Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра геометрии и математического анализа

Ж.В. Иванова, Т.Л. Сурин

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

***Методические рекомендации
к лабораторным работам***

*Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2021*

УДК 519.6(076.5)
ББК 22.185.4я73
И20

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 1 от 27.10.2021.

Авторы: доценты кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидаты физико-математических наук **Ж.В. Иванова, Т.Л. Сурин**

Р е ц е н з е н т :
старший преподаватель кафедры математики
и информационных технологий УО «ВГТУ» *А.В. Коваленко*

Иванова, Ж.В.

И20 Прикладная математика : методические рекомендации к лабораторным работам / Ж.В. Иванова, Т.Л. Сурин. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2021. – 38 с.

Методические рекомендации предназначены для проведения лабораторных занятий и организации самостоятельной работы по предмету «Прикладная математика» для студентов второго курса факультета математики и информационных технологий, обучающихся по специальности 1-26 03 01 Управление информационными ресурсами. Данное издание может быть использовано при проведении лабораторных занятий по дисциплинам «Методы оптимизации» и «Исследование операций» у студентов специальности 1-40 05 01-07 Информационные системы и технологии.

УДК 519.6(076.5)
ББК 22.185.4я73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данное издание предназначено для проведения лабораторных занятий и организации самостоятельной работы по предмету «Прикладная математика» студентов второго курса факультета математики и информационных технологий, обучающихся по специальности 1-26 03 01 Управление информационными ресурсами. Методические рекомендации будут также полезны студентам специальности 1-40 05 01-07 Информационные системы и технологии при изучении дисциплин «Методы оптимизации» и «Исследование операций».

Основное назначение издания – помочь студентам при подготовке к лабораторным работам и дать рекомендации по выполнению самих лабораторных работ.

Издание охватывает следующие вопросы прикладной математики: математические модели в экономике, модель Леонтьева многоотраслевой экономики; линейная модель обмена; экстремум функции одной и нескольких переменных; производная по направлению и градиент функции; условный экстремум функции. В нем содержатся методические рекомендации и задания к 5 лабораторным работам. В каждом параграфе приведен необходимый теоретический материал, дан алгоритм выполнения работы, разобраны примеры, иллюстрирующие применение алгоритма и приведены задания для лабораторной работы.

Данный материал соответствует учебным программам по предмету «Прикладная математика» для специальности «Управление информационными ресурсами» и по предметам «Методы оптимизации» и «Исследование операций» для специальности «Информационные системы и технологии».

Издание может быть полезно студентам специальности «Прикладная информатика» при изучении предмета «Методы оптимизации».

Лабораторная работа № 1

Построение математических моделей экономических задач Модель Леонтьева многоотраслевой экономики

1. *Краткие теоретические сведения*

Предположим, что рассматривается n отраслей промышленности, каждая из которых производит свою продукцию. Часть продукции идет на внутрипроизводственное потребление данной отраслью и другими отраслями, а другая часть предназначена для целей конечного (непроизводственного) личного и общественного потребления. Рассмотрим процесс производства за некоторый период времени (например, год).

Введем следующие обозначения:

x_i – общий (валовой) объем продукции i-ой отрасли (i = 1, 2,..., n);

x_{ij} – объем продукции i-ой отрасли, потребляемой j-ой отраслью в процессе производства (i, j = 1, 2,..., n);

y_i – объем конечного продукта i-ой отрасли для непроизводственного потребления.

Коэффициентами прямых затрат называются отношения:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \quad (i,\ j\ = 1, 2, \dots, n). \qquad (1)$$

Обозначим $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$

где X – вектор валового выпуска, Y – вектор конечного продукта, A – матрица прямых затрат (технологическая или структурная матрица). Тогда имеет место уравнение:

$$X = A \cdot X + Y \qquad (2)$$

или

$$(E - A) \cdot X = Y. \qquad (3)$$

Основная задача межотраслевого баланса *состоит в отыскании такого вектора валового выпуска X, который при известной матрице прямых затрат A обеспечивает заданный вектор конечного продукта Y.*

Если матрица $(E - A)$ невырожденная, т.е. $|E - A| \neq 0$, то из формулы (3)

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y = S \cdot Y, \qquad (4)$$

где матрица $S = (E - A)^{-1}$ называется ***матрицей полных затрат***, элементы s_{ij} равны величине валового выпуска продукции i-ой отрасли, необходимого для обеспечения выпуска единицы конечного продукта j-ой отрасли.

В соответствии с экономическим смыслом задачи значения x_i должны быть неотрицательны при неотрицательных значениях y_i и a_{ij} т.е. если $y_i \geq 0,\ a_{ij} \geq 0$, то $x_i \geq 0\ (i,\ j = 1, 2, \ldots, n)$.

Матрица A называется ***продуктивной***, если для любого вектора $У$ существует решение X уравнения (3). В этом случае и модель Леонтьева называется ***продуктивной***.

Критерий продуктивности матрицы A. Матрица A продуктивна, если максимум сумм элементов ее столбцов не превосходит единицы, причем хотя бы для одного из столбцов сумма элементов строго меньше единицы, т.е. матрица А продуктивна, если $a_{ij} \geq 0$ и $\max \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq 1\ (i = 1, 2, \ldots, n)$, и существует такое j, что $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} < 1$.

2. *Решение типовых задач*

Пример. В таблице приведены данные об исполнении баланса за отчетный период, усл. ден. ед.:

Отрасль		Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск
		энергетика	машиностроение		
Производство	энергетика	7	21	72	100
	машиностроение	12	15	123	150

Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, чтобы объем конечного продукта энергетической отрасли увеличился вдвое, а машиностроительной сохранился на прежнем уровне (предполагается, что коэффициенты прямых затрат каждой отрасли – постоянны).

Решение. Имеем: $x_1 = 100$, $y_1 = 72$, $x_{11} = 7$, $x_{12} = 21$,
$x_2 = 150$, $y_2 = 123$, $x_{21} = 12$, $x_{22} = 15$.

По формуле (1) находим коэффициенты прямых затрат каждой отрасли:

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{7}{100} = 0{,}07; \qquad a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{21}{150} = 0{,}14;$$

$$a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{12}{100} = 0{,}12; \qquad a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{15}{150} = 0{,}1.$$

Таким образом матрица прямых затрат $A = \begin{pmatrix} 0{,}07 & 0{,}14 \\ 0{,}12 & 0{,}1 \end{pmatrix}$, вектор валового выпуска $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, вектор конечного продукта $Y = \begin{pmatrix} 144 \\ 123 \end{pmatrix}$.

Проверим, выполняется ли критерий продуктивности матрицы прямых затрат A. Сумма элементов первого столбца матрицы $0{,}07 + 0.12 = 0{,}19 < 1$, сумма элементов второго столбца матрицы $0{,}14 + 0{,}1 = 0{,}24 < 1$. $\max(0{,}19; 0{,}24) < 1$. Следовательно, матрица продуктивна.

Тогда по формуле (4) $X = S{\cdot}Y$, где $S = (E - A)^{-1}$.

$$(E - A) = \begin{pmatrix} 0{,}93 & -0{,}14 \\ -0{,}12 & 0{,}9 \end{pmatrix}, \ |E - A| = 0{,}93{\cdot}0{,}9 - 0{,}14{\cdot}0{,}12 = 0{,}8202,$$

$$S = (E - A)^{-1} = \frac{1}{|E - A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{0{,}8202}\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}14 \\ 0{,}12 & 0{,}93 \end{pmatrix}.$$

$$X = S{\cdot}Y = \frac{1}{0{,}8202}\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}14 \\ 0{,}12 & 0{,}93 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 144 \\ 123 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{0{,}8202}\begin{pmatrix} 146{,}82 \\ 131{,}67 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 179{,}01 \\ 160{,}53 \end{pmatrix}.$$

Т.е валовой выпуск в энергетической отрасли надо увеличить до 179,01 уел. ед., а в машиностроительной — до 160,54уел. ед.

3. *Задания для лабораторной работы*

***Задание* 1.** Предприятие выпускает три вида изделий *A*, *B*, *C* с использованием двух видов сырья S_1, S_2,. Нормы расхода каждого из них на одну единицу изделия, запас сырья на 1 день, цена каждого изделия заданы таблицей. Необходимо найти план выпуска изделий, чтобы доход от реализации всей выпущенной продукции составил *p* денежных единиц.

