Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра алгебры и методики преподавания математики

МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации

ЧАСТЬ 3: Функции, величины, числовые выражения, тождества

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2012

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
П62

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 1 от 13.09.2012 г.

Составители: доцент кафедры алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат педагогических наук **А.В. Виноградова;** доцент кафедры алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат педагогических наук **В.В. Устименко**

Р е ц е н з е н т :
заведующий кафедрой геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент
С.А. Шлапаков

П62 **Математика :** методические рекомендации / сост. : А.В. Виноградова, В.В. Устименко. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2012. – Ч. 3 : Функции, величины, числовые выражения, тождества. – 50 с.

Данные методические рекомендации написаны в соответствии с действующей программой по математике и предназначены для студентов дневного и заочного отделений факультета начальных классов вузов. Автор кратко излагает необходимый теоретический материал, затем приводит подробно разобранные примеры и, наконец, дает примерные задания контрольной работы для самостоятельного решения.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ВВЕДЕНИЕ

Курс математики призван дать студентам педагогического факультета подготовку, необходимую для успешного обучения математике учащихся начальных классов.

Как известно, одними из основных понятий курса математики являются действительные числа и действия над ними, величины и их измерение. Существующие в настоящее время трактовки понятий числа и величины требуют от студентов овладения рядом понятий математики, таких, как «числовое выражение», «функция», «величина» и др. Овладеть курсом математики, приобрести необходимые умения и навыки можно лишь в процессе решения задач. Предлагаемые методические рекомендации призваны оказать помощь студентам педагогического факультета в достижении этой цели.

В издание включены такие темы, как «Числовые выражения, равенства и неравенства», «Величины и зависимости между ними», «Выражения с переменной, тождества» и пр. Все темы хорошо проиллюстрированы.

Рекомендации содержат задачи с решениями и обоснованиями по данным темам, задания для самостоятельной работы студентов факультета начального образования. Данные задания предполагают развитие культуры мышления студентов и умения пользоваться языком математики.

Структура издания такова: материал разбит на темы, некоторые темы – на пункты. Выделение пунктов – небольших по объему порций теоретического материала и задач, должно помочь студентам не только не только лучше овладеть необходимыми знаниями, но и более четко организовать свою самостоятельную учебную деятельность.

1. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

Числовой функцией называется такое соответствие между числовым множеством X и множеством R действительных чисел, при котором каждому числу из множества X сопоставляется единственное число из множества R. Множество X называют ***областью определения функции***. Функции обозначают буквами f, g, h и др. Если f - функция, заданная на множестве X, то действительное число y, соответствующее числу x их множества X, часто обозначают $f(x)$ и пишут $y = f(x)$.Переменную x при этом называют аргументом. Множество чисел вида $f(x)$ называют ***областью значений функции***

Функцию задают при помощи формулы. Например, $y = 2x - 2$.Если при задании функции с помощью формулы ее область определения не указывается, то полагают, что областью определения функции является область определения выражения $f(x)$.

Например. Если функция задана формулой $y = \dfrac{6}{x-2}$, то ее область определения – есть множество действительных чисел, исключая число 2 (если $x = 2$, то знаменатель данной дроби обращается в нуль).

Числовые функции можно представлять наглядно с помощью графика на координатной плоскости. Графиком является множество таких точек координатной плоскости, которые имеют абсциссу x и ординату $f(x)$ для всех x из множества X. Так, графиком функции $y = x + 2$, заданной на множестве R, является прямая (рис. 1), а графиком функции $y = x^2$, заданной на этом же множестве, - парабола (рис. 2).

Для построения графика можно воспользоваться таблицей соответствующих значений x и y:

1) для функции $y = x + 2$

x	0	1	-1	-2
y	2	3	1	0

2)

x	0	1	-1	2
y	0	1	1	4

для функции $y = x^2$

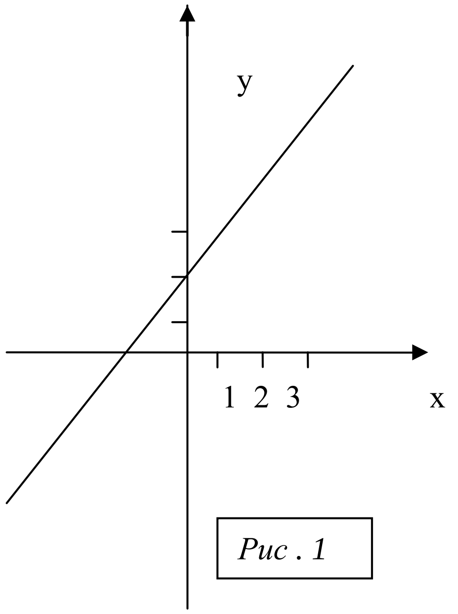


Рис . 1

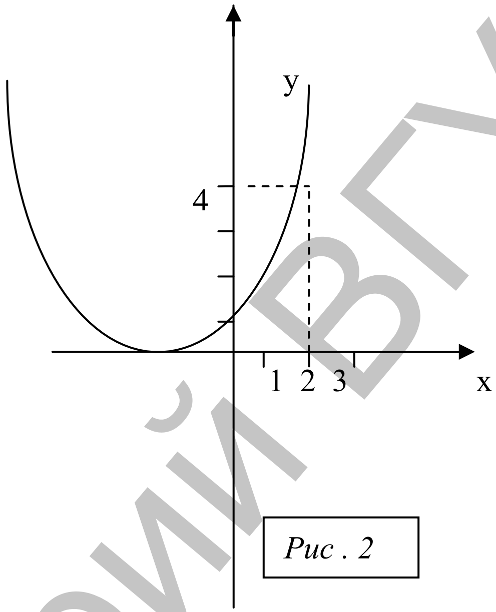


Рис . 2

Не каждое множество точек на координатной плоскости представляет собой график некоторой функции. Так как при каждом значении аргумента из области определения функция должна иметь одно лишь значение, то любая прямая, параллельная оси ординат, или совсем не пересекает график функции, или пересекает его лишь в одной точке. Если это условие не выполняется, то множество точек координатной плоскости график функции не задает.

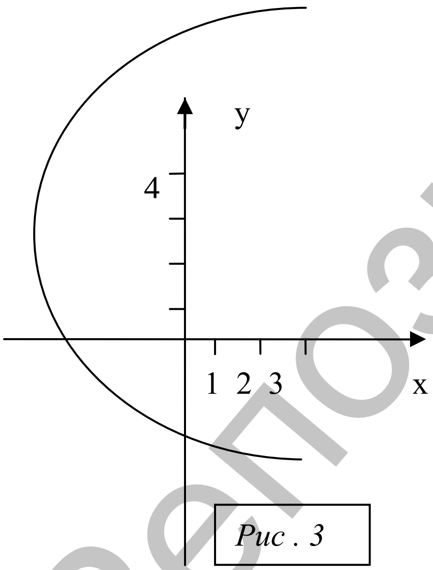


Рис . 3

Например, кривая на рис. 3.

Функции можно задавать и при помощи графика, и при помощи таблицы. Например, таблица, приведенная ниже, описывает зависимость температуры воздуха от времени суток. Эта зависимость – функция, так как каждому значению времени t соответствует единственное значение температуры воздуха p.

t (в часах)	0	3	6	9	12	15	18	21	24	0
p (в градусах)	-3	-7	-5	0	2	4	2	1	-3	-3

Числовые функции обладают многими свойствами:

1. Функция называется ***монотонной*** на некотором промежутке А, если она на этом промежутке возрастает или убывает

2. Функция называется ***возрастающей*** на некотором промежутке А, если для любых чисел x_1, x_2 их множества А выполняется условие: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

График возрастающей функции обладает особенностью: при движении вдоль оси абсцисс слева направо по промежутку A ординаты точек графика увеличиваются (рис. 4).

3. Функция называется ***убывающей*** на некотором промежутке A, если для любых чисел x_1, x_2 их множества A выполняется условие: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

График убывающей функции обладает особенностью: при движении вдоль оси абсцисс слева направо по промежутку A ординаты точек графика уменьшаются (рис. 4).

4. Функция называется ***четной*** на некотором множестве X, если выполняется условие: $f(x) = f(-x)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат (рис. 2).

5. Функция называется ***нечетной*** на некотором множестве X, если выполняется условие: $f(x) = -f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис. 2).

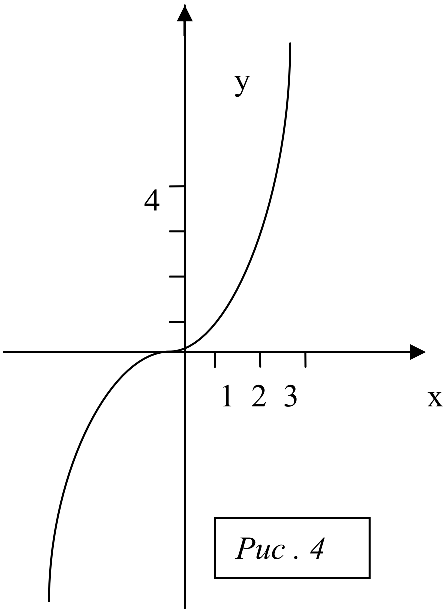


Рис . 4

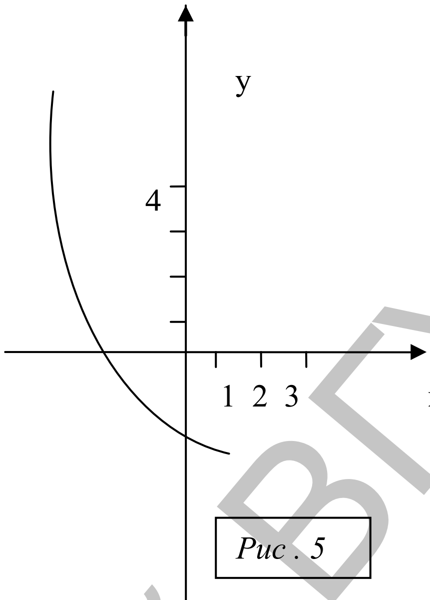


Рис . 5

6. Если функция $y = f(x)$ определена на множестве X и существует такое $x_0 \in X$, что для любого $x \in X$ справедливо неравенство $f(x) \geq f(x_0)$,то говорят, что функция $y = f(x)$ принимает ***наименьшее значение*** $y_0 = f(x_0)$ при $x = x_0$(рис. 2, функция $y = x^2$ принимает наименьшее значение в точке с координатами (0;0)).

7. Если функция $y = f(x)$ определена на множестве X и существует такое $x_0 \in X$, что для любого $x \in X$ справедливо неравенство $f(x) \leq f(x_0)$,то говорят, что функция $y = f(x)$ принимает ***наибольшее значение*** $y_0 = f(x_0)$ при $x = x_0$ (рис. 4, функция не имеет наибольшего и наименьшего значений).

8. ***Нулём функции*** $y=f(x)$ называют такое значение аргумента xиз области определения $D(f)$, при котором значение функции равно нулю.

Графически, нули функции представляют собой абсциссы точек графика, принадлежащего оси Ox.

Чтобы найти нули функции $y=f(x)$, надо решить уравнение $f(x)=0$.

Числовые промежутки, на которых функция сохраняет знак, называют ***промежутками знакопостоянства.***

В промежутке, на котором функция принимает положительные значения, график её расположен выше оси *Ox*; на котором она принимает отрицательные значения – ниже оси *Ox*.

Для нахождения промежутков знакопостоянства функции, заданной формулой *y=f(x)*, необходимо $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$.

Если для данной функции *y* = *f(x)* изучены все перечисленные свойства, то говорят, что проведено *исследование* функции.

