

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра геометрии и математического анализа

**Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский,
М.Н. Подоксёнов**

ПРИЛОЖЕНИЯ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Методические рекомендации

*Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2021*

УДК [519.6+519.7](075.8)
ББК 22.195я73
Т77

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 7 от 29.06.2021.

Авторы: профессор кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, доктор физико-математических наук, профессор **Ю.В. Трубников**; преподаватель кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова **М.М. Чернявский**; заведующий кафедрой геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **М.Н. Подоксёнов**

Р е ц е н з е н т :
профессор кафедры «Информационные системы
и автоматизация производства» УО «ВГТУ»,
доктор физико-математических наук, профессор *А.А. Корниенко*

Трубников, Ю.В.
Т77 Приложения компьютерного моделирования : методические рекомендации / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский, М.Н. Подоксёнов. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2021. – 46 с.

Данное издание подготовлено для студентов второй ступени высшего образования факультета математики и информационных технологий в соответствии с учебной программой по дисциплине «Приложения компьютерного моделирования» (специальность «Математика и компьютерные науки»). Излагаются теоретический материал и примеры заданий для выполнения лабораторных работ. Методические рекомендации могут быть также использованы студентами при изучении курса «Компьютерное моделирование физических процессов» по специальности «Компьютерная безопасность»; курса «Математическое моделирование» по специальности «Прикладная математика»; курса «Математическое и компьютерное моделирование» по специальности «Программное обеспечение информационных технологий».

УДК [519.6+519.7](075.8)
ББК 22.195я73

© Трубников Ю.В., Чернявский М.М., Подоксёнов М.Н., 2021
© ВГУ имени П.М. Машерова, 2021

Содержание

Введение.....	4
1. Общие сведения о колебательном движении	6
1.1. Предмет теории колебаний	6
1.2. Способы описания колебательной системы	8
1.3. Сложение колебаний	12
2. Применение рядов Фурье для нахождения периодических решений дифференциальных уравнений	17
3. Метод функций Грина	20
3.1. Периодические решения уравнения первого порядка	20
3.2. Построение функции Грина Т – периодической краевой задачи	24
4. О спектральной оптимизации интеграла от модуля функции Грина	29
5. Матричные функции Грина	32
6. Нелинейные дифференциальные уравнения	37
6.1. Итерационные процессы	37
6.2. Нахождение интервалов знакопостоянства функции Грина и вычисление констант сжатия интегральных операторов	40

Введение

Текст настоящих методических рекомендаций ориентирован на студентов второй ступени высшего образования, обучающихся по специальностям 1-31 80 03 «Математика и компьютерные науки» и 1-40 80 04 «Информатика и технологии программирования». Издание будет полезным во время изучения дисциплины «Приложения компьютерного моделирования». Кроме того, может быть рекомендовано студентам, обучающимся по специальностям 1-98 01 01-02 «Компьютерная безопасность», 1-31 03 03-02 «Прикладная математика» и 1-40 01 01 03 «Программное обеспечение информационных технологий» во время изучения курсов «Компьютерное моделирование физических процессов», «Математическое моделирование» и «Математическое и компьютерное моделирование». Для полного усвоения материала студенты должны владеть простейшими навыками работы в системе компьютерной математики *Maple*.

Прикладных задач в области математического и компьютерного моделирования существует огромное количество. Рассмотреть их по отдельности в рамках соответствующей вузовской дисциплины не представляется возможным. Тем не менее важно выделить некоторые математические конструкции, объединяющие эти задачи. Такими конструкциями могут выступать дифференциальные уравнения и их системы, описывающие поведение того или иного моделируемого объекта или процесса. Актуальным примером являются дифференциальные уравнения в задачах, связанных с моделированием колебательных процессов, происходящих в различных физических системах.

Материал издания разбит на 6 разделов. В конце каждого из них приведены вопросы для самопроверки, а также примеры заданий для самостоятельного решения.

Первый раздел издания посвящен основным сведениям о колебательном движении. В нем рассмотрены предмет теории колебаний, основные способы описания колебательного движе-

ния и теория сложения колебаний. Во втором разделе рассматривается применение рядов Фурье для нахождения периодических решений дифференциальных уравнений из теории нелинейных колебаний. Там же дано описание соответствующих команд для программирования этого метода в системе компьютерной математики *Maple*.

Основная часть издания отведена наиболее актуальным на данный момент алгоритмам нахождения Т-периодических решений дифференциальных уравнений, описывающих различные колебательные процессы. В частности, в разделе 3 рассматривается метод функций Грина, а в разделе 5 – его матричный аналог. Реализация соответствующих алгоритмов требует активного использования возможностей современных систем компьютерной математики. На примере пакета *Maple* показаны возможные направления исследований получаемых конструкций, представлена визуализация результатов (разделы 4 и 6.2). Раздел 6.1 посвящен рассмотрению одного итерационного способа решения краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений.