Вариант	Вид сырья	Нормы расхода сырья на одну единицу изделия			Запас сырья на 1 день	Доход *p*
		A	*B*	*C*		
1.	s_1	1	1	7	38	514
	s_2	2	3	18	96	
	цена изделия	6	20	100		

2.	s_1	1	2	3	33	243
	s_2	3	9	6	75	
	цена изделия	8	15	150		
3.	s_1	2	5	7	89	145
	s_2	6	3	5	79	
	цена изделия	5	9	10		
4.	s_1	8	4	6	76	165
	s_2	7	5	9	95	
	цена изделия	9	12	15		
5.	s_1	4	3	8	97	174
	s_2	5	6	3	88	
	цена изделия	10	12	20		
6.	s_1	3	2	4	66	282
	s_2	5	1	3	67	
	цена изделия	15	10	12		
7.	s_1	1	1	3	60	326
	s_2	2	4	5	122	
	цена изделия	9	12	10		
8.	s_1	4	5	3	134	274
	s_2	2	1	4	73	
	цена изделия	6	8	12		
9.	s_1	1	2	8	123	275
	s_2	2	5	19	292	
	цена изделия	11	9	9		
10.	s_1	5	9	8	209	274
	s_2	4	7	5	154	
	цена изделия	8	9	12		
11.	s_1	2	4	10	126	181
	s_2	3	6	5	99	
	цена изделия	7	9	10		
12.	s_1	5	2	7	89	137
	s_2	3	6	4	71	
	цена изделия	9	5	9		
13.	s_1	1	2	1	41	277
	s_2	3	1	2	67	
	цена изделия	7	8	6		
14.	s_1	3	9	11	164	178
	s_2	5	8	7	124	
	цена изделия	20	11	9		

15.	s_1	1	2	1	59	384
	s_2	3	1	2	82	
	цена изделия	10	9	8		

***Задание* 2.** В таблице представлен межотраслевой баланс модели хозяйства. Требуется: *а*) найти матрицу прямых затрат и коэффициенты прямых затрат; *б*) найти вектор конечного продукта $Y^{\text{т}}(y_1, y_2, y_3)$, соответствующий данной модели; *в*) найти матрицу полных затрат на обеспечение вектора *Y*; *г*) найти необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если объем конечного продукта второй отрасли увеличить вдвое, а объем конечного продукта первой и третьей отраслей уменьшить вдвое.

Вариант	Отрасль производства	Отрасль потребления			Валовой выпуск
		I	II	III	
1.	I	17	24	14	100
	II	12	15	14	100
	III	21	30	24	100
2.	I	3	13	5	50
	II	5	10	4	100
	III	4	20	17	80
3.	I	4	23	50	120
	II	10	15	30	100
	III	13	40	10	100
4.	I	16	14	24	100
	II	30	16	15	100
	III	18	21	12	60
5.	I	13	7	14	50
	II	15	16	17	80
	III	21	8	15	50
6.	I	15	23	21	100
	II	18	13	14	80
	III	21	17	15	100
7.	I	14	16	30	100
	II	34	18	10	80
	III	8	30	15	100
8.	I	21	15	15	100
	II	30	14	16	100
	III	12	17	20	100
9.	I	5	8	4	30
	II	6	9	12	40
	III	7	10	13	50

10.	I	21	15	30	200
	II	30	40	10	200
	III	10	40	15	100
11.	I	10	13	11	50
	II	17	9	8	50
	III	5	14	13	50
12.	I	6	14	5	50
	II	4	7	14	60
	III	15	13	25	80
13.	I	5	13	12	50
	II	11	5	4	50
	III	8	6	7	30
14.	I	10	13	17	100
	II	14	12	4	80
	III	16	6	18	60
15.	I	12	10	12	60
	II	18	14	8	60
	III	9	5	8	50

Лабораторная работа № 2

Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Линейная модель обмена

1. *Краткие теоретические сведения*

Линейный оператор. *Закон f, по которому, каждому вектору* $\mathbf{x}$ *принадлежащему линейному пространству V ставится в соответствие вектор* $\mathbf{y}$ *того же пространства называется линейным оператором* $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$*, задающим отображение пространства V в себя.*

Пусть в n-мерном линейном пространстве задан линейный оператор $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$. В некотором базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ заданы координаты вектора $\mathbf{x}$ и его образа $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$

$$\mathbf{x} = x_1\,\mathbf{e}_1 + x_2\,\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\,\mathbf{e}_n, \qquad \mathbf{y} = y_1\,\mathbf{e}_1 + y_2\,\mathbf{e}_2 + \ldots + y_n\,\mathbf{e}_n,$$

тогда связь между координатами векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ выражается формулами

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ &\ldots\ \ldots\ \ldots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{aligned} \qquad (1)$$

Введем обозначения $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$,

$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$. Матрица A называется ***матрицей линейного оператора*** f.

Формулы (1) можно записать в матричном виде

$$Y = AX. \tag{2}$$

Ненулевой вектор **x** *линейного пространства называется* ***собственным вектором*** *линейного оператора* f, *если существует такое число* λ, *что выполняется равенство*

$$f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x} \text{ или } AX = \lambda X$$

Число λ называется ***собственным значением*** вектора **x** относительно оператора f.

Координаты собственного вектора находится из уравнения

$$(AX - \lambda E)X = 0$$

или из системы

$$\begin{aligned} &(a_{11} - \lambda)\, x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ &a_{21}x_1 + (a_{12} - \lambda)\, x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)\, x_n = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Эта система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Уравнение (4) называется ***характеристическим***. Число λ является корнем характеристического уравнения.

Линейная модель обмена. Пусть имеется n стран S_1, S_2, ..., S_n, национальный доход каждой из которых равен соответственно x_1, x_2, ..., x_n. Обозначим коэффициентами a_{ij}, долю национального дохода, которую страна S_j тратит на покупку товаров у страны S_i. Будем считать, что весь национальным доход тратится на закупку товаров либо внутри страны, либо на импорт из других стран, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \ \ (j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (5)$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ назвается ***структурной матрицей торговли***. В соответствии с (5) сумма элементов любого столбца матрицы A равна 1. Для любой страны S_i (i = 1, 2,..., n) выручка от внутренней и внешней торговли составит:

$$p_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n.$$

Для бездифицитной торговли должны выполняться равенства $p_i = x_i$ (i = l, 2, ..., n). (С экономической точки зрения это понятно, так как все страны не могут одновременно получать прибыль.)

Вводя вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ***национальных доходов стран***, получим матричное уравнение

$$AX = X, \qquad (6)$$

где вектор-столбец $X = \mathbf{x}^{\text{т}}$. Следовательно, задача свелась к отысканию собственного вектора матрицы A, отвечающего собственному значению $\lambda = 1$.

2. *Решение типовых задач*

***Пример* 1.** Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора f, заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Найдем собственные значения линейного оператора из уравнения (4)

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 9 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 2\lambda - 35 = 0.$$

Корнями характеристического уравнения являются числа $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 7$.

Найдем собственный вектор соответствующий собственному числу $\lambda_1 = -5$ из системы (3)

$$\begin{cases} (1-(-5))x_1 + 4x_2 = 0, \\ 9x_1 + (1-(-5))x_2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получим $x_1 = -\frac{2}{3}c$, $x_1 = c$ (c – произвольное действительное число не равное нулю). Таким образом, векторы $\mathbf{x}\,(-\frac{2}{3}c,\ c)$ являются собственными векторами линейного оператора, соответствующими собственному числу $\lambda_1 = -5$. Например, при $c = 1$ получим вектор $\mathbf{x}\,(-\frac{2}{3},\ 1)$.

Аналогично, находим собственные векторы линейного оператора, соответствующие собственному числу $\lambda = 7$: $\mathbf{x}\,(\frac{2}{3}k,\ k)$ (k – произвольное действительное число не равное нулю).