Рассмотри некоторые виды функций.

Линейная функция: *y = kx + b*.

Свойства этой функции:

1) область определения (– ∞; + ∞) ;

2) область значений (– ∞; + ∞) ;

3) функция не ограничена ни сверху, ни снизу;

4) не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значений;

5) функция не является ни четной, ни не четной;

6) функция возрастает на всем промежутке, если $k > 0$,
и убывает, если $k < 0$;

7) точки пересечения с осями координат *(0; b) и* $\left(\frac{-b}{k}; 0\right)$;

8) график функции есть прямая, причем, если $k = 0$, то график расположен параллельно оси *OX* (рис. 1)

Частным случаем линейной функции является **прямая пропорциональность**: ***y = kx***.

Свойства этой функции:

1) область определения (– ∞; + ∞);

2) область значений (– ∞; + ∞);

3) функция не ограничена ни сверху, ни снизу;

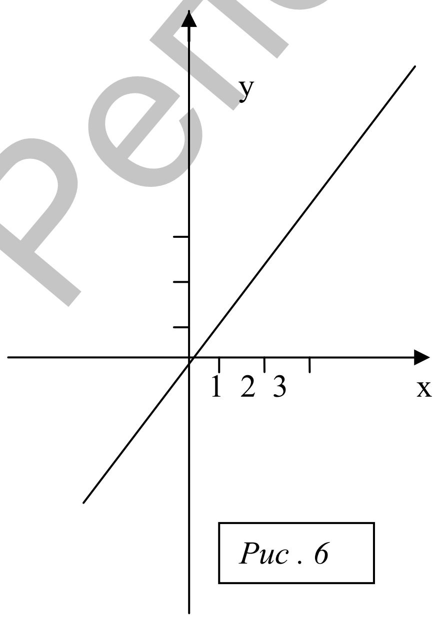


Рис . 6

4) не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значений;

5) функция является не четной;

6) функция возрастает на всем промежутке, если $k > 0$,

и убывает, если $k < 0$;

7) проходит через начало координат;

8) график функции есть прямая, расположенная в первой и третей четвертях, если $k > 0$ и во второй и четвертой, если $k < 0$ (рис. 6) и является биссектрисой этих углов.

Коэффициент $k = \frac{y}{x} \neq 0$ называют коэффициентом пропорциональности. Прямая пропорциональность обладает особым свойством. Если $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ пары соответственных значений переменных x и y и $x_2 \neq 0$,то $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$: с увеличением (уменьшением) значения переменной x в несколько раз соответствующее значение переменной y увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Обратная пропорциональность: $y = \frac{k}{x}$.

Свойства этой функции:

1) область определения $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

2) область значений $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

3) функция имеет разрыв в точке (0; 0)

4) не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значений;

5) функция не является не четной;

6) функция убывает, если $k > 0$, возрастает, если $k < 0$;

7) точки пересечения с осями координат нет;

8) график функции есть гипербола, причем, если $k > 0$, то график расположен 1-ой и 3-ей четвертях, если $k < 0$, то график расположен во второй и четвертой четвертях (рис. 7a; 7b).

Коэффициент $k = x \cdot y \neq 0$ называют коэффициентом пропорциональности. Прямая пропорциональность обладает особым свойством. Если $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ пары соответственных значений переменных x и y и $x_2 \neq 0$, то $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$. Т.е., с увеличением (уменьшением) значения переменной x в несколько раз соответствующее значение переменной y уменьшается (увеличивается) во столько же раз.

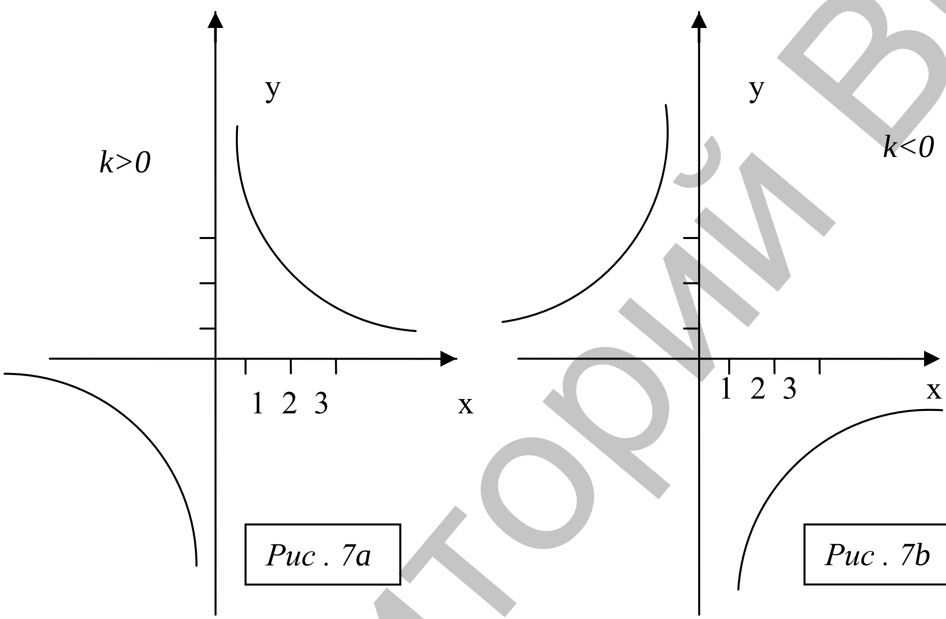


Рис . 7a

Рис . 7b

Квадратичная функция: $y = ax^2 + bx + c$ **;** частный случай, выражающий квадратичную зависимость: $y = kx^2$**.**

Свойства функции $y = kx^2$:

1) область определения (– ∞; + ∞);

2) область значений (– ∞; 0),если k< 0 и (0; + ∞), если k> 0;

3) функция ограничена сверху если k< 0, снизу если k> 0;

4) принимает наибольшее значение в точке (0; 0), если k< 0, и наименьшее значение в точке (0; 0), если k> 0;

5) функция является четной;

6) проходит через начало координат;

7) функция возрастает на промежутке (0; + ∞); и убывает на промежутке (– ∞; 0), если $k > 0$; возрастает на промежутке (– ∞; 0) и убывает (0; + ∞), если $k < 0$,

8) график функции есть квадратичная парабола (рис. 8a, 8b).

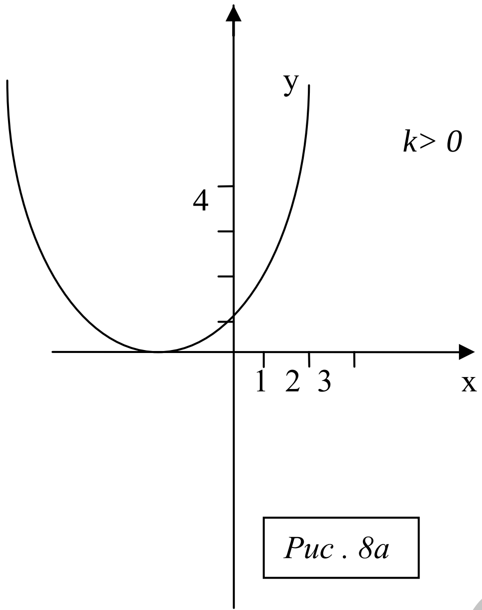


Рис . 8a

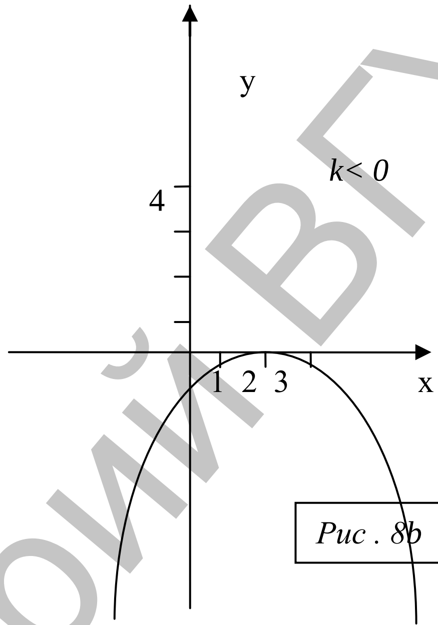


Рис . 8b

Степенная функция $\boldsymbol{y = kx^n}$**;** частный случай, когда n = 3, получаем кубическую функцию $\boldsymbol{y = k\,x^3}$**.**

Свойства функции $\boldsymbol{y = k\,x^3}$:

1) область определения (– ∞; + ∞);

2) область значений (– ∞; + ∞);

3) функция не ограничена сверху и снизу;

4) не принимает наибольшее и наименьшее значение;

5) функция является не четной;

6) функция возрастает на промежутке (– ∞; + ∞), если $k > 0$; и убывает на промежутке (– ∞; + ∞), если $k < 0$,

7) проходит через начало координат;

8) график функции есть кубическая парабола (рис. 9a, 9b).

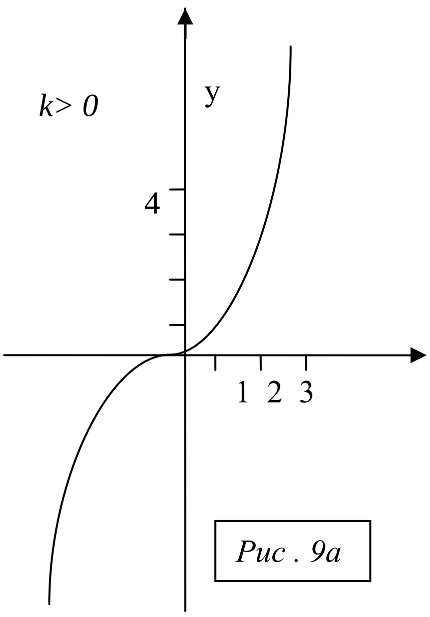


Рис . 9а

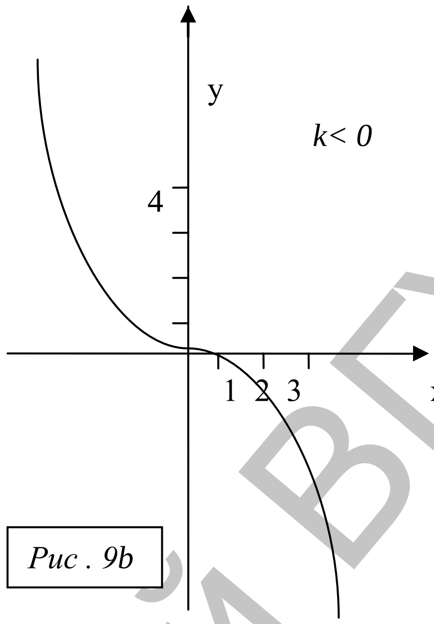


Рис . 9b

Каждая функция представляет собой различную функциональную зависимость, которой пользуются при решении различных математических и текстовых задач

Задача. Найти область определения функции: а) $y = 5x^2 - 4$, б) $y = \dfrac{3}{x-5}$, в) $y = \sqrt{1-x}$.

Решение. Область определения функции *D(y)* – это множество допустимых значений переменной *x*.

В случае а) переменная *x* может принимать любое значение из множества *R*.

В случае б) переменная *x* находится в знаменателе дроби. Значит, $x - 5 \neq 0$ и $x \neq 5$. Т.е., областью определения данной функции будет множество действительных чисел, кроме 5.

В случае в) выражение под корнем должно быть больше или равно нулю, поэтому $1 - x \geq 0$. А это значит, что область определения данной функции (– ∞; 1).

Задача. Указать область значений следующих функций: $y = \dfrac{1}{x-3} + 2$; y = (x + 5)^2 - 3.