1. Общие сведения о колебательном движении

1.1. Предмет теории колебаний

Предмет теории колебаний весьма обширен, также обширен и математический аппарат, применяемый в этой теории. Для теории колебаний не типичен вопрос о том, что происходит в данный момент в данном месте, ее интересует общий характер физического процесса, взятого в целом, за достаточно большое время. Рассмотрим пример: надо раскачать тяжелый колокол. Можно сильно дергать веревку и не получить никакого результата, а маленький мальчик его раскачает, если придаст нужную форму кривой своей силы, если будет в нужные моменты увеличивать или уменьшать эту силу. То есть колокол можно раскачать последовательными толчками. Именно этим интересуется теория колебаний. Чтобы раскачать колокол, надо дергать веревку в такт с его колебаниями. Здесь существенно то, что раскачивание определяется всей кривой, описывающей процесс воздействия на колокол за время его раскачивания.

Известны следующие явления. Цепной мост иногда разрушался от того, что по нему в ногу шли солдаты, электрические кабели пробивались от напряжения, существенно ниже рассчитанного и т.д. Мост разрушается в том случае, когда шаг солдат попадает в такт с качаниями самого моста: когда мост возвращается в исходное положение, его снова подталкивают. В электрическом кабеле может происходить нечто похожее, и при этом напряжение постепенно нарастает.

Для таких процессов характерно, что они определяются всем течением воздействия во времени. Те стороны процессов, которые характеризуются их общим видом, формой процесса в целом, и составляют предмет изучения теории колебаний. Однако не любой процесс подпадает под эту теорию. Это теория процессов, в той или иной степени повторяющихся, в частности периодических. Различие между обычной динамикой и теорией колебаний состоит в том, что обычную динамику интересует то, что происходит в конкретном месте в данное время, а теорию колебаний – движение в целом.

В настоящем курсе рассматриваются периодические процессы. Основным понятием здесь является понятие периодической функции. Функция $f(t)$ называется периодической, если существует такое число T , что при любом t выполняется равенство $f(t+T) = f(t)$. Нетрудно показать, что если функция имеет период, то она имеет бесконечное множество периодов. Действительно,

$$f(t+T+T) = f(t+T) = f(t),$$

т.е. число $2T$ – тоже период, и вообще, любое целое, кратное периоду, есть период. Принято, без каких-либо дальнейших указаний о периоде, иметь

в виду наименьший положительный период. Возможны ли у периодической функции несоизмеримые периоды? Нетрудно доказать, что таких периодов не существует, если функция не есть постоянная (постоянная есть периодическая функция, для которой любое число есть период). Предположим, что функция имеет два периода T_1 и T_2 . Если T_1 – период, то nT_1 – тоже период, где n – любое целое число. Если T_2 – период, то mT_2 – тоже период, где m – любое целое число. Если числа T_1 и T_2 несоизмеримы, то можно выбрать числа n и m так, чтобы разность $mT_2 - nT_1$ была сколь угодно мала. Но эта разность есть тоже период, а, значит, функция имеет сколь угодно малый период. Но такая функция является постоянной.

Функции, принадлежащие к классу периодических, весьма разнообразны. Среди них есть функции, образующие подкласс, играющий особенно важную роль, а именно синусообразные функции. Их общий вид таков:

$$y = f(t) = a \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \varphi\right).$$

Здесь имеются три постоянные величины: a, φ, T . Функции такого вида играют в физике громадную роль. Это вызвано тем, какую роль в теории колебаний играют гармонические (синусообразные) колебания.

Существует бесчисленное множество явлений, для описания которых требуются именно такие функции. Прежде всего колебания маятника (приблизительно, если они малы), в оптике – монохроматический свет. В акустике с понятием синусоидального колебания связано понятие о чистом тоне: чистый тон имеет место тогда, когда частицы воздуха колеблются гармонически.

Величина

$$\nu = \frac{1}{T}$$

называется частотой колебаний. Пользуясь этой величиной, формулу гармонических колебаний можно представить в виде

$$y = a \cos(2\pi\nu t - \varphi).$$

При такой записи всюду приходится писать множитель 2π . Чтобы того избежать, рассматривают циклическую частоту ω : $\omega = 2\pi\nu$.

Почему ω называют циклической частотой? Рассмотрим равномерное движение по окружности, происходящее с тем же периодом, что и гармонические колебание. Тогда $\omega = 2\pi\nu$ будет угловой скоростью движения по кругу (циклу).

Физический смысл величины $a = y_{\max}$ состоит в том, что эта величина, называемая амплитудой (в физике ее обычно обозначают A), равна максимальному значению величины y . Если мы изменим величину φ , которая называется фазой, то функция будет приобретать то значение, которое она

имела в момент $t = t_1$, при каком-то другом значении $t = t_2$. Сдвиг на $1/4$ периода соответствует $\varphi = \pi / 2$. Функции косинус и синус отличаются только фазой. Замена одной из этих функций другой означает лишь перемещение кривой во времени на четверть периода. Фаза играет очень важную роль, если есть два колебательных процесса и производится сдвиг одного из них по отношению к другому.

1.2. Способы описания колебательной системы

Все виды колебаний можно классифицировать по следующим параметрам:

- по физической природе (механические и электромагнитные);
- по характеру возникновения и существования (свободные, вынужденные, параметрические, автоколебания);
- по характеру зависимости колеблющейся величины от времени (гармонические и негармонические).

Несмотря на разную природу колебаний, в них обнаруживаются одни и те же физические закономерности; они описываются одними и теми же уравнениями, исследуются общими методами. Например, рассмотрим механические колебания, т. е. повторяющиеся изменения положений и скоростей каких-либо тел или частей тел, происходящие при наличии упругих сил, силы тяжести, а также других сил.