Пример **2**. Структурная матрица торговли трех стран S_1, S_2, S_3 имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти соотношение национальных доходов стран для сбалансированной торговли. Найти бюджеты стран при условии, что сумма бюджетов составляет 17289 условных единиц

Решение. Находим собственный вектор x, отвечающий собственному значению $\lambda = 1$, решив уравнение $(A - E)X = O$. Или систему

$$\begin{cases} (\frac{1}{3}-1)x_1 + \frac{1}{4}4x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0, \\ \frac{1}{3}x_1 + (\frac{1}{2}-1)x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0, \\ \frac{1}{3}x_1, + \frac{1}{4}x_2 + (0-1)x_3 = 0. \end{cases}$$

Найдем $x_1 = 3/2c$, $x_2 = 2c$, $x_3 = c$, т.е. вектор национальных доходов стран имеет вид $x\ (3/2c,\ 2c,\ c)$. Полученный результат означает, что сбалансированность торговли трех стран достигается при соотношении национальных доходов стран 3/2 : 2 : 1 или 3 :4 :2

Если сумма бюджетов составляет 17289 условных единиц, то бюджеты стран находятся из уравнения

$$3/2c + 2c + c = 17289 \text{ или } 9/2c = 17289$$

Следовательно, с = 3842, $x_1 = 5763$, $x_2 = 7\,684$, $x_3 = 3842$.

Задания для лабораторной работы

***Задание* 1.** В пространстве R^2 линейный оператор f в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ задан матрицей A. Найти:

1) образ $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ вектора $\boldsymbol{x}$**;**
2) собственные значения и собственные векторы оператора f.

Вариант 1. $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = 4\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.	*Вариант* 2. $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = 5\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.	*Вариант* 3. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2$.
Вариант 4. $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & -3\end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = 3\boldsymbol{e}_1 - 7\boldsymbol{e}_2$.	*Вариант* 5. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = 2\boldsymbol{e}_1 + 8\boldsymbol{e}_2$.	*Вариант* 6. $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \boldsymbol{e}_1 - 5\boldsymbol{e}_2$.
Вариант 7. $A=\begin{pmatrix}13 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = 5\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2$.	*Вариант* 8. $A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 7 & -4\end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = -8\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2$.	*Вариант* 9. $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = 2\boldsymbol{e}_1 + 6\boldsymbol{e}_2$.
Вариант 10. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = 4\boldsymbol{e}_1 + 9\boldsymbol{e}_2$.	*Вариант* 11. $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = -\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2$.	*Вариант* 12. $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = 6\boldsymbol{e}_1 + 11\boldsymbol{e}_2$.
Вариант 13 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = 2\boldsymbol{e}_1 - 5\boldsymbol{e}_2$.	*Вариант* 14 $A=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = 2\boldsymbol{e}_1 + 7\boldsymbol{e}_2$.	*Вариант* 15 $A=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ -6 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = 9\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2$.

***Задача* 2.** Осуществляется сбалансированная бездефицитная торговля четырёх стран со структурной матрицей $A = (a_{ij})$, $i = 1,4$, $j = 1,4$. Найти бюджеты стран при условии, что сумма бюджетов составляет S условных единиц..

Вариант 1. $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$, $S = 22204$.	*Вариант* 2. $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$, $S = 16254$.	*Вариант* 3. $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,4 & 0,4 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$, $S = 59480$.
Вариант 4. $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$, $S = 89110$.	*Вариант* 5. $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0,3 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,4 & 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}$, $S = 49880$.	*Вариант* 6. $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$, $S = 59616$.
Вариант 7. $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$, $S = 50920$.	*Вариант* 8. $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$, $S = 47584$.	*Вариант* 9. $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0 & 0,6 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$, $S = 32504$.
Вариант 10. $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,3 & 0,4 \\ 0,1 & 0,4 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$, $S = 76224$.	*Вариант* 11. $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$, $S = 40680$.	*Вариант* 12. $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}$, $S = 40920$.
Вариант 13. $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,3 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$, $S = 63210$.	*Вариант* 14. $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$, $S = 55090$.	*Вариант* 15. $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$, $S = 58590$.

Лабораторная работа № 3

Локальный экстремум функции

1. *Краткие теоретические сведения*

Локальный экстремум функции одной переменной. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b).

Определение. *Точка* $x_0 \in (a, b)$ *называется* ***точкой максимума (минимума)*** **(*или точкой локального максимума, локального минимума*)** *функции, если существует такая* δ*-окрестность точки* x_0*, содержащаяся в интервале* (a, b)*, что для всех точек* $x \in U_\delta(x_0)$ $(x \neq x_0)$ *выполняется неравенство* $f(x_0) > f(x)$ $(f(x_0) < f(x))$.

Напомним, что δ-окрестностью точки x_0 называется интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Обозначение: $U_\delta(x_0)$).

Точки максимума и минимума называются **точками экстремума** функции.

***Теорема* 1 (*необходимое условие экстремума дифференцируемой функции*).** *Если функция* $f(x)$ *дифференцируема в точке* x_0 *и имеет в этой точке экстремум, то* $f'(x_0) = 0$.

***Замечание* 1**. Функция $f(x)$ может иметь экстремум в точке x_0, в которой $f(x)$ непрерывна, но не является дифференцируемой .

Точки, в которых функция определена, непрерывна, а производная функции равна нулю или не существует, называются **критическими точками** функции. Критические точки не всегда являются точками экстремума функции. Для определения их характера необходимо дальнейшее исследование.

Первое достаточное условие экстремума. Пусть точка x_0 является критической точкой функции $f(x)$.

***Теорема* 2.** *Пусть* $f(x)$ *дифференцируема всюду в некоторой* δ*-окрестности точки* x_0*, за исключением, может быть, самой точки* x_0*. Если производная функции при переходе через точку* x_0 *меняет знак, то точка* x_0 *является точкой экстремума функции. В частности*

– если $f'(x) > 0$ *при* $x \in (x_0 - \delta, 0)$*, а* $f'(x) < 0$*, при* $x \in (0, x_0 + \delta)$*, то точка* x_0 *является точкой максимума функции*;

– если $f'(x) < 0$ *при* $x \in (x_0 - \delta, 0)$*, а* $f'(x) > 0$*, при* $x \in (0, x_0 + \delta)$*, то точка* x_0 *является точкой минимума функции*;

– если при переходе через точку x_0 *производная не меняет знак, то экстремума в точке* x_0 *функция не имеет.*

Второе достаточное условие экстремума.

***Теорема* 3.** *Пусть функция* $f(x)$ *имеет в точке* x_0 *вторую производную и* $f'(x_0) = 0$ *. Тогда, если* $f''(x_0) > 0$*, то точка* x_0 *является* *точкой минимума функции. Если* $f''(x_0) < 0$, *то точка* x_0 – *точка максимума функции.*

Локальный экстремум функции многих переменных.

Определение. *Пусть функция* $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ *определена в некоторой окрестности точки* $M_0(x_1^0,\ldots,x_n^0)$. *Точка* M_0 *называется точкой* ***локального максимума*** (***минимума***) *данной функции, если существует такая окрестность точки* M_0, *в которой выполняется неравенство*:

$$f(M) < f(M_0) \quad (f(M) > f(M_0)),$$

для всех $M \neq M_0$.

Точки локального максимума и минимума называются ***точками экстремума*** функции $u = f(M)$.

Теорема 4 (***необходимое условие локального экстремума***). *Пусть функция* $u = f(M)$ *имеет в точке* M_0 *локальный экстремум. Тогда, если в этой точке существуют частные производные первого порядка, то все эти частные производные равны нулю.*

Точки, в которых все частные производные функции равны нулю, называются ***точками возможного экстремума*** функции.

Для отыскания этих точек необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ f'_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f'_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Пусть функция $u = f(x_1, \ldots, x_n)$, имеет в точке M_0 непрерывные производные второго порядка. Тогда второй дифференциал функции находится по формуле $d^2u\big|_{M_0} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$. Обозначим $a_{ij} = \dfrac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x_i \partial x_j}$. Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Определители $\Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, … , $\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ называются ***главными минорами матрицы A***.

***Теорема* 5 (*достаточное условие локального экстремума*).**

Пусть функция $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ *определена и дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки* $M_0(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ (M_0 – *точка возможного экстремума*). *Пусть все частные производные второго порядка данной функции непрерывны в точке* M_0. *Тогда точка* M_0 - *точка максимума функции, если главные миноры матрицы А чередуют знаки, начиная с первого отрицательного, т.е.* $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \ldots$ (*в этом случае* $d^2u(M_0) < 0$); *если* $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$ ($d^2u(M_0) > 0$), *то точка* M_0 - *точка минимума*.