Решение: Для первой функции имеем: $\frac{1}{x-3} \neq 0$; $\frac{1}{x-3} + 2 \neq 2$. Значит областью значений будут являться все действительные числа, кроме *2:E(y) = (- ∞; 2)∪(2; + ∞);*

Для второй функции: $(x + 5)^2 \geq 0$; $(x + 5)^2 - 3 \geq -3$. Значит, область значений должна быть больше или равна -3, т.е. *E(y) =(-3; + ∞).*

Задача. Определить, являются ли графиками функций следующие кривые на рис. 10 (a, b), и почему:

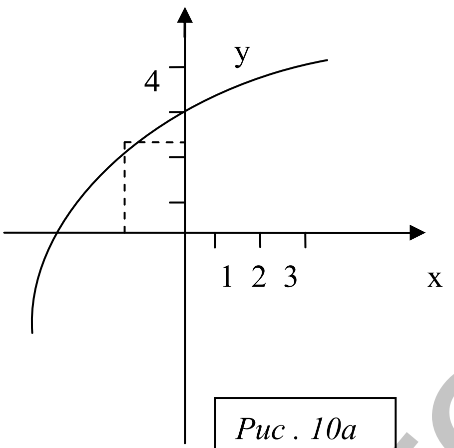


Рис . 10a

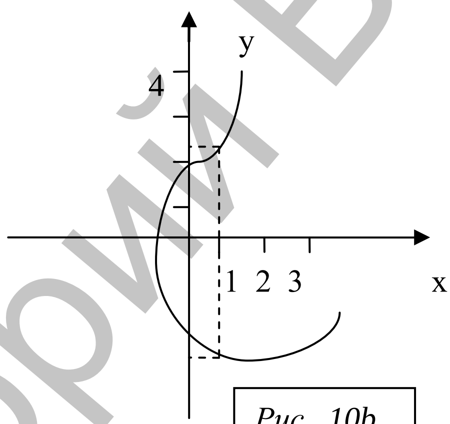


Рис . 10b

Решение: Графиком функции является кривая, если каждому значению переменной *x* соответствует единственному значению переменной *y*. Этому условию подчиняется кривая на рис. 10*a*. Кривая на рис.*10b*не удовлетворяет данному условию, значит, не является графиком функции.

Задача. Указать, какие из данных формул задают на множестве R действительных чисел функцию: $y = 4x$; $y = \frac{4}{x}$; $x + y = 4$; $x^2 > 1$.

Решение: Формула задает функцию, если в ней (формуле) указывается, как по данному значению аргумента найти соответствующее значение функции. Первая и вторая формулы задают такую функцию, т.к. каждому действительному числу *x* можно, произведя указанные действия, поставить в соответствие единственное значение *y*, чего нельзя сказать про третий и четвертый случай.

Задача. Найти нули функции, заданной формулой:

$$y=\left(x^2-9\right)\sqrt{x-2}.$$

Решение. Имеем, $\left(x^2-9\right)\sqrt{x-2}=0$ т.е. $\left(x-3\right)\left(x+3\right)\sqrt{x-2}=0$.

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а остальные имеют смысл:

$\begin{cases} x-3=0, \\ x-2\geq 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} x+3=0, \\ x-2\geq 0, \end{cases}$ или x-2=0.

x=3. Нет решений. x=2.

Ответ: $\{2;3\}$.

Задача. Найдем все значения аргумента x, при которых функция $y=x\sqrt{1-x^2}$ принимает положительные значения.

Решим неравенство $x\sqrt{1-x^2}>0$. Оно равносильно системе $\begin{cases} 1-x^2>0 \\ x>0 \end{cases}$. Решив её, получим числовой промежуток (0;1), на котором функция принимает положительные значения.

Задача. Доказать, что функция $y=(2+x)^3-(2-x)^3$ является нечётной.

Доказательство. Область определения функции $D(y)=R$ симметрична относительно нуля.

$y(-x)=(2-x)^3-(2+x)^3=-\left(\left(2+x\right)^3-\left(2-x\right)^3\right)$ т.е. $y(-x)=-y(x)$.

Поскольку оба условия нечётности функции имеют место, то данная функция является нечётной.

Задача. Задать формулой функции, изображенные на рис. 11 (a, b).

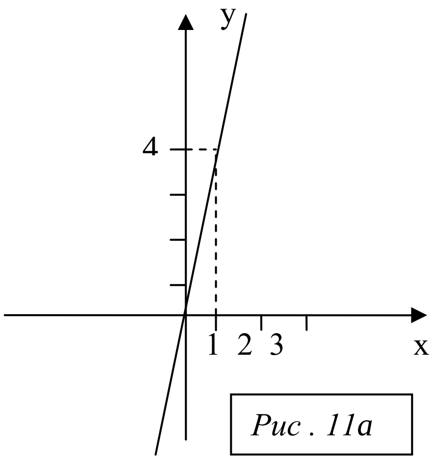


Рис . 11a

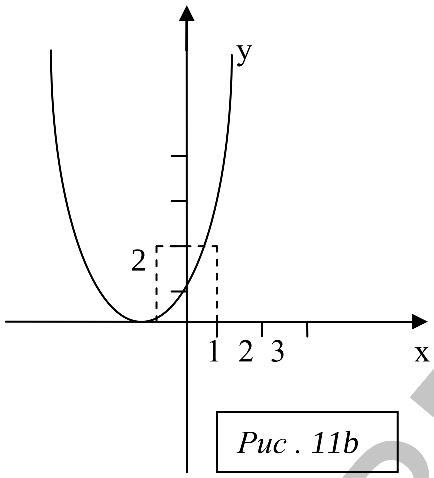


Рис . 11b

Решение: На рисунке 11a изображена прямая, проходящая через начало координат. Эта прямая является графиком прямой пропорциональности. Чтобы определить коэффициент данной пропорциональности, можно рассмотреть точку, принадлежащую прямой, с координатой *(1; 4).* Чтобы получить заданное значение $y = 4$, необходимо $1 \cdot 4$. Значит, $k = 4$, и функция будет задаваться формулой вида $y = 4x$.

На рисунке 11 b изображена парабола, которая является графиком квадратичной функции. Чтобы определить зависимость переменной y от переменной x, необходимо данное на графике значение x возвести в квадрат, и умножить на 2. Значит, получим формулу $y = 2x^2$.

Задача. Построить графики функций $y = 3x - 6$ и $y = \frac{1}{2}x^2$

Решение: Для построения графиков функций воспользуемся их свойствами и таблицей.

Составим таблицу для первой функции, которая является линейной и ее график – прямая.

x	1	3
y	-3	3

Для построения прямой, из курса геометрии известно, необходимо 2 точки. Так как $k > 0$, то прямая расположена в 1 и 3 четвертях (рис. 12).

Вторая функция квадратичная, графиком ее

x	0	2	-2	3	-3
y	0	2	2	4,5	-4,5

является парабола, поэтому возьмем несколько значений. Так как *k*> *0*, то ветви параболы расположены вверх и ее вершина находится в точке *(0; 0)* (рис.13).

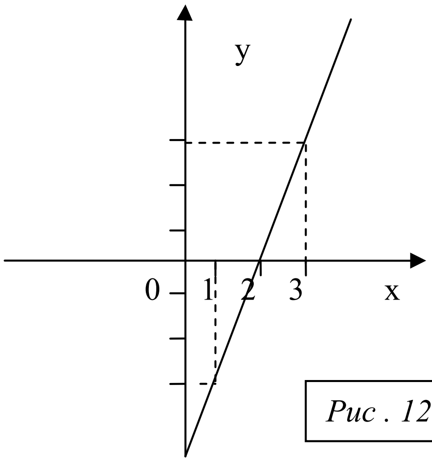


Рис . 12

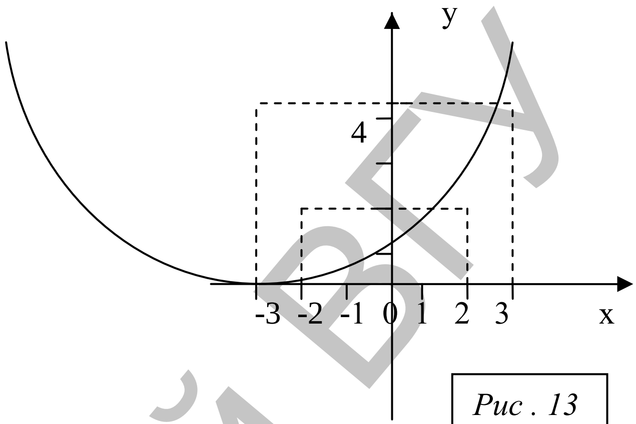


Рис . 13

Задача. Построить график функции $y = |x|$.

Решение: Функцию $y = |x|$ можно рассматривать как сумму двух функций: $y = x$, если $x \geq 0$ *и* $y = -x$, если $x < 0$. Графиком этих функций являются прямые, проходящие через начало координат, причем, для первой функции прямая расположена в 1 и 3 четвертях, для второй – во 2 и 4 четвертях. Область определения данной функции есть множество действительных чисел, область значений – есть промежуток *(0; + ∞)* (значение модуля, т.е. значение *y*, всегда положительно). Функция четная. Имеет наименьшее значение в точке *(0; 0)* и не имеет наибольшего. Поэтому нам достаточно построить части прямых, расположенных в 1 и 2 четвертях и проходящих через начало координат (рис. 14).

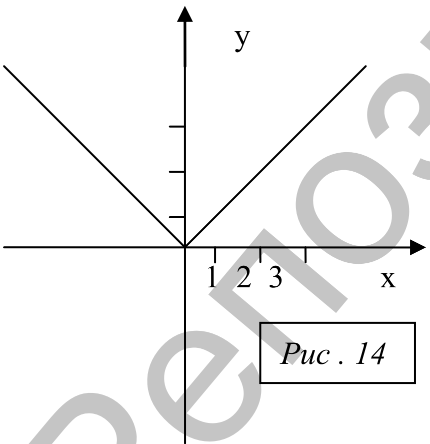


Рис . 14

2. ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ИЗМЕРЕНИЕ

Одна из существенных особенностей окружающей нас действительности – беспрерывное и многообразное ее изменение. Меняется погода, возраст человека, животный и растительный мир. Чтобы дать научное обоснование этим процессам, нужно знать их определенные свойства, например такие, как скорость, время. Масса. Все названные свойства – величины, которые изучались в школьных курсах математики, физики, химии, биологии. Однако этого недостаточно учителю начальных классов – то огромное внимание, которое уделяется величинам и их измерению в начальной школе, требует более углубленной подготовки. На это и нацелено изучение данной темы.

Первоначальное знакомство с величинами происходит в начальной школе, где величина наряду с числом является ведущим понятием. ***Величины*** – это особые свойства реальных объектов или явлений. Например, свойство предметов иметь протяженность называется длиной. Это же слово мы употребляем, когда говорим о протяженности конкретных объектов.

Величина – оно из основных математических понятий, смысл которого с развитием математики подвергался ряду обобщений.

Еще в «Началах» Евклида (3 век до н. э.) были отчетливо сформулированы свойства величин, называемых теперь положительными скалярными величинами. Это первоначальное понятие величины является непосредственным обобщением более конкретных понятий: длины, площади, объема, массы и т.п. Каждый конкретный род величин связан с определенным способом сравнения физических тел или других объектов. Например, в геометрии отрезки сравниваются при помощи наложения, и это сравнение приводит к понятию длины: два отрезка имеют одну и ту же длину, если при наложении они совпадают и т.д.

Величины бывают однородные и разнородные. ***Однородные величины*** выражают одно и тоже свойство объектов некоторого множества. Например, длина дома и длина пути. ***Разнородные*** выражают различные свойства предметов. Например, длина комнаты и площадь комнаты.