Простейшим типом периодических механических колебаний являются так называемые гармонические колебания. Например, смещение колеблющейся точки в произвольный момент времени описывается уравнением

$$x(t) = x_{\max} \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Для того чтобы свободные колебания совершались по гармоническому закону, необходимо, чтобы сила, стремящаяся вернуть систему в положение равновесия, была пропорциональна смещению тела. Такие силы называются квазиупругими.

Скорость (первая производная координаты по времени) и ускорение (вторая производная координаты по времени) в случае гармонических колебаний также будут изменяться по гармоническому закону:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = -x_{\max} \omega \sin(\omega t + \varphi_0) = v_{x\max} \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x} = -x_{\max} \omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = a_{x\max} \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi).$$

Отсюда видно, что скорость опережает смещение по фазе на $\pi / 2$, а ускорение – на π , т.е. находится в противофазе со смещением.

Кроме аналитического способа описания поведения колебательной системы существует несколько способов его графического представления.

1) Временные («плоские») диаграммы, где по горизонтальной оси отложено время, а по вертикальной – смещение, скорость или ускорение (рис. 1). Для гармонических колебаний график изменения колеблющейся величины во времени имеет вид синусоиды или косинусоиды.

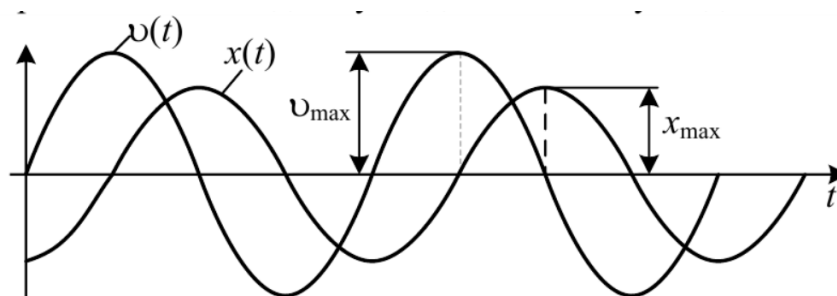


Рис. 1. – Временные диаграммы гармонических колебаний

2) Спектральный метод представления: по горизонтальной оси откладывается частота колебаний, а по вертикали – амплитуда (или энергия, пропорциональная квадрату амплитуды). В случае чисто гармонических колебаний спектр будет состоять из одной единственной линии (рис. 2).

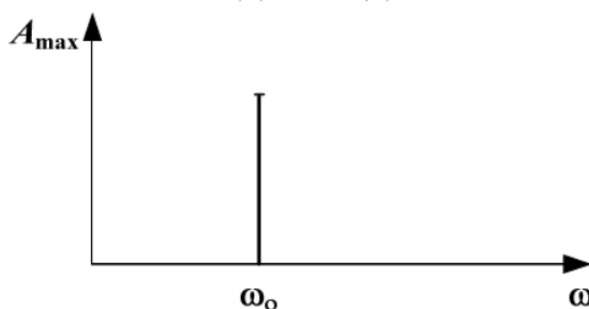


Рис. 2. – Спектр гармонического колебания с частотой ω_0

3) Метод векторных диаграмм (применим только для гармонических колебаний): на плоскости (рис. 3) выбирают произвольное начало координат O и произвольную ось OO' . Изучаемая гармоническая величина представляется вращающимся с угловой скоростью ω вектором, длина которого равна (или пропорциональна) амплитуде колебаний, и составляющим с осью OO' угол φ_0 , совпадающий с начальной фазой. Тогда вертикальная проекция вектора на ось изменяется со временем по гармоническому закону (при этом положительным считается вращение вектора против часовой стрелки). Мгновенное положение вектора определяется углом $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$, т.е. фазой колебаний в соответствующий момент времени.

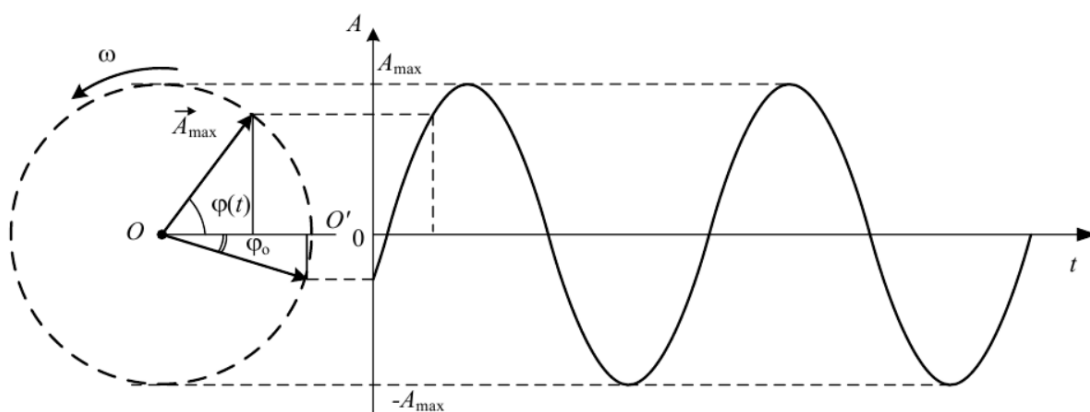


Рис. 3. – Векторная диаграмма и связь вращательного и колебательного движений

Ценность этого метода особенно проявляется при суммировании нескольких движений равной частоты. Пусть, например, нужно сложить два колебания с одинаковыми частотами (рис. 4) $A_1 = A_{\max 1} \cos(\omega t + \varphi_{01})$ и $A_2 = A_{\max 2} \cos(\omega t + \varphi_{02})$:

$$A(t) = A_1(t) + A_2(t) = A_{\max 1} \cos(\omega t + \varphi_{01}) + A_{\max 2} \cos(\omega t + \varphi_{02}) = A_{\max} \cos(\omega t + \varphi_0).$$