***Замечание* 1.** Если главные миноры матрицы *А* одновременно не равны нулю и не удовлетворяют условиям предыдущей теоремы, то точка M_0 не является точкой экстремума.

***Замечание* 2.** Если некоторые главные миноры матрицы *А* равны нулю, то нужны дополнительные исследования.

2. *Решение типовых задач*

***Пример* 1.** *Найти точки экстремума функции* $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}(x-1)}{4x-5}$.

Решение. Область определения функции

$$D(f): x \in \left(-\infty, 1\frac{1}{4}\right) \cup \left(1\frac{1}{4}, \infty\right).$$

Найдем производную функции: $y' = \dfrac{(8x-5)(x-2)}{3\sqrt[3]{x}(4x-5)^2}$.

Найдем нули производной и точки, в которых производная не существует. Для этого решаем уравнение

$$\frac{(8x-5)(x-2)}{3\sqrt[3]{x}(4x-5)^2} = 0.$$

Производная функции равна нулю в точках $x_1 = \dfrac{5}{8}$, $x_2 = 2$. Производная не существует в точках $x_3 = 0$ и $x_4 = \dfrac{5}{4} = 1\dfrac{1}{4}$. При этом функция непрерывна в точке $x_2 = 0$, а в точке $x_3 = 1\dfrac{1}{4}$ функция не определена. Следовательно, критическими точками функции являются точки $x_1 = \dfrac{5}{8}$, $x_2 = 2$ и $x_3 = 0$.

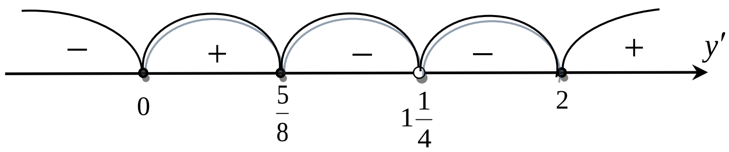

Рис. 1.

Проверим достаточные условия экстремума. Воспользуемся первым достаточным условием. Изобразим координатную ось и нанесём на неё все найденные точки.

Точка $x_4 = 1\frac{1}{4}$ не может быть точкой экстремума функции, так как в этой точке функция не является непрерывной. Точки $x_3 = 0$ и $x_2 = 2$ являются точками минимума функции, так как при переходе через эту точку знак производной меняется с «–» на «+». Точка $x_1 = \frac{5}{8}$ является точкой максимума функции, так как при переходе через эту точку знак производной меняется с «+» на «–».

Ответ. Точки $x_3 = 0$ и $x_2 = 2$ – точки минимума функции. Точка $x_1 = \frac{5}{8}$ – точка максимума. $f(0) = 0$, $f(2) = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$, $f\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{3}{32\sqrt[3]{2}}$.

Пример 2. *Исследовать на экстремум функцию*

$$y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 14,$$

воспользовавшись вторым достаточным условием экстремума.

Решение. Область определения функции $D(f)$: $x \in (-\infty, \infty)$.

Находим точки подозрительные на экстремум. Так как $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36$, то критические точки: $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$.

$f''(x) = 12x - 30$. $f''(2) = -6 < 0$, значит, $x = 2$ – точка максимума. $f''(3) = 6 > 0$, значит, точка $x = 3$ – точка минимума.

Ответ. $x = 2$ – точка максимума, $x = 3$ – точка минимума. $f(2) = 14$, $f(3) = 13$.

Пример 3. Найти точки локального экстремума функции

$$u = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2.$$

Решение. 1. Находим точки возможного экстремума функции. Для этого находим частные производные функции и приравниваем их к нулю:

$$\begin{cases} u'_x = 4x - y + 2z = 0, \\ u'_y = -x - 1 + 3y^2 = 0, \\ u'_z = 2x + 2z = 0. \end{cases}$$

Решаем эту систему. Получим точки возможного экстремума функции: $M_1(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$, $M_2(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

2. Проверяем достаточные условия экстремума в этих точках. Найдем частные производные второго порядка в произвольной точке:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a_{11} = 4, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a_{21} = -1,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a_{22} = 6y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = a_{13} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = a_{31} = 2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = a_{23} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = a_{32} = 0, \; \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a_{33} = 2.$$

Рассмотрим точку $M_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. Найдем значения частных производных функции в точке M_1:

$$a_{11} = 4, \; a_{12} = a_{21} = -1, \; a_{13} = a_{31} = 2, \quad a_{22} = 4, a_{23} = a_{32} = 0, \; a_{33} = 2.$$

Построим матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

и найдем главные миноры матрицы:

$$\Delta_1 = 4 > 0, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 1 = 15 > 0, \; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 14 > 0.$$

Значит точка $M_1(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ – точка минимума функции.

Находим значение частных производных в точке $M_2(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2},\frac{1}{4})$: $a_{11}=4, a_{12}=-1, a_{13}=2, a_{22}=4, a_{23}=0, a_{33}=2$. Матрица A имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Находим миноры матрицы:

$$\delta_1=4>0, \quad \delta_2=\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=-13<0, \quad \delta_3=\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-14<0.$$

Точка M_2 не является точкой экстремума.

***Пример* 4.** Найти точки локального экстремума функции $z=3x^2y-x^3-y^4$.

Решение. 1. Находим точки возможного экстремума. Проверяем необходимые условия экстремума.

$$\begin{cases} z'_x=6xy-3x^2, \\ z'_y=3x^2-4y^3. \end{cases}$$

Из этой системы находим точки возможного экстремума: $M_1(0, 0)$, $M_2(6, 3)$.

2. Проверяем достаточные условия экстремума. Найдем частные производные второго порядка функции.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a_{11}=6y-6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=a_{12}=6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a_{22}=-12y^2.$$

Находим значение частных производных в точке M_1 (0, 0):

$$a_{11}=0, \ a_{12}=a_{21}=0, \ a_{22}=0,$$

следовательно, $\Delta=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$, т.е требуются дополнительные исследования.

Найдем значение функции в точке M_1: $z(0, 0) = 0$. Рассмотрим прямую $y = 0$. На этой прямой $z(x, 0) = -x^3$, тогда $z(x, 0) > 0$ при $x < 0$, $z(x, 0) < 0$ при $x > 0$, т.е. в любой окрестности точки M_1 существуют точки, в которых функция принимает как значения большие, чем $z(M_1)$, так и значения меньшие, чем $z(M_1)$. Следовательно, точка M_1 не является точкой экстремума.

Находим значение частных производных в точке $M_2(6, 3)$:

$$a_{11} = -18,\ a_{12} = 36,\ a_{22} = -108,$$

$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 648 > 0$ ($a_{11} < 0$), значит, по теореме 5, точка M_2 – точка максимума.

3. *Задания для лабораторной работы*

1. Найти точки экстремума функции одной переменной.

Вариант	*а*)	*б*)	Вариант	*а*)	*б*)
1	$y = (x^2 - 4)^4$	$y = \frac{x-1}{x^2 - 2x}$	2	$y = (x^2 - 2x + 3)^2$	$y = x - \sqrt[3]{x^2}$
3	$y = x^3(10 - 3x^2)$	$y = x^2 - \ln 2x^2$	4	$y = (x^2 - 4)^3$	$y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$
5	$y = x^3 - 3x^2$	$y = (x-1)e^{3x-1}$	6	$y = (x^3 - 1)^2$	$y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x}$
7	$y = x - 2x^4 - 1$	$y = e^{2x - x^2}$	8	$y = x^2(x^3 - 20)$	$y = \frac{\ln 2x}{\sqrt{x}}$
9	$y = \frac{x^5 + x^3}{5} + 3x$	$y = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$	10	$y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$	$y = (x-5)\cdot\sqrt[3]{x^2}$
11	$y = (3x-5)^6$	$y = x \ln 3x$	12	$y = x^3 - 3x^2 + 4$	$y = x \ln^2 x$
13	$y = x^2 + \frac{1}{x^2}$	$y = x^2 e^{-x^2}$	14	$y = x^3 - 3x^2 + 4$	$y = x\sqrt{2x+3}$
15	$y = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1}$	$y = x\, e^{-x}$			

2. Найти точки локального экстремума следующих функций двух переменных:

1) $z = 3x + y - xy,$ 2) $z = x^2 - 4xy - y^2 - 6x - 2y,$

3) $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2,$ 4) $z = x^2 y(2 - x - y),$

5) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y,$ 6) $z = x^3 + 6y^2 - 6xy,$

7) $z=3x^3+3y^3-9xy+10,$ 8) $z=x^3+y^3-3xy,$

9) $z=5x^2-3xy+y^2,$ 10) $z=3x^2+3y^2-2x-2y+2,$

11) $z=x^2+2xy-y^2-4x,$ 12) $z=x^3+8y^3-6xy+1,$

13) $z=x^2+xy+y^2+x-y+1,$ 14) $z=x^2-2y^2+4xy-6x-1,$

15) $z=x^2+y^2-2x-2y+8,$

3. Найти точки локального экстремума следующих функций трех переменных:

1) $u = x^2+ 2y^2+ z^2 - 2x + 4y - 6z + 1;$

2) $f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^{\ 2} - x_3^{\ 2};$

3) $u = \dfrac{xyz}{16} - x - y - 2z;$

4) $u = \dfrac{256}{x} + \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{z} + z^2.$

5) $f(x)=2x_1^2+2x_2^2+x_3^2-3x_1x_2+x_1+\cos x_3;$

6) $f(x)=x_1^3+x_2^2+2x_3^2-x_2x_3+2x_1x_3-x_2;$

7) $f(x)=2x_1^2+x_2^3+x_3^2-x_1x_2+2x_1x_3-x_2;$

8) $u = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26z^2 - 13z;$

9) $f(x)=(1-x_1)^2+10(x_2-x_1^2)+(3x_3^{\ 2}-6x_3);$

10) $f(x)=-x_1^2+x_1x_2-x_2^{\ 2}-x_3^{\ 2}+2x_3;$

11) $f(x)=x_1^3+x_2x_3+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}-3x_1+6x_2+4;$

12) $f(x)=-x_1^2+2x_1x_2-x_2^{\ 2}-4x_3^{\ 2};$

13) $f(x)=x_1^2-6x_1x_2+2x_2^{\ 2}-3x_3^{\ 2}+8x_1x_3-4x_2x_3;$

14) $f(x)=x_1^2+4x_1x_2+5x_2^{\ 2}+3x_3^{\ 2}-2x_2x_3-2x_1x_3;$

15) $f(x)=2x_1^2+x_1x_2+x_2^{\ 2}-x_3^{\ 2}+3x_2x_3.$

Лабораторная работа № 4

Производная по направлению и градиент функции

1. *Краткие теоретические сведения*

Производная по направлению и градиент функции трех переменных. Пусть на множестве $\{M\}$ задана функция $u = f(x, y, z)$. Возьмем точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \{M\}$ и единичный вектор $\bar{l}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, задающий направление в точке M_0. Выберем точку $M(x, y, z)$ так, чтобы вектор $\bar{l}$ был направляющим вектором прямой M_0M (рис 1.). Обозначим через l длину отрезка M_0M, взятую со знаком «+», если вектор $\overrightarrow{M_0M}$ сонаправлен с вектором $\bar{l}$, и взятую со знаком «–», если вектора $\overrightarrow{M_0M}$ и $\bar{l}$ противоположно направлены. В этом случае прямую M_0M можно задать параметрически уравнениями

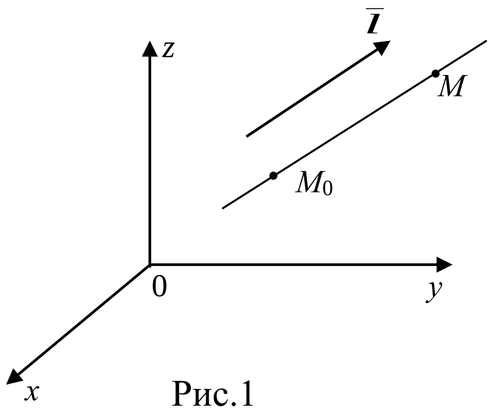

Рис.1

$$\begin{cases} x = x_0 + l\cos\alpha, \\ y = y_0 + l\cos\beta, \\ z = z_0 + l\cos\gamma. \end{cases} \qquad (1)$$

Тогда функцию $u = f(x, y, z)$ на прямой M_0M можно рассматривать как сложную функцию от одной переменной l:

$$u = f(x, y, z) = f(x_0 + l\cos\alpha, y_0 + l\cos\beta, z_0 + l\cos\gamma).$$

Если эта функция имеет в точке $l = 0$ производную, то эта производная называется **производной по направлению** $\bar{l}$ **от функции** $u = f(x, y, z)$ **в точке** $\boldsymbol{M_0}$ и обозначается символом $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{l}}$. Эту производную можно найти как производную сложной функции $u = f(x, y, z)$, аргументы которой являются функциями, заданными уравнениями (1) от переменной l:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dl} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dl} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dl}.$$

Так как $\dfrac{dx}{dl} = \cos\alpha$, $\dfrac{dy}{dl} = \cos\beta$, $\dfrac{dz}{dl} = \cos\gamma$, то

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (2)$$

Производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ в формуле (2) находятся в точке M_0.

Рассмотрим вектор, обозначаемый символом $\mathrm{grad}\,u$ и имеющий координаты

$$\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\right), \qquad (3)$$

который называется **градиентом функции** $u = f(x, y, z)$ в точке M_0. Тогда формулу (1) можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \bar{l} \cdot \mathrm{grad}\,u = |\mathrm{grad}\,u| \cdot |\bar{l}| \cos\varphi = |\mathrm{grad}\,u| \cdot \cos\varphi \qquad (4)$$

где φ – угол между векторами $\mathrm{grad}\,u$ и $\bar{l}$. Так как величина $|\mathrm{grad}\,u| \cdot \cos\varphi$ является наибольшей при $\cos\varphi = 1$ ($\varphi = 0$), то можно сделать вывод, что ***производная функции u по направлению $\bar{l}$ в точке M_0 будет наибольшей***, *если направления векторов* $\mathrm{grad}\,u$ *и* $\bar{l}$ *совпадают.*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\max} = \mathrm{grad}\,u.$$

Говорят, *функция* $u = f(x, y, z)$ *в точке* M_0 *имеет* ***наибольшую скорость роста*** *в направлении вектора* $\mathrm{grad}\,u$. Величина наибольшего роста функции равна $|\mathrm{grad}\,u|$.

Поверхностью уровня функции $u = f(x, y, z)$, *называется поверхность, которая задается формулой*

$$f(x, y, z) = C,$$

где $C = \mathrm{const}$.

Нетрудно убедиться, что градиент функции $u = f(x, y, z)$ в точке M_0 является нормальным вектором к поверхности уровня данной функции, проходящей через точку M_0.

Производная по направлению и градиент функции двух и *n*-переменных. Пусть у нас задана функция $z = f(x, y)$. Тогда аналогично функции трех переменных вводятся понятия производной по направлению и градиента функции двух переменных.

Для функции $z = f(x, y)$ единичный вектор $\bar{l}$, определяющий направление в точке M_0, имеет координаты $\cos\alpha$, $\sin\alpha$. Поэтому в указанном случае формула (2) имеет вид

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha.$$

Градиент функции $z = f(x, y)$ определяется как вектор с координатами $\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$

***Определение** 2. **Линией уровня функции** $z = f(x, y)$ называется линия на плоскости, задаваемая уравнением $f(x, y) = C$, где $C = const$.*

Аналогично вводится понятие производной по направлению и градиента функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Если функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке M_0, то производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ функции в точке $M_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ по направлению, задаваемому единичным вектором $\bar{l}(\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_n)$ находится по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cos\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\cos\alpha_n.$$

Градиентом функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке M_0 называется вектор $\operatorname{grad} u\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{M_0}, \left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{M_0}, \ldots, \left.\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{M_0}\right)$.

2. *Решение типовых задач*

Пример 1. Для функции $u = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4}$ найти

а) производную функции по направлению вектора $\bar{l}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ в точке $M_0(0, 3, 1)$,

б) величину и направление наибольшего роста функции в точке M_0,

в) поверхность уровня функции в точке M_0.

Решение.