Величины обладают следующими свойствами:

1. В пределах системы всех однородных величин устанавливается отношение неравенства: две величины $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ одного и того же рода или совпадают ($\boldsymbol{a = b}$), или первая меньше второй ($\boldsymbol{a<b}$), или вторая меньше первой ($\boldsymbol{b>a}$).Например, длина гипотенузы больше длины катета, масса одного апельсина меньше массы одного арбуза, площадь детской комнаты равна площади спальни и т.д.

2. Величины одного и того же рода можно складывать. В результате получается величина того же рода: $\boldsymbol{a + b = c}$, где $\boldsymbol{c}$ называют суммой величин.

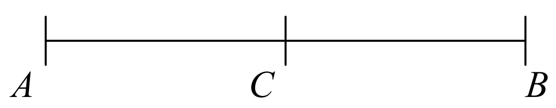
3. Например, $\boldsymbol{S_1 + S_2 = S}$

$\boldsymbol{S_1}$	$\boldsymbol{S_2}$

4. Величину можно умножать на действительное число, получая величину того же рода: $\boldsymbol{b = x \cdot a}$, где величина $\boldsymbol{b}$называется произведением. Например, длину отрезка $\boldsymbol{AB = a}$ умножим на $\boldsymbol{5}$. Получим новый отрезок $\boldsymbol{AC = 5a}$.

5. Величины одного и того же рода вычитают: $\boldsymbol{c = a - b}$, т.е. $\boldsymbol{c}$ такая величина, что $\boldsymbol{a = b + c}$. Например, масса яблок и груш равна $\boldsymbol{a}$, масса яблок – $\boldsymbol{b}$, тогда масса груш определится как $\boldsymbol{a - b = c}$.

6. Величины одного и того же рода делят: $\boldsymbol{c = a : b}$, где $\boldsymbol{c}$ – частное, т.е. $\boldsymbol{c}$ такая величина, что $\boldsymbol{a = b \cdot c}$. Например, отношение длины отрезка $\boldsymbol{AB = a}$ к длине отрезка $\boldsymbol{AC = c}$ равно $\boldsymbol{2}$.



7. Некоторые величины разного рода умножают и делят, получая в результате величину третьего рода. Например, $S = \upsilon \cdot t$, где υ — скорость t - время, S - расстояние. $S_{òð} = \frac{1}{2} a \cdot h.$, где a – сторона треугольника, h – высота, $S_{òð}$ - площадь треугольника.

Сравнивая величины, мы можем установить, какая больше из них или меньше. Чтобы получить более точный результат сравнения, необходимо величины измерить. ***Измерение*** заключается в сравнении данной величины с некоторой величиной того же рода, принятой за единицу. Процесс сравнения зависит от рода рассматриваемых величин: для длин он один, для площадей – другой, для масс – третий и т.д. Но каким бы ни был этот процесс, в результате измерения величина получает определенное численное значение при выбранной единице.

Вообще, если дана величина ***а*** и выбрана единица величины ***е,*** то в результате измерения величины ***а*** находят такое действительное число ***х,*** что ***а = хе***. Это число ***х*** называют *численным значением величины* ***а*** при единице величины ***е:*** $x = m_e(a)$.

Например, ***5кг = 5×1кг, 10м = 10 ×1м.***

При этом считают, что 1) равным величинам при одной и той же величине соответствуют равные числовые значения;

2) большей величине соответствует большее числовое значение при одной и той же единице ***е***

1) числовое значение суммы величин при одной и той же единице ***е*** равно сумме числовых значений слагаемых величин.

Используя определение умножения величины на число, можно обосновать процесс перехода от одной единицы величины к другой.

Например, $\frac{1}{12}$ ***ч*** $= \frac{1}{12} \times$ ***1ч,*** а ***1ч = 60 мин.*** Следовательно, $\frac{1}{12}$ ***ч*** $=$ $\frac{1}{12} \times$***60 мин = 5 мин.***

Величины, которые вполне определяются одним численным значением, называются ***скалярными величинами***. Например: масса, объём, длина, площадь.

Величины, которые кроме численного значения определяются направлением, называются ***векторными величинами***. Например: сила, ускорение, напряжение поля и т.д.

Мы с вами рассматриваем только положительные скалярные величины.

Операции над величинами сводятся к операциям над числами.

1. Если величины a и b измерены при помощи единицы величины e, то отношения между величинами a и b будут такими же, как и отношения между их численными значениями: $a = b \Leftrightarrow m_e(a) = m_e(b)$

$a<b \Leftrightarrow m_e(a) < m_e(b)$

$a>b \Leftrightarrow m_e(a) > m_e(b).$

Например, ***9м > 5м***, так как ***9 > 5.***

2. Если величины a и b таковы, что $b = xa$, где x – положительное число и величина a измерена при помощи единицы e, то чтобы найти численное значение величины b при единице e, достаточно число x умножить на число $m_e(a)$: $b = xa \Leftrightarrow m_e(b) = x \times m_e(a).$

Например, если масса***b***в 3 раза больше массы а, т.е. ***b = 3a*** и ***a = 5кг***, то ***b = 3a = 3 × (5кг) = (3 ×5)кг = 15кг.***

3. Если величины a и b измерены при помощи единицы e, то чтобы найти численное значение суммы $a + b$, достаточно сложить численные значения **a** и b: $a + b = c \Leftrightarrow m_e(a + b) = m_e(a) + m_e(b).$

Например, $a = 10см, b = 20см$, тогда $a + b = 10см + 20см = (10 + 20)см = 30см.$

В истории развития единиц величин можно выделить несколько периодов.

Самым древним является период, когда единицы длины отождествлялись с названием частей человеческого тела. Так, в качестве единиц длины применяли ладонь, локоть, фут, дюйм (длина сустава большого пальца) и пр. В качестве единиц площади в этот период выступали колодец (площадью которую можно полить из одного колодца), соха или плуг (площадь, обработанная за день сохой) и др.

В XIV – XVI в.в. появляются в связи с развитием торговли так называемые объективные единицы измерения величин. В Англии, например, дюйм (длина трех приставленных друг к другу ячменных зерен), фут (ширина 64 ячменных зерен, положенных бок о бок). В качестве единиц массы были введены гран (масса зерна) и карат (масса семени одного из видов бобов).

Следующий период в развитии величин – введение единиц, взаимосвязанных друг с другом. В России, например, такими были единицы миля, верста, сажень, аршин: 3 аршина = 1саженю, 500 саженей = 1 версте, 7 верст = 1 миле.

Однако связи между единицами величин были произвольными, свои меры длины, площади, массы использовали не только отдельные государства, но и отдельные области внутри одного и того же государства. Это тормозило развитие производства, мешало научному прогрессу и развитию торговых связей.

Новая система единиц, которая впоследствии явилась основой для международной системы, была создана во Франции в конце XVIII века. В качестве основной единицы длины в этой системе принимался метр – одна сорокамиллионная часть длины земного меридиана, проходящего через Париж.

Кроме метра, были установлены: ар – площадь квадрата со стороной 10м; литр – объем и вместимость жидкостей и сыпучих тел, равный объему куба с длиной ребра 0,1м; грамм – масса чистой воды, занимающая объем куба с длиной ребра 0,01м.

Были введены также десятичные кратные и дольные единицы, образующиеся с помощью приставок: кило(10^3), гекто (10^2), дека (10^1), деци (10^{-1}), санти (10^{-2}), милли (10^{-3}).

Единицы массы **килограмм** был определен как масса 1 $дм^3$ воды при температуре 4 ^oC.

Так как все единицы величин оказались тесно связанными с единицей длины метром, то новая система величин получила название **метрической системы мер.** Создание метрической системы мер было большим научным достижением – впервые в истории появились меры, образующие стройную систему, основанные на образце, взятом из природы, и тесно связанные с десятичной системой счисления.

Но уже скоро в эту систему пришлось вносить изменения. Оказалось, что длина меридиана была определена недостаточно точно. Поэтому от единицы длины, взятой из природы, пришлось отказаться. Метром стали считать расстояние между штрихами, нанесенными на концах архивного метра, а килограмм – массу эталона архивного килограмма.

В России метрическая система маар начала применяться с 1899 года, когда был принят специальный закон, проект которого был разработан Д.И. Менделеевым.

Бурное развитие науки и производства в XX веке привело к тому, что к 50-м годам возникло множество различных систем единиц, дополняющих и развивающих метрическую систему мер. Встала проблема создания единой универсальной системы единиц величин. В 1960 году

XI Генеральной конференцией мер и весов было принято решение о введении ***Международной системы единиц (*****СИ).** Это единая универсальная практическая система единиц для всех отраслей науки, техники, народного хозяйства и преподавания. В этой системе семь основных единиц: метр, килограмм, секунда, ампер (ед. силы тока), кельвин (ед. температуры) и кандела (ед. силы света).

Введены новые определения. Метр рассматривается как расстояние, которое проходит в вакууме плоская электромагнитная волна за $\frac{1}{299792458}$ долей секунды. Килограмм – это масса цилиндра из платиноиридиевого сплава, изготовленного в 1889 году (хранится в Международном бюро мер и весов в г. Севре, Франция). Секунда равна 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133. Измерять на практике все длины в метрах, массы в килограммах, время в секундах неудобно. Поэтому из основных единиц образуют другие единицы – кратные и дольные, которые образованы из основных с помощью приставок:

Наименование приставки	*Обозначение приставки*	*множитель*
мега	М	10^6
кило	к	10^3
гекто	г	10^2
дека	да	10
деци	д	10^{-1}
санти	с	10^{-2}
милли	м	10^{-3}
макро	мк	10^{-6}
нано	н	10^{-9}

Величины, которые определяются через длину, массу и время, называют ***производными величинами.*** Например, единица площади – квадратный метр ($м^2$), единица объема – кубический метр ($м^3$), литр (л), единица скорости – метр в секунду (м/с) и пр. Их единицы должны быть согласованы с основными. Единицы величин, принимаемые в нашей стране, их наименования и правила применения устанавливаются Государственным стандартом (ГОСТом). В соответствии с ним используется Международная система единиц, а так же определена группа внесистемных единиц, которые разрешается использовать наряду с единицами СИ. В частности, для массы разрешается применение такой единицы, как тонна (т); для времени – минута (мин), час (ч), сутки, неделя, месяц, год, век; для площади – гектар (га); для температуры – градус Цельсия (^0C).

2.1 Длина отрезка.

Назовем ***длиной отрезка*** положительную величину такую, что

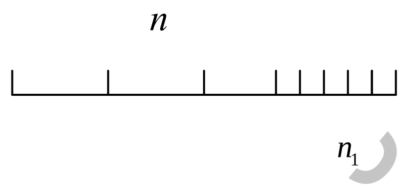
1) равные отрезки будут иметь равные длины
2) если отрезок разбить на конечное число отрезков, то его длина будет равна сумме длин этих отрезков.

<u>Основные свойства длин отрезков:</u>

1) При выбранной единице длина отрезка выражается положительным действительным числом. И обратно, для каждого действительного числа существует отрезок, длина которого выражена этим числом.

Доказательство: Выберем отрезок длины e. Примем его за единицу длины. На отрезке a от одного из его концов отложим последовательно отрезки = e. Если отрезки, равные e, отложились n раз и конец последнего совпал с концом a то говорят, что значения длины отрезка aесть натуральное число n, т.е. $a=n\cdot e$.Если отрезки, равные e, отложились n раз и получился остаток $<e$, то на нем откладывают отрезки равные $e_1 = 1/10\, e$.