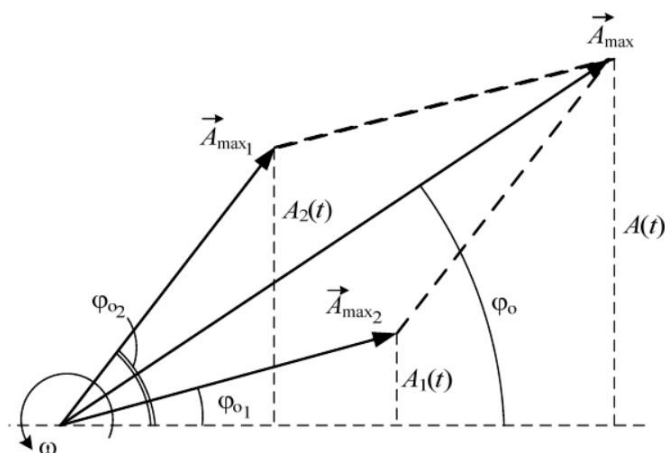


Рис. 4. – Сложение гармонических колебаний одной частоты

Амплитуду и начальную фазу результирующего колебания легко найти из рис. 4, на котором операция сложения гармонических величин представлена как операция сложения векторов $\vec{A}_{\max 1}$ и $\vec{A}_{\max 2}$ в момент времени $t = 0$:

$$\vec{A}_{\max} = \vec{A}_{\max 1} + \vec{A}_{\max 2},$$

$$A = \sqrt{(A_{\max 1} \cos \varphi_{01} + A_{\max 2} \cos \varphi_{02})^2 + (A_{\max 1} \sin \varphi_{01} + A_{\max 2} \sin \varphi_{02})^2},$$

$$\varphi_0 = \arctg \frac{A_{\max 1} \sin \varphi_{01} + A_{\max 2} \sin \varphi_{02}}{A_{\max 1} \cos \varphi_{01} + A_{\max 2} \cos \varphi_{02}}.$$

Ясно, что вертикальная проекция результирующего вектора $\vec{A}_{\max}$ также будет изменяться по гармоническому закону с той же частотой, поскольку взаимное расположение векторов $\vec{A}_{\max 1}$ и $\vec{A}_{\max 2}$ не изменяется с течением времени.

Способ векторных диаграмм тесно связан с удобным аналитическим способом представления гармонической величины комплексным числом (простые задачи, рассматриваемые нами в рамках курса, не требуют применения этого метода). Например, такой подход оправдан при расчете цепей переменного тока.

4) Метод фазовых диаграмм, удобный для качественного анализа движений (и не только гармонических!). В любой колебательной системе с одной степенью свободы смещение и скорость меняются со временем. Состояние системы в каждый момент времени можно характеризовать двумя значениями x и v , и на плоскости этих переменных это состояние однозначно определяется положением изображающей точки с координатами $(x;v)$. С течением времени изображающая точка будет перемещаться по кривой, которую называют фазовой траекторией движения. Анализ траектории позволяет судить об особенностях процесса.

Плоскость переменных x и v называется фазовой плоскостью. Семейство фазовых траекторий образует фазовый портрет колебательной системы.

Для периодического движения фазовая траектория – замкнутая кривая. В частности, фазовый портрет гармонического осциллятора представляет собой семейство эллипсов, каждому из которых соответствует энергия $E = E_p + E_k$, запасенная осциллятором. Покажем, что это действительно так. Координата и скорость гармонического колебания изменяются по закону косинуса или синуса:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{\max} \cos(\omega t + \varphi_0), \\ \dot{x} &= -\omega x_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0). \end{aligned}$$

Чтобы найти уравнение фазовой траектории надо исключить из данных уравнений время:

$$\left(\frac{x}{x_{\max}} \right)^2 + \left(-\frac{\dot{x}}{\omega x_{\max}} \right)^2 = 1 - \text{уравнение эллипса.}$$

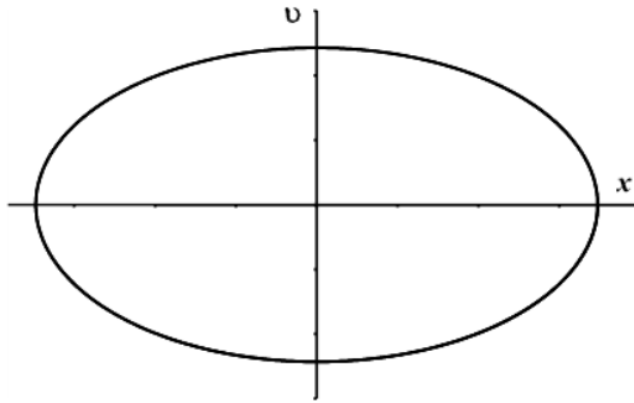


Рис. 5. – Фазовая диаграмма гармонического осциллятора

Фазовые диаграммы затухающих колебаний представляют собой спирали, скручивающиеся к началу координат тем быстрее, чем меньше добротность системы (понятие добротности будет рассмотрено позже) (рис. 6):