а) Найдем координаты единичного вектора $\vec{e}$ сонаправленного с вектором $\bar{l}$. Так как $|\bar{l}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то вектор $\vec{e}$ имеет координаты $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Значит, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Найдем значение частных производных функции в точке M_0:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial x} = \left.\frac{x}{2}\right|_{M_0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \left.\frac{2y}{9}\right|_{M_0} = \frac{2}{3}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \left.\frac{z}{2}\right|_{M_0} = \frac{1}{2}.$$

Тогда по формуле (2)

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{2\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{7\sqrt{13}}{18}.$$

б) Найдем координаты и абсолютную величину вектора $\mathrm{grad}\, u$.

Координаты вектора $\bar{a} = \mathrm{grad}\, u$ в точке $M_0(0, 3, 1)$ находятся по формуле (3):

$$\bar{a}\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\right) = \bar{a}\left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right).$$

Этот вектор указывает направление наибольшего роста функции в точке M_0.

Величина наибольшего роста функции равна $|\mathrm{grad}\, u| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$.

в) Поверхности уровня функции задаются уравнением

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = C,$$

где C – произвольная постоянная. Найдем значение этой постоянной соответствующей поверхности уровня, проходящей через точку M_0. Для этого подставим координаты точки в данное уравнение, получим $C = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = 1{,}25$. Разделив левую и правую части уравнение поверхности на $C = \frac{5}{4}$, получим каноническое уравнение эллипсоида $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{45/4} + \frac{z^2}{5} = 1$ с полуосями $a = \sqrt{5}$, $b = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, $c = \sqrt{5}$.

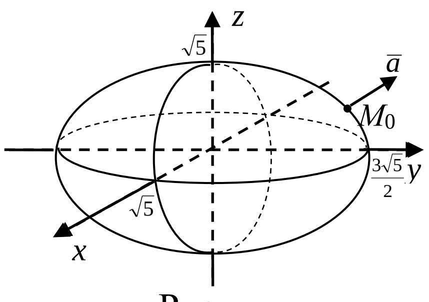

Рис.

Вектор $\bar{a} = \mathrm{grad}\, u\left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$ в точке $M_0(0, 3, 1)$ перпендикулярен поверхности уровня и указывает направления наибольшего роста функции $u = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4}$.

3. ***Задания для лабораторной работы***

1. Для функции $u = f(x, y, z)$ $(z = f(x, y))$ найти:
а) производную функции по направлению вектора $\bar{l}$ в точке M_0,
б) величину и направление наибольшего роста функции в точке M_0,
в) поверхность (линию) уровня функции в точке M_0.
г) изобразить линию уровня функции $z = f(x, y)$,

Ва-ри-ант	*а*)	*б*)
1.	$u = x^2yz + 2xyz^2 - 2xy + 4yz + 5;$ $\bar{l}(1, 2, 1);$ $M_0(1, 0, 2)$	$z = \sin\frac{x^2}{y};$ $\bar{l}(1, 1);$ $M_0(\sqrt{\pi}, 2)$
2.	$u = x^2 + y^2 + z^2 + 6xy - 2y - 2;$ $\bar{l}(1, 1, 1);$ $M_0(2, 3, 1)$	$z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x}};$ $\bar{l}(1, 2);$ $M_0(1, 1)$
3.	$u = x^2 - y^2 - z^2 + 2x + 4yz + 3;$ $\bar{l}(1, 1, 1);$ $M_0(1, 3, 1)$	$z = tg\sqrt{xy};$ $\bar{l}(1, 2);$ $M_0(1, \frac{\pi^2}{16})$
4.	$u = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} + 2z^2 + 4xy + 1;$ $\bar{l}(1, 1, 1);$ $M_0(1, 2, 1)$	$z = \frac{1}{\sqrt{y - x^2 + x}};$ $\bar{l}(2, 1);$ $M_0(1, 4)$
5.	$u = x^2 + 4y^2 - z^2 + 4x - 12z + 7;$ $\bar{l}(1, 1, 1);$ $M_0(1, 2, 2)$	$z = \frac{1}{(x - y^2)^3};$ $\bar{l}(1, 1);$ $M_0(8, 4)$
6.	$u = \frac{xz + yz + xy}{y}$ $\bar{l}(1, 1, 1);$ $M_0(1, 2, 1)$	$z = y - 2x^2 + 2x;$ $\bar{l}(1, 2);$ $M_0(2, 7)$
7.	$u = (2x + 4y - 3z)^4;$ $\bar{l}(1, 1, 1);$ $M_0(0, 1, 3)$	$z = \frac{x^2 + 2x}{y};$ $\bar{l}(1, 1);$ $M_0(2, 7)$
8.	$u = x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4y + 4;$ $\bar{l}(1, 1, 1);$ $M_0(1, 2, 1)$	$z = \frac{1}{\sqrt{(yx)^3}};$ $\bar{l}(2, 1);$ $M_0(1, 3)$
9.	$u = 4x^2 + 2y^2 - z + 4x + 2y - 5;$ $\bar{l}(1, 1, 1);$ $M_0(1, 1, 1)$	$z = tg\frac{2x}{y};$ $\bar{l}(1, 1);$ $M_0(\frac{\pi}{4}, 2)$
10.	$u = x^2 + 2y^2 + z^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{yz}{x};$ $\bar{l}(1, 1, 1);$ $M_0(2, 0, 1)$	$z = e^{2x^2 + y^2};$ $\bar{l}(1, 1);$ $M_0(1, 1)$

11.	$u = xy^2z + x^2 + 2y^2 + z^2 + 4$; $\bar{l}(1, 1, 1)$; $M_0\,(2, 0, 1)$	$z = \ln\dfrac{x}{y}$; $\bar{l}(3, 3)$; $M_0\,(1, e)$
12.	$u = x\sqrt{xyz}$ $\bar{l}(1, 1, 1)$; $M_0\,(1, 2, 2)$	$z = \sqrt{\dfrac{2x+y}{y}}$; $\bar{l}(1, 1)$; $M_0\,(1, 1)$
13.	$u = \dfrac{xz + yz + xy}{y}$ $\bar{l}(1, 1, 1)$; $M_0\,(1, 2, 1)$	$z = 2^{x^2+2y^2+1}$; $\bar{l}(0, 1)$; $M_0\,(1, 1)$
14.	$u = x^2 + 2y^2 + z^2 + \ln xyz$; $\bar{l}(1, 1, 1)$; $M_0\,(1, 1, 1)$	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\bar{l}(1, 1)$; $M_0\,(1, 1)$
15.	$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\bar{l}(1, 1, 1)$; $M_0\,(4, 4, 2)$	$z = \arcsin(3x + 2y)$; $\bar{l}(1, 1)$; $M_0\,(\frac{1}{6}, \frac{1}{4})$

Лабораторная работа № 5

Условный экстремум функции при ограничениях-равенствах

1. *Краткие теоретические сведения*

1. Постановка задачи. Даны дважды непрерывно дифференцируемые ***целевая функция*** $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ и ***функции ограничений*** $g_j(M) = g_j(x_1, \ldots, x_n)$, $(j = \overline{1, m}$, $m < n)$. Для функций $g_j(x_1, \ldots, x_n)$ справедливы равенства, называемые ***уравнениями связи***

$$g_j(M) = g_j(x_1, \ldots, x_n) = 0, \;\; (j = \overline{1, m}), \tag{1}$$

определяющие множество допустимых решений X.

Требуется исследовать функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ на экстремум на множестве $X = \{M / g_j(M) = 0,\; j = \overline{1, m}\}$.

Если найдется точка $M_0\,(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, удовлетворяющая системе уравнений (1) и дающая минимум (максимум) функции $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ при всех $M(x_1, \ldots, x_n) \in X$, то ее называют точкой ***глобального условного минимума*** (***максимума***).

Задача на ***локальный условный экстремум*** ставится следующим образом: найти точку M_0, удовлетворяющую ограничениям (1), такую, что при некотором достаточно малом $\varepsilon > 0$, для всех допустимых точек M из ε-окрестности точки M_0: $\rho(M, M_0) \le \varepsilon$, выполняется неравенство $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$ для точки максимума (выполняется неравенство $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$ для точки минимума).

Замечание. $\rho(M, M_0) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2}$ – расстояние между точками M и M_0.

Есть два метода решения данной задачи.

2. **Метод исключения части переменных.** При решении задачи этим методом:

а) разрешают уравнения связи относительно каких-либо m переменных, например $x_1, \ldots, x_m$;

б) подставляют эти переменные в функцию $f(M)$ и получают функцию $n-m$ переменных $f(M) = F(x_{m+1}, \ldots, x_n)$;

в) исследуют на безусловный экстремум новую $F(x_{m+1}, \ldots, x_n)$;

г) Подставляют координаты полученных точек экстремума в выражения для $x_j, (j = \overline{1, m})$ и находят точки экстремума функции $f(M)$.