Если они отложились точно n_1 раз, то длина отрезка $a = n \cdot e + n_1 \cdot {}^{1}\!/_{10} \cdot e =$ $n, n_1 \cdot e$, т.е. значение длины отрезка a есть десятичная дробь. Если получился при откладывании остаток $< e_1$, то откладываем отрезки равные $e_2 = {}^{1}\!/_{10}\ e_1 = {}^{1}\!/_{100}\ e$. Данный процесс можно представить бесконечно продолжительным. Но в любом случае получаем, что при выбранной единице длина отрезка выражается положительным действительным числом.



2) Если два отрезка равны, то численные значения их длин т.ж. равны и обратно, при равенстве численных значений длин двух отрезков получаем равенство самих отрезков: $a = b \Leftrightarrow m_e(a) = m_e(b)$

Доказательство: основывается на том, что, измеряя длины отрезков при выбранной единице e, мы будем откладывать на равных отрезках одно и то же число таких e и доли единиц. Следовательно, численные значения длин равных отрезков равны.

Верно и обратное: если численные значения длин двух отрезков равны, то они описывают процесс построения равных отрезков.

3) Если данный отрезок есть сумма нескольких отрезков, то численное значения его длины равно сумме численных значений длин отрезков слагаемых. Если численное значение длины отрезка равно сумме численных значений нескольких значений, то и сам отрезок равен сумме этих отрезков: $c = a + b \Leftrightarrow m_e(c) = m_e(a) + m_e(b)$

Доказательство: пусть $a = \frac{P}{n} \cdot e$ и $b = \frac{Q}{n} \cdot e$. Чтобы получить значение суммы $a + b$ отложим сначала P отрезков равных $\frac{1}{n} \cdot e$, потом Q таких же отрезков. Получим, что длина суммы данных отрезков выражается числом

$P \cdot \frac{1}{n} \cdot e + Q \cdot \frac{1}{n} \cdot e = (\frac{P}{n} + \frac{Q}{n}) \cdot e = c$. Обратно : сумма $\frac{P}{n} + \frac{Q}{n}$ означает, что отрезок $\frac{1}{n} \cdot e$ надо откладывать $P + Q$ раз, т.е. получаем отрезок $c = (P + Q) \frac{1}{n} \cdot e = P \cdot \frac{1}{n} \cdot e + Q \cdot \frac{1}{n} \cdot e = \frac{P}{n} \cdot e + \frac{Q}{n} \cdot e = a + b$. Следовательно, если численные значения длин отрезков складываются, то складываются и соответствующие отрезки.

4) Если длины отрезков a и b таковы, что $b = x \cdot a$, где x– положительное действительное число, и длина a измерена при помощи единицы e, то, чтобы найти численное значение длины b при единице e, достаточно число x умножить на численное значение длины a.

$b = x \cdot a, \Leftrightarrow m_e(b) = x \cdot m_e(a)$

Доказательство: Пусть $b = x \cdot a$ и $a = \frac{P}{n} \cdot e$. Тогда $b = x \cdot \frac{P}{n} \cdot e = (x \cdot \frac{P}{n}) \cdot e$, т.е. $m_e(b) = x \cdot m_e(a)$.

Произведение $x \cdot \frac{P}{n}$ означает, что отрезок e надо откладывать $x \cdot \frac{P}{n}$ раз, т.е. $(x \cdot \frac{P}{n}) \cdot e = x \cdot \frac{P}{n} \cdot e = x \cdot a = b$.

5) При замене единицы длины численное значение длины увеличивается (уменьшается) во столько раз, во сколько новая единица меньше (больше) старой.

Доказательство: Пусть есть две единицы (e_1 и e_2) длины и пусть $e_1 = k \cdot e$.

Если длина отрезка $a = \frac{P}{n} \cdot e$, то при единице e_1 :$a = \frac{P}{n} \cdot \frac{1}{K} \cdot e_1$, т.е уменьшается в k раз.

Если $a = \frac{Q}{n} \cdot e_1$, то при единице e длина отрезка $a = \frac{Q}{n} \cdot e \cdot k$, т.е. увеличивается в k раз.

6) Если длина отрезка a больше длины отрезка b, то численное значение отрезка a больше численного значения отрезка b при выбранной единице e. Верно и обратное. $a > b \Leftrightarrow m_e(a) > m_e(b)$

7) Если данный отрезок есть разница двух отрезков, то численное значение его длины равно разности численных значений длин отрезков, составляющих разность и обратно. $c = a - b \Leftrightarrow m_e(c) = m_e(a) - m_e\ (b)$

8) Положительное число x есть отношение длин отрезков a и b при выбранной единице $e. x = a : b \Leftrightarrow x = m_e(a) : m_e\ (b)$

Рассмотренные свойства дают возможность действия над отрезками свести к действию над числами, которые выражают численное значение длин этих отрезков.

В начальном курсе математики длины отрезков измеряют, строят отрезки заданной длины, сравнивают длины отрезков, производят над ними действия.

Единицы измерения длины: сантиметр, дециметр, метр, километр, миллиметр.

2.2 Площадь фигур

Площадью фигуры называют положительную величину, численное значение которой обладает следующими свойствами:

1. равные фигуры имеют равные площади,
2. если фигура разбивается на части, то площадь этой фигуры равна сумме площадей этих частей.

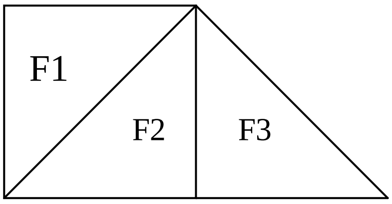
Площадь характеризуется теми же свойствами, что и длина, но заданы они на разных множествах: длина – на множестве отрезков, а площадь – на множестве плоских фигур. Условимся обозначать площадь *S(F).*

Чтобы измерить площадь фигуры, нужно иметь единицу площади. Как правило, это площадь квадрата со стороной, равной единичному отрезку e: $S = e^2$. Например, если длина стороны единичного квадрата a, то его площадь a^2.

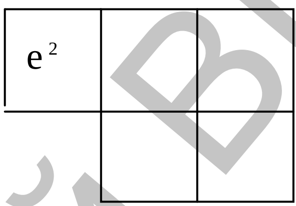
Измерение площади состоит в сравнении площади данной фигуры с площадью единичного квадрата e^2. Результатом этого сравнения является такое число x, что $S(F)=xe^2$. Число x называют численным значением площади при выбранной единице площади.

Например, площадь квадрата со стороной *4* единицы равна $4^2 = 16$ единиц квадратных, если единицей площади является $см^2$, то площадь фигуры равна $16см^2$.

Рассмотрим некоторые приемы измерения площадей фигур.



$$S(F) = S(F1) + S(F2) + S(F3)$$

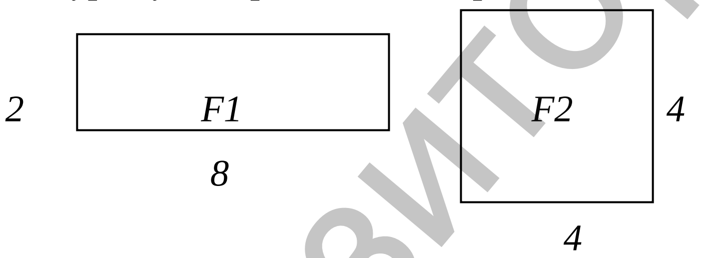


$$S(F) = 5e^2$$

Правила сравнения площадей и действий над ними.

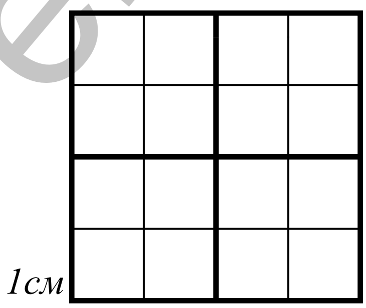
1. Если фигуры равны, то равны и численные значения их площадей. Но если площади фигур равны, то фигуры не будут равными.

Фигуры, у которых площади равны, называют *равновеликими.*



$$S(F1) = 16e^2, \; S(F2) = 16e^2$$

2. Если фигура F состоит из фигур *F1, F2, F3, …Fn,* то численное значение площади этой фигуры $S(F) = S(F1) + S(F2) + \ldots + S(Fn)$ при одной и той же единице площади. Например:

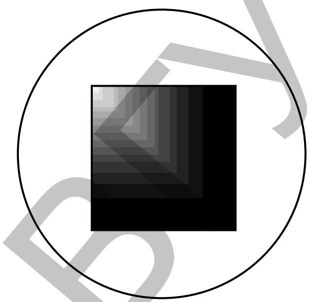


$$S(F) = 16 \cdot (1см)^2 = 16см^2$$

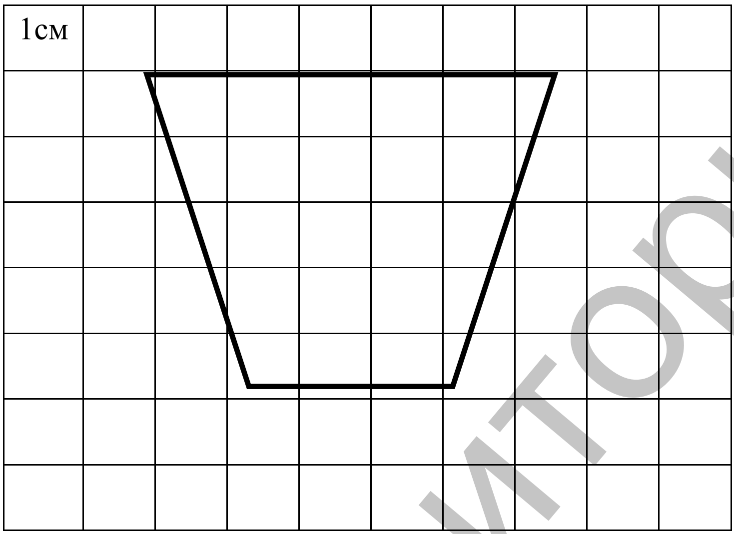
$$S(F) = 4 \cdot S(F1) = 4 \cdot (4см)^2 = 16см^2$$

$$S(F) = S(F1) + 3 \cdot S(F2) =$$
$$4см^2 + 3 \cdot (4см)^2 = 16см^2$$

3. При замене единицы площади численное значение площади увеличивается (уменьшается) во столько раз, во сколько новая единица меньше (больше) старой. Например: $7см^2$ выразим в дециметрах. $1дм = 10см$. Значит, $1см^2 = 0,01дм^2$. Следовательно, $7см^2 = 7 \cdot 0,01\ дм^2 = 0,07\ дм^2$.



В начальной школе понятие площади фигуры формируется на основе сравнения фигур: так как квадрат помещается внутри круга, то его площадь меньше площади круга.



Учащиеся знакомятся с приемом измерения площадей фигур при помощи *палетки* – сети квадратов со стороной 1см. Наложив палетку на фигуру, учащиеся определяют: 1) число квадратов, которые лежат полностью внутри фигуры; 2) число квадратов, через которые проходит контур фигуры. В результате получают приближенное значение площади. Если n– число целых квадратов, p – число квадратов, через которые прошел контур, то площадь фигуры может быть представлена так: $n \cdot e^2 < S(F) < (n + p) \cdot e^2$.Тогда, чтобы найти приближенное значение площади фигурыF, достаточно сложить полученные численные значения площади по недостатку и по избытку и разделить эту сумму пополам.$S(F) \approx \frac{ne^2 + (n+p)e^2}{2} =$

$$\frac{n+(n+p)}{2} \cdot e^2 = \frac{2n+p}{2} \cdot e^2 = (n + \frac{p}{2}) \cdot e^2$$

Т.е. приближенное значение площади фигуры равно сумме числа квадратов, лежащих внутри фигуры и половине числа квадратов, через которые прошел контур этой фигуры.