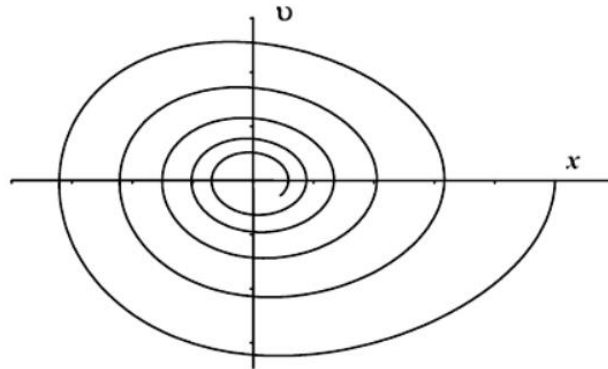


Рис. 6. – Фазовая диаграмма затухающего колебания

Особое внимание, уделяемое в физике и технике гармоническому движению, объясняется, прежде всего, тем, что существует громадное число физических систем, совершающих гармоническое движение (с очень большой степенью точности). Кроме того, периодическое негармоническое движение можно свести к сумме гармонических движений, причем эти составные движения доступны непосредственному наблюдению при помощи современной аппаратуры.

1.3. Сложение колебаний

Рассмотрим вопрос сложения колебаний. Пусть имеется два источника света. Пусть первый источник света создаёт поле (колебание) y_1 , второй источник в отдельности – поле (колебание) y_2 . Существует такой экспериментальный факт: поле при наличии обоих источников равно сумме полей, создаваемых каждым источником в отдельности. Есть и такие случаи, когда складывать колебания нельзя. Это происходит, например, при больших амплитудах в акустике.

Рассмотрим следующий случай:

$$y = a \cos \omega t + b \sin \omega t.$$

Можно доказать, что в этом случае

$$y = c \cos(\omega t + \varphi),$$

где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\operatorname{tg} \varphi = b / a$.

Сумма двух гармонических колебаний с разными периодами не может быть представлена как одно гармоническое колебание. Эта сумма является непериодической функцией, если периоды несоизмеримы. Примеры явлений, в которых имеет место сложение гармонических колебаний, многочисленны. В приливах и отливах мы имеем дело с периодическими силами, обусловленными Солнцем и Луной. Периоды этих сил различны. Возникают биения – периодические изменения амплитуды колебаний, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами. Биения возникают вследствие того, что разность фаз между двумя колебаниями с различными частотами все время изменяется так, что оба колебания находятся в какой-то момент времени в фазе, через некоторое время в противофазе, затем снова в фазе и т.д. Если A_1 и A_2 – амплитуды двух накладывающихся колебаний, то при одинаковых фазах колебаний амплитуда результирующего колебания достигает наибольшего значения $A_1 + A_2$, а когда фазы колебаний противоположны, амплитуда результирующего колебания падает до наименьшего значения $A_1 - A_2$. В простейшем случае, когда амплитуды колебаний равны, их сумма достигает максимального значения $2A$ при одинаковых фазах колебаний и падает до нуля, когда они противоположны по фазе. Результат наложения колебаний можно записать в виде:

$$A \sin \omega_1 t + A \sin \omega_2 t = 2A \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \sin \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right),$$

где ω_1 и ω_2 – соответствующие угловые частоты двух накладывающихся колебаний.

Если ω_1 и ω_2 мало различаются, то в этом выражении величину

$$2A \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right)$$

можно рассматривать как медленно меняющуюся амплитуду колебания

$$\sin \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right).$$

Угловая частота $\Omega = \omega_1 - \omega_2$ называется угловой частотой биения.

Можно рассматривать суммы конечного числа гармонических колебаний с несоизмеримыми периодами, а затем перейти к сумме бесконечного числа таких гармонических колебаний. Это приводит к новому классу функций, более общих, чем периодические. Такие функции называются

почти периодическими функциями. Периодическая функция – это функция, для которой $f(t+T) = f(t)$. Она имеет период T , а также nT , где n – любое целое число. Рассмотрим далее непрерывные функции, обладающие следующим свойством: для любого положительного ε существуют такие почти-периоды $\tau(\varepsilon)$, для которых

$$|f(t+\tau(\varepsilon)) - f(t)| < \varepsilon,$$

причем таких почти-периодов имеется бесконечное число и они лежат не очень редко, – аналогично тому, как обстоит дело с периодами nT ($n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) периодической функции. Значения таких функций повторяются, но повторяются не совсем точно. Такие функции называются почти периодическими функциями.