3. Метод Лагранжа. Задача об условном экстремуме функции $f(M) = f(x_1, \ldots, x_n)$ решается с помощью обобщенной функции Лагранжа

$$F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_0, \boldsymbol{\lambda}) = \lambda_0 f(M) + \lambda_1 g_1(M) + \lambda_2 g_2(M) + \cdots + \lambda_m g_m(M),$$

где λ_j - произвольные числа.

***Теорема* 1 (*необходимые условия экстремума первого порядка*).**

Пусть M_0 есть точка условного экстремума функции $f(M)$. Тогда найдутся числа λ_0^0, $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0$, не равные одновременно нулю и такие, что выполняются условия:

– условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по x_j

$$\frac{\partial F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_0, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_j} = 0, (j = \overline{1, n});$$

– условие допустимости решения: $g_j(x_1, \ldots, x_n) = 0, (j = \overline{1, m})$.

***Замечание* 1.** Из условия стационарности следует, что число λ_0^0 и вектор Лагранжа $\boldsymbol{\lambda}^0 = (\lambda_0^0, \ldots, \lambda_m^0)$ находятся неоднозначно, причем, если $\lambda_0^0 \neq 0$, то всегда можно считать, что $\lambda_0^0 > 0$.

Замечание* 2.** Если M_0 точка условного экстремума функции $f(M)$ и для всех векторов Лагранжа, соответствующих этой точке, выполняется $\lambda_0^0 \neq 0$, то точку M_0 называют ***нормальной точкой условного экстремума, а задачу на условный экстремум – ***нормальной задачей на условный экстремум.***

Замечание* 3.** Точки, удовлетворяющие условиям теоремы 1, называют ***условно-стационарными.

Можно показать, что точка M_0 − нормальная точка условного экстремума тогда и только тогда, когда в этой точке выполняются условия регулярности, т.е. линейно независимы градиенты функций $g_j(M)$ $(j=1,m)$ (векторы $\dfrac{\partial g_j(M_0)}{\partial x}=\left(\dfrac{\partial g_j(M_0)}{\partial x_1},\dots,\dfrac{\partial g_j(M_0)}{\partial x_n}\right)(j=\overline{1,m})$).

Если в точке M_0 выполняются условия регулярности, то можно считать что $\lambda_0^0=1$, и вместо обобщенной функции Лагранжа рассматривать классическую функцию Лагранжа

$$L(M,\lambda)=f(M)+\lambda_1 g_1(M)+\lambda_2 g_2(M)+\cdots+\lambda_m g_m(M).$$

***Теорема* 2 (*необходимые условия экстремума второго порядка*).**

Пусть M_0 − *регулярная точка условного экстремума функции* $f(M)$ *и* $\boldsymbol{\lambda}^0=(\lambda_1^0,\dots,\lambda_m^0)$ *соответствующий ей вектор Лагранжа. Тогда*

1) *если* M_0 − *точка условного минимума, то* $d^2L(M_0,\boldsymbol{\lambda}^0)\ge 0$;

2) *если* M_0 − *точка условного максимума, то* $d^2L(M_0,\boldsymbol{\lambda}^0)\le 0$ *для всех дифференциалов независимых переменных* dx_1, dx_2, …, dx_n, *таких что*

$$dg_j(M_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_j(M_0)}{\partial x_i}dx_i=0,\quad (j=\overline{1,m}). \qquad (2)$$

***Теорема* 3 (*достаточные условия экстремума*).**

Пусть M_0 регулярная условно-стационарная точка, а $\boldsymbol{\lambda}^0$ – соответствующий ей вектор Лагранжа.

Если в этой точке $d^2L(M_0,\boldsymbol{\lambda}^0)>0$ $(d^2L(M_0,\boldsymbol{\lambda}^0)<0)$ *для всех ненулевых* dx_1, dx_2, …, dx_n, *таких, что выполнено условие* (2), *то точка* M_0 *является точкой локального условного минимума* (*максимума*).

4. Алгоритм решения задачи.

Шаг 1. Найти градиенты функций $g_j(M)$ $(j=1,m)$ и проверить их на линейную независимость в области X. Если они всюду линейно независимы, то переходим к шагу 3. Если градиенты функций в некоторых точках линейно зависимы или задача определения линейной зависимости вызывает затруднения, то переходим к шагу 2.

Шаг 2. Составить обобщенную функцию Лагранжа: $F(M,\lambda_0,\lambda)=\lambda_0 f(M)+\lambda_1 g_1(M)+\lambda_2 g_2(M)+\cdots+\lambda_m g_m(M)$ и записать необходимые условия первого порядка:

$$\frac{\partial F(M,\lambda_0{}^0,\lambda^0)}{\partial x_i}=0,\ (i=\overline{1,n});\qquad g_j(M)=0,\ (j=\overline{1,m}).$$

Решить полученную систему для случая $\lambda_0 = 0$ и найти координаты точек M и значения постоянных $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_n^0$, удовлетворяющих данным уравнениям.

Шаг 3. Положить $\lambda_0 = 1$ и составить классическую функцию Лагранжа: $L(M,\lambda)= f(M)+\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j g_j(M)$.

Записать необходимые условия первого порядка:

$$a)\ \frac{\partial L(M,\lambda^0)}{\partial x_i}=0,\ (i=\overline{1,n}),\qquad б)\ g_j(M)=0,\ (j=\overline{1,m}).$$

Решить систему и найти регулярные условно стационарные точки M и значения постоянных $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_n^0$, удовлетворяющих данным уравнениям.

Шаг 4. Для полученных на шаге 3 точек проверить достаточные условия экстремума:

а) Найти $d^2L(M_0,\lambda^0)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L(M_0,\lambda^0)}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j$;

б) Продифференцировать уравнения связи:

$$dg_j(M_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_j(M_0)}{\partial x_i}dx_i=0\quad (j=\overline{1,m});$$

в) Из полученной системы выразить любые m дифференциалов через остальные $(n-m)$ и подставить в $d^2L(M_0,\lambda^0)$;

г) Если $d^2L(M_0,\lambda^0)>0$ при ненулевых dx_1, dx_2, …, dx_n, то в точке M_0 – условный локальный минимум, если $d^2L(M_0,\lambda^0)<0$ при ненулевых dx_1, dx_2, …, dx_n, то в точке M_0 – условный локальный максимум. Если достаточные условия не выполняются, следует проверить выполнение необходимых условий второго порядка (теорема 2). Если они выполняются, то требуется дополнительное исследование, а если не выполняются, то в точке M_0 нет условного экстремума.

Шаг 5. Вычислить значения функции в точках условного экстремума, а также в точках, полученных в шаге 2. Наименьшее из этих значений и есть значение глобального минимума, а наибольшее – значение глобального минимума. Соответствующие точки M_0 являются точками глобального минимума и максимума соответственно.

2. *Решение типовых задач*

***Пример* 1.** На эллипсоиде $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$ найти точку, наиболее удалённую от точки (0, 0, 3).

Решение. Возьмем произвольную точку $M(x, y, z)$, лежащую на эллипсоиде. Расстояние от точки (0, 0, 3) до точки $M(x, y, z)$ определяется формулой $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-3)^2}$. Поэтому исходная задача равносильна задаче об условном максимуме функции $u = \rho^2 = x^2 + y^2 + (z-3)^2$ при условии связи $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$.

Найдем решение задачи м**етодом исключения части переменных.** Из уравнения связи выражаем x^2 через y и z, получаем

$$x^2 = 8 - 2y^2 - 4z^2. \qquad (3)$$

Подставляем полученное значение в целевую функцию и получаем функцию от двух переменных

$$u(y, z) = 8 - 2y^2 - 4z^2 + y^2 + (z-3)^2 = 17 - y^2 - 3z^2 - 6z,$$

которую исследуем на безусловный экстремум.

Находим точки возможного экстремума функции $u(y, z)$, для этого решаем систему уравнений

$$\begin{cases} u'_y = -2y = 0, \\ u'_z = -6z - 6 = 0. \end{cases}$$

Точка $N_0(0, -1)$ – точка возможного экстремума функции $u(y, z)$.