Например, оказалось, что полных квадратов *14,* квадратов, через которые прошел контур фигуры – *18.* В результате получаем значение площади фигуры:$14 + 18 : 2 \approx 14 + 9 = 23$.Значит $S(F) = 23$ *см*^{2}

Численное значение площади прямоугольника ученики начальных классов находят сначала, непосредственно подсчитывая число единичных квадратиков, лежащих внутри этого прямоугольника, или используя палетку, а затем используют косвенный способ – перемножают численные значения длин сторон прямоугольника.

Единицы площади:*1см*^{2} *=100мм*^{2} *, 1дм*^{2} *=100 см*^{2} *, 1м*^{2} *=100дм*^{2} *, 1а=100 м*^{2} *, 1га=100а, 1км*^{2} *=100га (а – ар – сотка, га – S квадрата со стороной 100м)*.

2.3 Объем тела и его измерение

Объем – величина, характеризующая размер геометрического тела. В повседневной жизни нам часто приходится определять объемы различных тел. Например, нужно определить объем ящика. Это несложно подсчитать: объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению величин длины, ширины и высоты при одной и той же единице измерения.

Ребенок, не знающий формул, может подойти к измерению объема параллелепипеда опытным путем: плотно уложить в него кубики с сантиметровым ребром. Их число и выразит собою объем данной фигуры.

Таким образом, для простых тел ***объем*** **–** это положительная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами: 1) равные тела имеют равные объемы, 2) если тело разбито на части, являющиеся простыми телами, то объем данного тела равен сумме объемов его частей. Объем тела Т обозначают **V(T).**

Чтобы измерить объем, нужно иметь единицу объема. Как правило, за такую единицу принимают объем куба, ребро которого равно единице длины *e,* т.е. e^3.

Чтобы сравнить объемы двух сосудов, можно наполнить один из них водой (песком) и перелить во второй. Если второй сосуд окажется заполненным и воды в первом не останется, то $V1 = V2$, если второй не заполнится весь, то $V1 < V2$, если же в первом останется вода, то $V1 > V2$.

Если тело разбить на части и потом сложить их по иному, то объем полученного тела будет равен объему исходного. Этим правилом пользуются для отыскания формул объемов различных тел. Например, наклонный параллелепипед можно разбить на части и переложить так, что получится прямоугольный параллелепипед. Следовательно, объем наклонного параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту (так же как и прямоугольного).

Объемы простых тел можно отыскать и вписывая в них более простые тела. Например, определяя объем пирамиды, можно вписать в нее стопку призм и подсчитать их суммарный объем, затем вписать призмы с меньшей высотой и вновь подсчитать суммарный объем и т.д. Повторяя эту процедуру неограниченное количество раз, и устремляя высоту вписываемых призм к нулю, нетрудно получить в пределе формулу для объема пирамиды: $V_{пир} = 1/3 \cdot S_{осн} \cdot h$

Единицы измерения объемов: *$1см^3 = 1000м^3$, $1дм^3 = 1000см^3$, $1м^3 = 1000дм^3$, $1км^3 = 1000\,000\,000м^3$.*

Кубический см – это объем куба с ребром в 1см. Кубический дм называют литром: $1л = 1{,}000028 \cdot 10^{-3} м^3$. В житейской практике единицами объема служат емкости, используемые для сыпучих и жидких тел.

2.4 Масса тела и ее измерение

При изучении веса тела путем сравнивания его с весом другого тела выявляется новое свойство тел, которое называется массой. **Масса** – одна из основных физических величин. **Вес** – это сила с которой тело притягивается землей. Поэтому вес тела зависит не только от самого тела. Например, он различен на разных широтах: на полюсе тело весит на 0,5% больше, чем на экваторе. Однако при своей изменчивости вес обладает особенностью: отношения весов двух тел в любых условиях остается неизменным.

С математической точки зрения **масса** – это такая положительная величина, которая обладает свойствами: 1) масса одинакова у тел, уравновешивающих друг друга на весах. 2) масса складывается, когда тела соединяются вместе: масса нескольких тел, вместе взятых, равна сумме их масс.

Сравним массы двух тел. На одну чашу весов положим тело *а*, на другую–*b*. Если вторя чашка опустилась, а первая поднялась выше второй, то говорят, что масса тела *а* меньше массы тела *b*. Если вторая поднялась, а первая опустилась, то масса тела *а* больше массы тела *b*. Если же весы уравновешены, массы данных тел равны.

Измерение массы производится с так же помощью весов. При этом выбирается единичное тело *е*, масса которого принимается за единицу. Можно взять и доли этой массы. На одну чашу весов кладут тело, которое измеряют, на другую _ тела, выбранные в качестве единицы массы (гири). Гирь должно быть столько, чтобы они уравновешивали первую чашку весов. В результате взвешивания получается численное значение массы данного тела. Это значение приближенное. Например, *m = 15кг240г*. Число *15240* следует рассматривать как приближенное значение массы данного тела при единице массы – грамм: 1г = 1/1000 кг.

Если сравнивать данное выше определение массы с определения длины, площади, то увидим, что масса характеризуется теми же свойствами, что и длина и площадь, но задана она на множестве физических тел.

Для численных значений массы справедливы все утверждения, сформулированные для длины. Т.е., сравнение масс, действия над ними сводятся к сравнению и действиям над их численными значениями при одной и той же единице массы.

Единицы измерения массы: *1т = 1000 кг, 1ц = 100 кг, 1т = 10 ц, 1кг = 1000 г*. Основная единица массы – килограмм, из нее и образуются другие единицы.

2.5 Промежутки времени и их измерение

Понятие времени более сложное, чем понятие длины и массы. В обыденной жизни время – это то, что отделяет одно событие от другого. В математике и физике время рассматривают как скалярную величину, потому что промежутки времени обладают свойствами, похожими на свойства длины, площади, массы.

1) Промежутки времени можно сравнивать. Например, на один и тот же путь пешеход затратит времени больше, чем велосипедист.

2) Промежутки времени можно складывать. Например, лекция в ВУЗе длится столько, сколько два урока в школе.

3) Промежутки времени можно вычитать. Так, например, можно найти разницу во времени движения лодки по течению и против течения.

4) Промежутки времени можно умножать на положительное число. Например, автомобиль проедет 60 км за 1 час, а 120 км за 2 часа (1 час $\cdot$ 2).

4) Промежутки времени измеряют. Но процесс измерения времени отличается от измерения длины. Для измерения длины можно

многократно использовать линейку, перемещая ее от точки к точке. Промежуток времени, принятый за единицу, может быть использован лишь один раз. Поэтому единицей времени может быть регулярно повторяющийся процесс. Такой единицей в Международной системе единиц названа секунда.

Единицы измерения времени: секунда, минута, час, сутки, год, неделя, месяц, век.

Год – это время обращения Земли вокруг Солнца. Сутки – это время обращения Земли вокруг своей оси. 1 сутки = 24 ч, 1 ч = 60 мин, 1 мин = 60 сек, один год приблизительно равен $365\frac{1}{4}$ суток. Но год жизни людей складывется из целого числа суток. Поэтому вместо того, чтобы к каждому году прибавлять 6 ч, прибавляют к каждому четвертому году целые сутки. Этот год состоит из 366 дней и называется високосным. Деление суток на 24 часа восходит из Древнего Египта. Минута и секунда появились в Древнем Вавилоне (влияние шестидесятеричной системы счисления). Месяц не очень определенная единица времени. Один месяц может содержать 31, 30, 28 (29) дней. Но существует эта единица времени с древних времен и связана с движением Луны вокруг Земли. Один оборот вокруг Земли Луна совершает приблизительно за 29,5 суток и за год она совершает примерно 12 таких оборотов. Эти данные послужили основой для создания древних календарей, а результатом их многовекового усовершенствования является тот календарь, который используется в настоящее время.

В первые календарь с таким чередованием лет (365 – 366 дней) ввел в 46 г. до н.э. римский император Юлий Цезарь. Согласно ему новый год (в отличие от предыдущих календарей) начинался с 1 января и состоял из 12 месяцев. Сохранилась там и такая мера времени, как неделя, придуманная вавилонскими астрономами. Этот календарь просуществовал более 16 столетий.

Но постепенно люди стали замечать, что результаты измерения времени по календарю не сходятся с результатами измерения по Солнцу. Например, 21 марта – день весеннего равноденствия в XVI веке пришелся на 11 марта по календарю. Такая разница накапливалась постепенно, так как по юлианскому календарю год на 11 мин 14 сек больше солнечного, и за 400 лет набегало примерно трое с лишним суток. Чтобы в дальнейшем расхождения не возникало, в 1582 г. появился новый, григорианский календарь (назван в честь главы католической церкви папы Григория XIII). В нем было уменьшено число високосных лет. По юлианскому календарю високосными были годы, число которых делилось на 4. По григорианскому из их числа исключались те, которые были вековыми и не делились на 400: например, 1600 год, 2000– високосные, а 1700, 1800 1900, 2100 и т.д. из их числа исключаются, они содержали 365 суток.

Этот календарь был принят в европейских странах. В России до революции православная церковь отклоняла эту реформу, что причиняло много неудобств. Например, телеграмма из-за границы приходила в Россию на 13 дней раньше, чем была отправлена. 14 февраля 1918 года у нас был введен новый стиль, после 31 января наступило 14 февраля. С тех пор мы живем по григорианскому календарю.

Григорианский календарь принят не всеми государствами мира. Например, Египет и другие страны Востока пользуются лунным календарем. Год по этому календарю равен 12 лунным месяцам и короче солнечного на 11 дней. Кроме того, если по григорианскому календарю 1986 год, то в Иране это 1406 год. Чем это вызвано?

Чтобы вести счет, надо иметь начало отсчета. У времени нет конца и нет начала. Оно течет и течет. Поэтому люди сами устанавливают начало отсчета. Установить начало суток можно разными способами. Так, древние египтяне вели летоисчисление по годам правления фараонов, китайцы – по династиям императоров, римляне – от основания Рима, другие народы – от «сотворения мира» или «рождения Христа». В древней Руси год начинался в марте, когда приступали к полевым работам. С введением христианства был принят юлианский календарь и начало летоисчисления от «сотворения мира», причем христианская церковь приурочила это к 5508 году до «рождества Христова», а началом года считала 1 сентября. Указом Петра 1 Русь перешла на другое летоисчисление: началом года стало 1 января, а года стали считать не от «сотворения мира», а от «рождества Христова» и 7208 год стал 1700 годом. В настоящее время это принято большинством государств и называется нашей эрой.

2.6 Зависимости между величинами

Понятие величины, принимающей различные численные значения, является отражением изменяемости окружающей нас действительности. Но всевозможные изменения в реальном мире происходят в зависимости друг от друга. Изучение этих связей посредством изучения зависимостей между величинами является способом применения математики для решения практических задач.

Зависимости между величинами многообразны. Их изучают различные науки. Мы рассмотрим те, которые изучаются в начальном курсе математики.

Например, рассмотрим величины, связанные с равномерным прямолинейным движением: время (t), скорость (v), расстояние (S). Зависимость между ними выражается следующей формулой: $S = v \cdot t$. Если при этом скорость принимает одно и то же значение, то зависимость между расстоянием S и временем t прямо пропорциональна. Если же не меняется расстояние, то скорость v и время t оказываются связанными обратно пропорционально: $v = S/t$ либо $t = S/v$.

Прямо пропорциональная зависимость между временем и расстоянием обладает свойством: во сколько раз увеличивается (уменьшается) время, во столько же раз увеличивается (уменьшается) пройденное расстояние.