Рассмотрим задачу о сложении двух гармонических колебаний, происходящих в двух перпендикулярных направлениях. Предположим, что координаты точки изменяются следующим образом:

$$x(t) = a_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1), \quad y(t) = a_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2).$$

Тогда точка опишет некоторое сложное результирующее движение. Эти уравнения являются параметрическими уравнениями движения точки. В случае, когда $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, исключить t можно следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= a_1 \cos \varphi_1 \cos(\omega t) + a_1 \sin \varphi_1 \sin(\omega t), \\ y &= a_2 \cos(\omega t) \cos \varphi_2 + a_2 \sin(\omega t) \sin \varphi_2. \end{aligned}$$

Из последней системы выражаем $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$ (вычисления проведены в математическом пакете *Maple*).

```
> q1:=x=a[1]*u*cos(phi[1])+a[1]*v*sin(phi[1]);
      q1 := x = a_1 u cos(phi_1) + a_1 v sin(phi_1)

> q2:=y=a[2]*u*cos(phi[2])+a[2]*v*sin(phi[2]);
      q2 := y = a_2 u cos(phi_2) + a_2 v sin(phi_2)

> solve({q1,q2},[u,v]);
      [[u = - (sin(phi_1) y a_1 - sin(phi_2) x a_2) / (a_2 (cos(phi_1) sin(phi_2) - sin(phi_1) cos(phi_2))) a_1, v = (y cos(phi_1) a_1 - a_2 x cos(phi_2)) / (a_2 (cos(phi_1) sin(phi_2) - sin(phi_1) cos(phi_2))) a_1]]

> uu:=simplify(sin(phi[1])*y*a[1]-sin(phi[2])*x*a[2]) /
(a[2]*(cos(phi[1])*sin(phi[2])-sin(phi[1])*cos(phi[2]))*a[1]);
      uu :=
      (sin(phi_1) y a_1 - sin(phi_2) x a_2) /
      (a_2 (sin(phi_2) cos(phi_1) - cos(phi_2) sin(phi_1))) a_1

> vv:=(y*cos(phi[1])*a[1]-a[2]*x*cos(phi[2])) /
(a[2]*(cos(phi[1])*sin(phi[2])-sin(phi[1])*cos(phi[2]))*a[1]);
```

```

vv :=
      y cos(φ1) a1 - a2 x cos(φ2)
      -----
      a2 (sin(φ2) cos(φ1) - cos(φ2) sin(φ1)) a1

> uuu:=(sin(phi[1])*y*a[1]-
sin(phi[2])*x*a[2])/(a[2]*sin(phi[2]-phi[1]));
      sin(φ1) y a1 - sin(φ2) x a2
      -----
      a2 sin(-φ2 + φ1)

> vvv:=(y*cos(phi[1])*a[1]-
a[2]*x*cos(phi[2]))/(a[2]*sin(phi[2]-phi[1]));
      y cos(φ1) a1 - a2 x cos(φ2)
      -----
      a2 sin(-φ2 + φ1)

> simplify(uuu^2+vvv^2);
      1
      -----
      a22 sin(-φ2 + φ1)2 (-2 cos(φ1) cos(φ2) x y a1 a2
      - 2 sin(φ1) sin(φ2) x y a1 a2 + x2 a22 + y2 a12)

```

Последнее выражение можно привести к виду

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - \frac{2xy}{a_1 a_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Таким образом, траектории представляют собой эллипс с центром в начале координат. Форма эллипса и то, как он развернут, зависит от разности фаз $\varphi_1 - \varphi_2$. Заметим, что по направлению осей эллипса можно определить разность фаз.

Пусть

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi n \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots),$$

тогда

$$\left(\frac{x}{a_1} - \frac{y}{a_2} \right)^2 = 0.$$

Если $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi n$ ($n = 3, 5, \dots$), то $\left(\frac{x}{a_1} + \frac{y}{a_2} \right)^2 = 0$. Последние уравне-

ния – это уравнения прямых, проходящих через начало координат. Таким образом, когда колебания совершаются с одинаковыми или с противоположными фазами, эллипс вырождается в отрезок прямой. В частном случае, когда $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm \pi / 2$, уравнение эллипса принимает вид

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1,$$

т.е. это эллипс с главными осями, направленными по осям x и y .

Вопросы для самопроверки

1. Какое колебание называется гармоническим?
2. Какое явление возникает при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами?
3. Какое явление возникает при сложении гармонических колебаний с несоизмеримыми периодами?
4. Как определяется почти период функции?
5. Какая функция называется почти периодической?

Задания для самостоятельной работы

1. Найти амплитуду и циклическую частоту для следующих сумм колебаний $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$. В математическом пакете построить график получившейся функции

- 1) $x_1(t) = 5\cos(18t)$; $x_2(t) = 12\sin(18t)$. 2) $x_1(t) = 3\cos(90t)$; $x_2(t) = 4\sin(90t)$.
- 3) $x_1(t) = 6\cos\left(\frac{20}{3}t\right)$; $x_2(t) = 2\sin\left(\frac{20}{3}t\right)$. 4) $x_1(t) = 7\cos\left(\frac{11}{5}t\right)$; $x_2(t) = 8\sin\left(\frac{11}{5}t\right)$.
- 5) $x_1(t) = 5\cos(25t)$; $x_2(t) = 3\sin(25t)$.

2. Записать уравнение результирующего колебания $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$. и найти угловую (циклическую) частоту биения. В математическом пакете изобразить график такого колебания.