Проверим, выполняются ли для этой точки достаточные условия локального экстремума, для этого находим второй дифференциал функции.

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}dydz + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2 = -2dy^2 - 6dz^2.$$

Очевидно, что $d^2u = -2dy^2 - 6dz^2 < 0$, для всех dy и dz одновременно не равных нулю, значит точка $N_0(0, -1)$ – точка локального максимума функции $u(y, z)$.

Подставим координаты точки N_0 в равенство (3), получим значение $x = \pm 2$. Итак, функция $u = \rho^2 = x^2 + y^2 + (z-3)^2$ имеет две точки условного максимума: $M_1(2, 0, -1)$ и $M_2(-2, 0, -1)$.

Следовательно, точками эллипса, наиболее удаленными от точки (0, 0, 3), являются точки $M_1(2, 0, -1)$ и $M_2(-2, 0, -1)$.

***Пример* 2.** Методом Лагранжа найти экстремум функции $u = x + y + z^2$ при условиях связи

$$\begin{cases} z - x = 1, \\ y - xz = 1. \end{cases} \qquad (4)$$

Решение. *Шаг* 1. $g_1(x, y, z) = z - x - 1$, $g_2(x, y, z) = y - xz - 1$.

Найдем градиенты этих функций:

$$\operatorname{grad} g_1 = \left(\frac{\partial g_1}{\partial x}, \frac{\partial g_1}{\partial y}, \frac{\partial g_1}{\partial z}\right) = (-1, 0, 1), \quad \operatorname{grad} g_2 = \left(\frac{\partial g_2}{\partial x}, \frac{\partial g_2}{\partial y}, \frac{\partial g_2}{\partial z}\right) = (-z, 1, -x).$$

Полученные векторы являются линейно независимыми в пространстве $\boldsymbol{R}^3$, следовательно, можно перейти к шагу 3.

Шаг 3. Составим классическую функцию Лагранжа $L = x + y + z^2 + \lambda_1(z - x - 1) + \lambda_2(y - xz - 1)$ и рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} L'_x = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 z = 0, \\ L'_y = 1 + \lambda_2 = 0, \\ L'_z = 2z + \lambda_1 - \lambda_2 x = 0, \\ g_1 = z - x - 1 = 0, \; g_2 = y - xz - 1 = 0. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение: $x = -1$, $y = 1$, $z = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, значит, точка $M_0(-1, 1, 0)$ − единственная точка возможного экстремума функции $u = x + y + z^2$ при условиях связи (2).

Шаг 4. Дифференцируя уравнения связи, приходим к равенствам

$$\begin{cases} dz - dx = 0, \\ dy - xdz - zdx = 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} dz = dx, \\ dy = (x + z)dx. \end{cases}$$

Теперь находим второй дифференциал функции Лагранжа

$$d^2L = L''_{x^2}dx^2 + L''_{y^2}dy^2 + L''_{z^2}dz^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{xz}dxdz + 2L''_{yz}dydz =$$

$$= 2\,dz^2 - 2\lambda_2 dxdz.$$

Подставляя координаты точки $M_0(-1, 1, 0)$, значение $\lambda_2 = -1$ и выражения $dz = dx$, $dy = (x + z)dx$, $dy(M_0) = -dx$ в d^2L, получаем положительно определённую квадратичную форму от одной переменной dx: $d^2L = 4dx^2 > 0$. Отсюда следует, что функция $u = x + y + z^2$ при условиях связи (4) имеет в точке M_0 условный минимум.

Шаг 5. В точке условного минимума $M_0(-1, 1, 0)$ значение функции $u_{min} = 0$.

3. *Задания для лабораторной работы*

1. Найти точки условного экстремума функции $u = f(M)$ при наличии условий связи $g_j(M) = 0$:

Вариант	$u = f(M)$	Уравнения связи $g_j(M) = 0$
1.	$u = x_1 x_2,$	$3x_1 + x_2 - 6 = 0.$
2.	$u = e^{x_1 x_2},$	$x_1 + x_2 - 1 = 0.$
3.	$u = 2x_1^2 + x_2^2,$	$2x_1 + x_2 - 1 = 0.$
4.	$u = x_1 + x_2 + x_3^2,$	$-x_1 + x_3 - 1 = 0.$
5.	$u = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3,$	$x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0.$
6,	$u = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$	$x_1 + x_2 - x_4 - 6 = 0,$ $x_1 + x_3 + x_4 - 9 = 0.$
7.	$u = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2,$	$x_1 + x_2 - a = 0.$
8.	$u = x_1^2 - x_2^2,$	$x_1 - x_2 - 10 = 0.$
9.	$u = x_1^2 + x_2^2 + 3,$	$x_1^3 + x_2^3 - 1 = 0.$
10.	$u = 2x_1 + x_2,$	$x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 x_2 = 0.$
11.	$u = 4x_1 x_2,$	$x_1^2 + x_2^2 - 9 = 0.$
12.	$u = 2x_1^3 + 2x_2^3 + 3x_1 + 3x_2,$	$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0.$
13.	$u = x_1 + x_2 + x_3,$	$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} - 1 = 0.$
14.	$u = 3x_1 - x_2,$	$9x_1^3 - x_2^2 = 0.$
15.	$u = x_1 - 3x_2,$	$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1 = 0,$ $(x_1 + 1)^2 + x_2^2 - 1 = 0.$

2. Найти условный экстремум функции $u = f(M)$ при данных уравнениях связи. Решение проиллюстрировать геометрически.

Вари-ант	$u = f(M)$	Уравнения связи
1.	$u = x_1 + x_2,$	$x_1^2 + x_2^2 - 8 = 0.$
2.	$u = x_1^2 + x_2^2,$	$x_1^2 + 2x_2^2 - 8 = 0.$
3.	$u = x_1^2 + x_2^2,$	$x_2^2 - x_1 = 0.$
4.	$u = 2x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 8x_2 + 3,$	$x_1 + x_2 + 6 = 0.$
5.	$u = x_1 - 2x_2^2 + 4x_2,$	$-3x_1 - 2x_2 = 6.$
6.	$u = -4x_1^2 - 8x_1 + x_2 + 3,$	$-x_1 - x_2 = 2.$
7.	$u = 4x_1^2 + 4x_1 + x_2^2 - 8x_2 + 5,$	$2x_1 - x_2 = 6.$
8.	$u = -8x_1^2 + 4x_1 - x_2^2 + 12x_2 - 7,$	$2x_1 + 3x_2 = -6.$
9.	$u = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$	$x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0.$
10.	$u = x_1^2 + x_2^2,$	$x_1 + x_2 = 2.$
11.	$u = x_1 + x_2,$	$x_1^2 + x_2^2 = 2.$
12.	$u = x_1^2 + x_2^2,$	$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = 0.$
13.	$u = x_1^2 - x_2^2,$	$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0.$
14.	$u = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$	$x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0,$ $x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0.$
15.	$u = 0{,}5((x_1 - 1)^2 + x_2^2),$	$-x_1 + 2x_2^2 = 0.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов, А.В. Высшая математика. Математическое программирование / А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод. – Минск: Вышэйшая школа, 1994. – 288 с.
2. Минюк, С.А. Математические методы и модели в экономике / С.А. Минюк, Е.А. Ровба, К.К. Кузьмич. – Минск: ТетраСистемс, 2002. – 432 с.
3. Пантелеев, А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах / А.В. Пантелеев. – Минск: Высшая школа, 2002. – 544 с.
4. Иванова, Ж.В. Высшая математика: методические рекомендации к практическим занятиям / Ж.В. Иванова, М.Н. Подоксёнов, Т.Л. Сурин. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2021. – 50 с.
5. Иванова, Ж.В. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функции многих переменных / Ж.В. Иванова, Т.Л. Сурин, С.В. Шерегов. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2010. – 98 с.
6. Сурин, Т.Л. Методы оптимизации. Нелинейное программирование / Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2020. – 50 с.

Учебное издание

ИВАНОВА Жанна Викторовна

СУРИН Татьяна Леонидовна

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к лабораторным работам

Технический редактор *Г.В. Разбоева*

Компьютерный дизайн *Л.Р. Жигунова*

Подписано в печать 2021. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,21. Уч.-изд. л. 2,08. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/255 от 31.03.2014.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.