое действие с предметами. Они могут строиться из каких-либо предметов (палочки, камешки). **Графические модели** используются для обобщенного, схематического воссоздания ситуации задачи. К таким моделям относят рисунок, чертеж, схему.

Знаковые модели могут быть выполнены как на естественном, так и на математическом языке. К знаковым моделям, выполненным на естественном языке, можно отнести краткую запись задачи, таблицы. Знаковыми моделями на математическом языке являются выражение, уравнение, система уравнений, запись решения задач по действиям. Поскольку на этих моделях происходит решение задачи, их называют *решающими моделями*. Остальные модели – это *вспомогательные модели,* которые обеспечивают переход текста задачи к математической модели.

Для большинства текстовых задач приходится строить различные вспомогательные модели. С одной стороны, эти модели представляют собой результат анализа задачи, но с другой – построение таких моделей организует и направляет детальный и глубокий анализ задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виленкин Н.Я., Пышкало А.М., Рождественская В.Б., Стойлова Л.П. Математика. – М.: Просвещение, 1977.
2. Задачник-практикум по математике / под ред. Н.Я. Виленкина. – М.: Просвещение, 1977.
3. Лаврова Н.Н. Задачник-практикум по математике. – М.: Просвещение, 1985.
4. Стойлова Л.П., Пышкало А.М. Основы начального курса математики. – М.: Просвещение, 1988.
5. Стойлова Л.П. Математика. – М.: Academa, 1999.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации

ЧАСТЬ 4: Уравнения и неравенства

Технический редактор Г.В. Разбоева

Компьютерный дизайн И.В. Волкова

Подписано в печать 06.12.2012. Формат 60x84$^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 3,01. Уч.-изд. л. 1,95. Тираж 80 . Заказ 189.

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
ЛИ № 02330/0494385 от 16.03.2009.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.