- 1) а) $x_1(t) = 5\sin(18t)$; $x_2(t) = 5\sin(17t)$. б) $x_1(t) = 3\sin(4t)$; $x_2(t) = 3\sin(10t)$.
- 2) а) $x_1(t) = 6\sin(10t)$; $x_2(t) = 6\sin(9t)$. б) $x_1(t) = 4\sin(t)$; $x_2(t) = 4\sin(8t)$.
- 3) а) $x_1(t) = 9\sin(13t)$; $x_2(t) = 9\sin(11t)$. б) $x_1(t) = \sin(7t)$; $x_2(t) = \sin(40t)$.
- 4) а) $x_1(t) = 2\sin(19t)$; $x_2(t) = 2\sin(22t)$. б) $x_1(t) = 8\sin(4t)$; $x_2(t) = 8\sin(0.5t)$.
- 5) а) $x_1(t) = 2\sin(30t)$; $x_2(t) = 2\sin(34t)$. б) $x_1(t) = 4\sin(0.05t)$; $x_2(t) = 4\sin(0.35t)$.

3. В математическом пакете построить график кривой, заданной параметрически, являющейся результатом сложения двух колебаний, распространяющихся во взаимно перпендикулярных направлениях.
 $x(t) = a_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1)$, $y(t) = a_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2)$.

- 1) $x(t) = 5\cos\left(25t - \frac{\pi}{12}\right)$, $y(t) = 6\cos\left(20t - \frac{\pi}{6}\right)$.
- 2) $x(t) = 5\cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$, $y(t) = 6\cos\left(5t - \frac{\pi}{8}\right)$.
- 3) $x(t) = 4\cos\left(4t - \frac{\pi}{8}\right)$, $y(t) = 3\cos\left(4t - \frac{\pi}{12}\right)$.
- 4) $x(t) = 5\cos\left(10t - \frac{\pi}{8}\right)$, $y(t) = 2\cos(5t)$.
- 5) $x(t) = \cos\left(2t - \frac{2\pi}{3}\right)$, $y(t) = 2\cos\left(8t - \frac{\pi}{6}\right)$.

2. Применение рядов Фурье для нахождения периодических решений дифференциальных уравнений

В настоящее время в теории нелинейных колебаний обычно применяются следующие методы: метод малого параметра, метод перехода к интегральным уравнениям (метод функций Грина), метод представления периодических решений в виде ряда Фурье.

Рассмотрим нелинейную систему с одной степенью свободы, которая описывается дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + bx = f(t) + \mu F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \mu\right). \quad (1.1)$$

В уравнении (1.1) a, b – постоянные величины, $f(t)$ – непрерывная периодическая функция времени периода T , разлагающаяся в ряд Фурье. Найдем ряд Фурье периодического решения уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + bx = f(t) \quad (1.2)$$

в том случае, когда период функции $f(t)$ равен 2π . Проведём следующие вычисления (используется система компьютерной математики *Maple*). Запишем ряд Фурье функции $f(t)$:

```
f:=sum(a[n]*cos(n*t)+b[n]*sin(n*t),n=0..infinity);
```

$$f := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

Функцию $x(t)$ также будем искать в виде ряда Фурье с неизвестными коэффициентами x_n и y_n :

```
> xx:=sum(x[n]*cos(n*t)+y[n]*sin(n*t),n=0..infinity);
> x1:=diff(xx,t);
```

$$xx := \sum_{n=0}^{\infty} (x_n \cos(nt) + y_n \sin(nt))$$

$$x1 := \sum_{n=0}^{\infty} (-x_n n \sin(nt) + y_n n \cos(nt))$$

```
> x2:=diff(x1,t);
```

$$x2 := \sum_{n=0}^{\infty} (-x_n n^2 \cos(nt) - y_n n^2 \sin(nt))$$

Подставим выражения xx , $x1$, $x2$, f в уравнение (1.2) и приравняем коэффициенты при функциях $\cos nt$, $\sin nt$:

```
> F:=(x2+a*x1+b*xx-f);
```

$$F := a \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-x_n n \sin(nt) + y_n n \cos(nt)) \right) + b \left(\sum_{n=0}^{\infty} (x_n \cos(nt) + y_n \sin(nt)) \right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \right) + \sum_{n=0}^{\infty} (-x_n n^2 \cos(nt) - y_n n^2 \sin(nt))$$

> **g1:=(b-n^2)*x[n]+a*n*y[n]=a[n];**

> **g2:=-a*n*x[n] + (b-n^2)*y[n]=b[n];**

$$g1 := (-n^2 + b)x_n + a n y_n = a_n$$

$$g2 := -a n x_n + (-n^2 + b)y_n = b_n$$

> **FF:=simplify(solve({g1,g2},[x[n],y[n]]));**

$$FF := \left[\left[x_n = \frac{-a n b_n - n^2 a_n + b a_n}{n^4 + (a^2 - 2b)n^2 + b^2}, y_n = \frac{a n a_n - n^2 b_n + b b_n}{n^4 + (a^2 - 2b)n^2 + b^2} \right] \right]$$

Например, при $f(t) = \sin t$

> **subs(n=1, a[1]=0, b[1]=1, a=-5, b=6, FF);**

$$\left[\left[x_1 = \frac{1}{10}, y_1 = \frac{1}{10} \right] \right]$$

> **gg:=cos(t)/10+sin(t)/10;**

$$gg := \frac{\cos(t)}{10} + \frac{\sin(t)}{10}$$

Проверяем результат:

> **diff(gg,t\$2)-5*diff(gg,t)+6*gg;**

$$\sin(t)$$

Получим решение периодической краевой задачи для уравнения

$$x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = \sin t,$$

применяя библиотеку *Optimization*.