Обратно пропорциональная зависимость выражается так: во сколько раз во сколько раз увеличивается (уменьшается) время (скорость), во столько же раз уменьшается (увеличивается) скорость (время).

Задача. Из пункта *А* в пункт *В* вышел пешеход со скоростью *4 км/ч.* На каком расстоянии от В будет он находиться через *2* часа и через *4* часа, если расстояние *АВ = 20 км*?

Решение: Пусть t – время движения, S – расстояние от пункта В. Тогда за t часов пешеход пройдет *4 км* и будет находиться от *В* на расстоянии $S = 20 - 4t$. Т.о. зависимость между пройденным расстоянием и временем движения имеет вид линейной функции: $S = S_0 - v \cdot t$, где S_0 - расстояние между пунктами *А* и *В*. Если $t = 2ч$, то $S = 12$ *км*, если $t = 4ч$, то $S = 4км$.

Задача. Скорость машины *60 км/ч,* скорость велосипедиста в *5* раз меньше. Велосипедист проехал расстояние от села до станции за *2 ч.* За сколько минут можно проехать это расстояние на машине?

Решение: В задаче идет речь о трех величинах: скорости, времени и расстоянии. Две из них – скорость и время – принимают различные значения, а третья величина – расстояние – постоянна. Зависимость между скоростью и временем обратно пропорциональна и может быть выражена формулой $t = S/v$.

Поскольку скорость машины в *5* раз больше скорости велосипедиста, то времени для машины надо в *5* раз меньше, т.е. *2 ч = 2 · 60 мин = 120 мин* и *120 мин : 5 = 24 мин.*

Многообразные зависимости существуют и между другими величинами: объемом и массой; стоимостью товара, количеством и ценой; объемом работы, временем работы и производительностью труда; количеством ткани, количеством изделий и расходом ткани на одно изделие и пр.

Задача. Стальной брусок объемом *60* $см^3$ имеет массу *468 г*. Какова масса стального бруска, объемом *25* $см^3$?

Решение: В задаче рассматриваются величины: объем бруска и его масса. Зависимость между ними прямо пропорциональная, т.к. может быть выражена формулой $m = k \cdot V$, где m – масса, V– объем, k– коэффициент, означающий массу *1* $см^3$ бруска. Воспользуемся свойством прямой пропорциональности. Установим, во сколько раз объем первого бруска больше объема второго: *60* $см^3$ *: 25* $см^3$ *= 2,4 (раза).* Так как зависимость прямо пропорциональная, то масса первого бруска в 2,4 раза больше массы второго. Разделим массу первого бруска на 2,4 и найдем массу второго бруска, объемом *25* $см^3$. *468 : 2,4 = 195 (г).*

Рассмотрим зависимости между другими величинами.

Цена – стоимость в деньгах. Например, цена билета. Стоимость – это выраженная в деньгах ценность чего-нибудь или величина затрат на что-нибудь. Цена отражает уровень общественно необходимых затрат труда. Стоимость определяется общественно необходимым рабочим временем. Зависимость между этими величинами может быть такой: *стоимость = количество товара · на цену.*

Задача. Цена одного карандаша *300* рублей. Запишем формулу, выражающую зависимость стоимости (***y*** *руб*) от количества (***x*** *штук кар*): ***y*** *= 300 ·**x*** – прямо пропорциональная зависимость.

Пусть за все карандаши заплатили *1200* рублей. Запишем формулу, выражающую зависимость количества карандашей (***x*** *штук*) от их цены (*z коп*): $z = 1200 / x$, что представляет собой обратно пропорциональную зависимость.

3. ЧИСЛОВЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ, ЧИСЛОВЫЕ РАВЕНСТВА И НЕРАВЕНСТВА

С помощью цифр, знаков операций и скобок можно составить различные ***числовые выражения***. Например, 5 – 3 или (6 + 12): 3. Как правило, каждому числовому выражению соответствует числовое значение этого выражения – число, получаемое в результате последовательного выполнения операций. Про выражение, не имеющее числового значения, говорят, что оно не имеет смысла.

Если два числовых выражения соединить знаком равенства, то получим высказывание, называемое ***числовым равенством.*** Они могут быть истинными, если значения выражений в левой и правой частях равны, и ложными, если значения не равны.

Числовые равенства обладают следующими свойствами:

1) если к правой и левой части прибавить или вычесть одно и то же числовое выражение, то получим истинное числовое равенство;

2) если правую и левую части умножить или разделить на одно и то же числовое выражение, то получим истинное числовое равенство;

Если два числовых выражения соединить знаком « < »или « > », то получим высказывание, называемое ***числовым неравенством***. Они так же могут быть истинными или ложными.

Числовые неравенства обладают следующими свойствами:

1) если к правой и левой части прибавить или вычесть одно и то же числовое выражение, то получим истинное числовое неравенство;

2) если правую и левую части умножить или разделить на одно и то же числовое выражение, имеющее положительное значение, и знак неравенства оставить без изменения, то получим истинное числовое равенство;

3) если правую и левую части умножить или разделить на одно и то же числовое выражение, имеющее отрицательное значение, и знак неравенства изменить на противоположный, то получим истинное числовое равенство.

Неравенство вида $a>b>c$ представляет собой конъюнкцию ($\wedge$) числовых неравенств $a>b$ и $b>c$.

Неравенство $a \geq b (a \leq b)$ представляет собой дизъюнкцию ($\vee$) числового неравенства $a>b$ $(a<b)$ и числового равенства $a = b$.

Например, $5 > 3 > 1 \Leftrightarrow (5>3) \wedge (3>1)$–истинно.

Задача. Определить, какие записи являются числовыми выражениями, числовыми равенствами, числовыми неравенствами:

а) 32; б) (43 + 13) + 7; в) 76 – 6 = 70; г) 45 + d – 5;

д) 3x + 5 = 34 : 2; е) 24 : 3 > 7 – 1.

Решение: а) 32 – числовое выражение, как и всякое другое число.

б) (43 + 13) + 7 - числовое выражение, так как оно состоит чисел, знаков операций и скобок;

в) 76 – 6 = 70 – не является числовым выражением, так как содержит знак « = », это числовое равенство;

г) 45 + d – 5 – не является числовым выражением, так как содержит букву;

д) $3x + 5 = 34 : 2$ не является числовым выражением и числовым равенством, так как содержит букву;

е) 24 : 3 > 7 – 1- числовое неравенство

Задача. Какие из следующих числовых выражений имеют смысл на множестве R, и какие не имеют:

$$a) \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{10}-1\frac{1}{15}\right):0,8+0,2; \qquad b) \frac{8,3\cdot 1,2+4,2}{\left(3\frac{3}{5}-2\frac{1}{15}\right)\cdot 5-7\frac{2}{3}}.$$

Решение:

$$a)\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{10}-1\frac{1}{15}\right):0,8+0,2=\left(\frac{5}{30}+\frac{3}{30}-1\frac{2}{30}\right):\frac{8}{10}+\frac{2}{10}=-\frac{24}{30}\cdot\frac{10}{8}+\frac{2}{10}=-\frac{4}{5}.$$

Так как данное выражение имеет численное значение $\frac{4}{5}\in R$, то оно имеет смысл на множестве *R;*

$$b)\frac{8,3\cdot 1,2+4,2}{(3\frac{3}{5}-2\frac{1}{15})\cdot 5-7\frac{2}{3}}=\frac{9,96+4,2}{1\frac{8}{15}\cdot 5-7\frac{2}{3}}=\frac{14,16}{7\frac{2}{3}-7\frac{2}{3}}=\frac{14,16}{0}.$$

Так как получили выражение, в знаменатели которого стоит нуль, а на нуль делить нельзя, то данное выражение не имеет смысла.

Задача. Выполните действия: $\frac{2^6\cdot 6^{18}}{2^{25}\cdot 9^9}$.

Решение: $\frac{2^6\cdot 6^{18}}{2^{25}\cdot 9^9}=\frac{2^6\cdot(2\cdot 3)^{18}}{2^{25}\cdot(3^2)^9}=\frac{2^6\cdot 2^{18}\cdot 3^{18}}{2^{25}\cdot 3^{18}}=\frac{2^{24}}{2^{25}}=2^{-1}=\frac{1}{2}$

Задача. Выполнить действия: $\sqrt{\frac{4\frac{1}{2}\cdot 0,12\cdot 2,7}{0,05}}$.

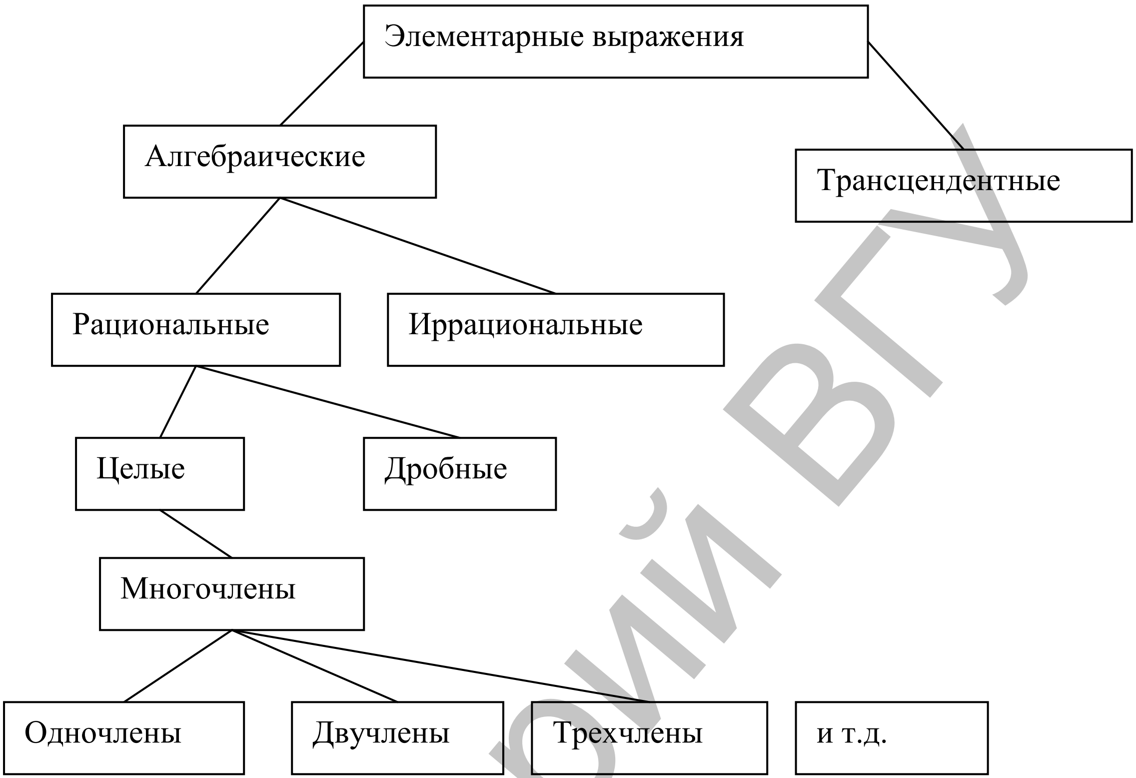
Решение: $\sqrt{\frac{4\frac{1}{2}\cdot 0,12\cdot 2,7}{0,05}}=\sqrt{\frac{9\cdot 0,12\cdot 2,7}{0,05\cdot 2}}=\sqrt{\frac{9\cdot 0,04\cdot 3\cdot 0,9\cdot 3}{0,1}}=3\cdot 0,2\cdot 3\cdot 3=5,4$

4. ВЫРАЖЕНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ. ТОЖДЕСТВО

В выражения с переменной могут входить буквы, числа, знаки операции, скобки. Так, $4x + 3$, $x + 2y - 2$, $(y + 4) : x$ – ***выражения с переменными.***

Областью определения выражения с переменной называется множество значений переменной, при которых это значение имеет смысл. Если дано выражение с двумя переменными *x* и *y*, то областью его определения является множество пар чисел (*x, y*), при которых это выражение имеет смысл.

Классификация выражений может быть представлена схемой:



1) $-2x^2+5x-3$;

2) x^2-2y;

3) $\sqrt{x-y}$;

4) $\dfrac{x-y}{3y}$;

5) $\dfrac{3\sqrt{x}}{x-1}$;

6) $3x+2y-7$;

8) $3x^2y+4xy^3+1$;

9) $7\sqrt{x^3}$;

10) $8x^2y^5+2y^4-3\sqrt[3]{x}$;

11) $-2x^{\frac{5}{4}}$;

12) $x^{\sqrt{2}}+1$;

13) x^{π};

14) $\lg(x^2-4)$;

15) $4\sin x\cos x$;

16) $\arcsin(3x-1)$;

Зависимые выражения 1 – 8 являются *алгебраическими*.

Выражение называют трансцендентным, если оно содержит действия возведения в иррациональную степень, взятия логарифма, тригонометрической функции и обратной тригонометрической функции (в данном курсе математики не рассматриваются).

Алгебраическое выражение называют *рациональным*, если оно записано при помощи действий сложения, вычитания, умножения и деления. (Здесь может быть и возведение в степень с целым показателем, поскольку это действие сводится к умножению и делению.)

Из алгебраических выражений 1 – 11 рациональными являются выражения 1 – 2, 4, 6 – 8. Алгебраическое выражение называют *рациональным*, если оно записано при помощи действий сложения, вычитания, умножения и деления. (Здесь может быть и возведение в степень с целым показателем, поскольку это действие сводится к умножению и делению.)

Из алгебраических выражений 1 – 11 рациональными являются выражения 1 – 2, 4, 6 – 8.

Алгебраическое выражение называют иррациональным, если оно содержит действие – извлечение корня, или возведения в степень с дробным показателем.

Алгебраические выражения 3, 5, 9, 10 и 11 являются иррациональными.

Заметим, что буквы, входящие в выражение, могут играть различную роль. Например, в выражении ax^2+bx+c буквами a, bиc обозначены определенные числа, буква x, напротив, переменная, которая может принимать различные числовые значения. Буквы a, b и c называют *параметрами* выражения, а буква x – *аргументом* выражения.

Рациональное выражение называют *целым,* если оно не содержит деления на выражения с аргументами (деление на параметры допускается).

Алгебраические рациональные выражения 1 – 2, 6 – 8 являются целыми.

Если в рациональном выражении имеется деление на выражение с аргументами, то оно называется *дробным*.

Среди приведенных выше примеров выражение 4 является дробным.

Многочленом n-й степени относительно x называется выражение

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

где $a_n \neq 0, n \geq 0$ - целое число, a_i - коэффициенты многочлена, a_n - старший коэффициент, a_0 - свободный член.

Многочленом относительно переменных x, y, ..., z называется сумма произведений вида $ax^n \cdot y^m \cdot \ldots \cdot z^k$ (***)

где a – числовой коэффициент; $n, m, \ldots, k$ – неотрицательные целые числа.

Само выражение (***) называют *одночленом*, число $n + m + \ldots k$ – *степенью одночлена.*

Одночлен является частным случаем многочлена.

Наибольшая из степеней одночленов, входящих в многочлен, называют *степенью многочлена*.

Два одночлена называют *подобными*, если они одинаковые или отличаются только коэффициентами.

Стандартным (каноническим) видом многочлена называют многочлен, заданный в виде суммы попарно неподобных одночленов.

Многочлены, заданные в каноническом виде, в зависимости от числа их членов делятся на *одночлены, двучлены, трехчлены* и т.д.

Два выражения называются тождественно равными на множестве, если они на этом множестве имеют смысл и все их соответственные значения равны.

Равенство, в котором левая и правая части – тождественно равные выражения, называется ***тождеством.***

Замена одного выражения другим, тождественно равным ему на данном множестве, называется ***тождественным преобразованием выражения.***

Чтобы упростить выражение, выполнить требуемые действия или вычислить значение выражения, нужно знать, в каком направлении следует «двигаться» по пути преобразований, приводящих наиболее коротким путем к верному ответу. Выбор рационального способа решения во многом зависит от владения всем объемом информации о видах выражений и способах их преобразования.

<u>Целые выражения.</u> Вводится понятие степени с натуральным показателем, изучаются действия с натуральными показателями – умножение, деление, возведение в степень:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$
$$a^m \div a^n = a^{m-n} (a \neq 0, m > n);$$
$$(ab)^n = a^n \cdot b^n;$$
$$(a^m)^n = a^{m \cdot n};$$

Рассматриваются сложение, вычитание и умножение многочленов, формулы сокращенного умножения:

Для любых *a*, *b* и *c* верны равенства:

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b);$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab; (a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab);$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$èëè $(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3;$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$èëè $(a-b)^3 = a^3 - 3ab(a-b) - b^3;$

$$a^3 + b^3 = (a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2);$$
$$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 - ab + b^2);$$
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc;$$
$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Изучаются различные способы разложения многочленов на множители – вынесение общего множителя за скобки, способ группировки, использование формул сокращенного умножения.

В преобразованиях дробных выражений опорными являются знания об алгебраических дробях и умение выполнять действия над ними:

$$\left(\frac{a}{b}=0\right)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a=0\\ b\neq 0\end{pmatrix}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc},\quad \text{если}\quad b\neq 0,\quad c\neq 0$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},\quad \text{если}\quad b\neq 0,\quad d\neq 0$$

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc},\quad \text{если}\quad b\neq 0,\quad c\neq 0,\quad d\neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x},\quad \text{если}\quad b\neq 0$$

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c},\quad \frac{d}{ef}+\frac{q}{hf}=\frac{dh+qe}{efh},\quad \frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+pn}{nq},$$

$$\text{если}\quad c\neq 0,\quad e\neq 0,\quad f\neq 0,\quad h\neq 0,\quad n\neq 0,\quad q\neq 0.$$

Тождественные преобразования степенных выражений и свойств степеней с рациональными показателями следующие:

1) $a^1 = a (a\in R)$

2) $a^n = a\cdot a\cdot\ldots\cdot a (a\in R, n\in N, n\neq 1)$

3) $a^0 = 1 (a\neq 0, a\in R)$

4) $a^{-n}=\frac{1}{a^n} (a\neq 0, a\in R, n\in N)$

5) $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m} (n\in N, m\in Q, a>0)$

Свойства:

1) $a^x\cdot a^y = a^{x+y}$

2) $(a^x)^y = a^{x+y}$

3) $a^x\div a^y = a^{x-y}$

4) $a^x\cdot b^x = (ab)^x$

5) $\frac{a^x}{b^x}=\left(\frac{a}{b}\right)^x$

Преобразование выражений с радикалами начинается с преобразования выражений, содержащих квадратные корни:

$$(\sqrt{a}=b)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}b\ge 0,\\ b^2=a\end{cases}\right)$$

Свойства:

$1)(\sqrt{a})^2=a,\quad где\quad a\ge 0;$

$2)\sqrt{a^2}=|a|\quad для\quad любого\quad a;$

$3)\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b},\quad где\quad a\ge 0, b\ge 0;$

$4)\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},\quad где\quad a\ge 0, b>0.$

Затем рассматриваются преобразования выражений, содержащих корни n-ой степени.

Свойства арифметических корней n-степени	Примеры
$1)Если\quad a\ge 0, b\ge 0, то\quad \sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$	
$2)Если\quad a\ge 0, b>0, то\quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	
$3)Если\quad a\ge 0, n\in N, k\in N, то\quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$	
$4)Если\quad a\ge 0, n\in N, k\in N, то\quad \sqrt[n]{a^k}=(\sqrt[n]{a})^k$ $Если\quad k\le 0\quad и\quad a>0, то\quad \sqrt[n]{a^k}=(\sqrt[n]{a})^k$	
$5)Если\quad a\ge 0, n\in N, k\in N, то\quad \sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}$	
$6)Если\quad 0\le a<b, то\quad \sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$	

Рассмотрим ряд задач.

Задача 1. Найти область определения выражения $\frac{4x+6}{x^2-9}$.

Решение. Так как выражение $\frac{4x+6}{x^2-9}$ представляет собой дробь, то для нахождения его области определения нужно найти те значения переменной x, при которых знаменатель обращается в нуль, и исключить их. Решив уравнение $x^2-9=0$, находим, что $x=-3$ и $x=3$. Следовательно, область определения данного выражения состоит из всех чисел, отличных от –3 и от 3. Если обозначить ее через X, то можно записать:

$X=(-\infty;-3)\cup(-3;3)\cup(3;+\infty)$.

Задача 2. Являются ли выражения $\frac{x^2-2x}{x}$ и $x-2$ тождественно равными: а) на множестве *R*; б) на множестве целых чисел, отличных от нуля?

Решение. а) На множестве *R* эти выражения не являются тождественно равными, так как при $x=0$ выражение $\frac{x^2-2x}{x}$ не имеет значения, а выражение $x-2$ имеет значение -2.

б) На множестве целых чисел, отличных от нуля, эти выражения являются тождественно равными, так как $\frac{x^2-2x}{x}=\frac{x(x-2)}{x}=x-2$.

Задача 3.При каких значениях *x* являются тождествами следующие равенства:

а) $4x-3=4x-3+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-2}$;б) $x=\sqrt{x^2}$.

Решение. а) Равенство является тождеством, если $x\neq 2$;
б) Равенство является тождеством, если $x\geq 0$.

Задача 4.Разложить на множители: $a^2 - 18a - b^2 + 81$.

Решение: $a^2 - 18a - b^2 + 81 = a^2 - 9\cdot 2\cdot a + 81 - b^2 = (a-9)^2 - b^2 = (a-9-b)(a-9+b)$.

Задача 5. Докажите тождество: $\frac{25-x}{4} - \frac{x+1}{6} = \frac{13-2x}{3} + \frac{7+x}{4}$

Решение: Перенесем левую часть равенства в правую с противоположным знаком и покажем, что эта разность будет равно нулю.

$$\frac{25-x}{4} - \frac{x+1}{6} - \frac{13-2x}{3} - \frac{7+x}{4} = \frac{18-2x}{4} - \frac{x+1}{6} - \frac{26-4x}{6} = \frac{9-x}{2} - \frac{27-3x}{6} = \frac{9-x}{2} - \frac{9-x}{2} = 0.$$

Таким образом, разность обеих частей равенства равна нулю, т.е. равенство справедливо.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виленкин Н.Я., Пышкало А.М., Рождественская В.Б., Стойлова Л.П. Математика. – М.: Просвещение, 1977.
2. Задачник-практикум по математике / под ред. Н.Я. Виленкина. – М.: Просвещение, 1977.
3. Лаврова Н.Н. Задачник-практикум по математике. – М.: Просвещение, 1985.
4. Стойлова Л.П., Пышкало А.М. Основы начального курса математики. – М.: Просвещение, 1988.
5. Стойлова Л.П. Математика. – М.: Academa, 1999.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации

ЧАСТЬ 3: Функции, величины, числовые выражения, тождества

Технический редактор *Г.В. Разбоева*

Компьютерный дизайн *И.В. Волкова*

Подписано в печать .2012. Формат 60x84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 2,96. Уч.-изд. л. 1,89. Тираж . Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

ЛИ № 02330/0494385 от 16.03.2009.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.