> **with(Optimization);**

[*ImportMPS, Interactive, LPSolve, LSSolve, Maximize, Minimize, NLPSolve, QPSolve*]

> **g1:=diff(x(t),t\$2)-5*diff(x(t),t)+6*x(t);**

$$g1 := \frac{d^2}{dt^2} x(t) - 5 \frac{d}{dt} x(t) + 6x(t)$$

Представим решение уравнения $g1 = \sin t$ в виде тригонометрического полинома

> **xx:=sum(a[n]*cos(n*t)+b[n]*sin(n*t), n=1..4);**

$$xx := a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t) + a_2 \cos(2t) + b_2 \sin(2t) + a_3 \cos(3t)$$

$$+ b_3 \sin(3t) + a_4 \cos(4t) + b_4 \sin(4t)$$

> **x1:=diff(xx,t);**

$$x1 := -a_1 \sin(t) + b_1 \cos(t) - 2a_2 \sin(2t) + 2b_2 \cos(2t) - 3a_3 \sin(3t)$$

$$+ 3b_3 \cos(3t) - 4a_4 \sin(4t) + 4b_4 \cos(4t)$$

> **x2:=diff(xx,t\$2);**

$$x2 := -a_1 \cos(t) - b_1 \sin(t) - 4a_2 \cos(2t) - 4b_2 \sin(2t) - 9a_3 \cos(3t) \\ - 9b_3 \sin(3t) - 16a_4 \cos(4t) - 16b_4 \sin(4t)$$

> gg:=simplify(x2-5*x1+6*xx-sin(t));

$$gg := (-80a_4 - 160b_4) \cos(t)^4 + ((-80b_4 + 160a_4) \sin(t) - 12a_3 - 60b_3) \cos(t)^3 + ((-12b_3 + 60a_3) \sin(t) + 4a_2 + 80a_4 - 20b_2 + 160b_4) \cos(t)^2 + ((4b_2 + 40b_4 + 20a_2 - 80a_4) \sin(t) + 5a_1 + 9a_3 - 5b_1 + 45b_3) \cos(t) + (5b_1 + 3b_3 + 5a_1 - 15a_3 - 1) \sin(t) \\ - 2a_2 - 10a_4 + 10b_2 - 20b_4$$

Запишем интеграл от квадрата разности gg^2 :

> gi:=int(gg^2, t=0..2*Pi);

$$gi := 50a_1^2\pi + 104a_2^2\pi + 234a_3^2\pi + 500a_4^2\pi + 50b_1^2\pi + 104b_2^2\pi + 234b_3^2\pi \\ + 500b_4^2\pi - 10a_1\pi - 10b_1\pi + \pi$$

> F:=Minimize(gi);

$$F := \left[1.10^{-14}, [a_1 = 0.09999999999999997, a_2 = 0., a_3 = 0., a_4 = 0., b_1 = 0.09999999999999997, b_2 = 0., b_3 = 0., b_4 = 0.] \right]$$

Это означает, что периодическое решение имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{10} \cos t + \frac{1}{10} \sin t.$$

Далее рассмотрим уравнение Дюффинга

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = \lambda \sin t + \mu x^3.$$

> restart; g:=diff(x(t), t\$2)+ 5*x(t)= sin(t)+ x(t)^3;

$$g := \frac{d^2}{dt^2} x(t) + 5x(t) = \sin(t) + x(t)^3$$

> xx:=x0+sum(x[n]*cos(n*t)+y[n]*sin(n*t), n=1..3);

$$xx := x0 + x_1 \cos(t) + y_1 \sin(t) + x_2 \cos(2t) + y_2 \sin(2t) + x_3 \cos(3t) + y_3 \sin(3t)$$

> x2:=diff(xx, t\$2);

$$x2 := -x_1 \cos(t) - y_1 \sin(t) - 4x_2 \cos(2t) - 4y_2 \sin(2t) - 9x_3 \cos(3t) - 9y_3 \sin(3t)$$

> gg:=(x2+5*xx-sin(t)-0.5*xx^3)^2;

$$gg := (4x_1 \cos(t) + 4y_1 \sin(t) + x_2 \cos(2t) + y_2 \sin(2t) - 4x_3 \cos(3t) - 4y_3 \sin(3t) \\ + 5x0 - \sin(t) - 0.5(x0 + x_1 \cos(t) + y_1 \sin(t) + x_2 \cos(2t) + y_2 \sin(2t) \\ + x_3 \cos(3t) + y_3 \sin(3t))^3)^2$$

> ff:=evalf[7](int(gg, t=0..2*Pi));

> with(Optimization):

> Minimize(ff);

$$\begin{aligned}
& \left[4.92489917736094185 \cdot 10^{-7}, \left[x_0 = -2.24076435737499 \cdot 10^{-9}, x_1 \right. \right. \\
& \quad = -9.44200936254222 \cdot 10^{-10}, x_2 = 1.72613315408705 \cdot 10^{-7}, x_3 \\
& \quad = -2.55181869737327 \cdot 10^{-11}, y_1 = 0.251488260323684, y_2 = 2.10544055499826 \cdot 10^{-7}, \\
& \quad \left. \left. y_3 = 0.000491242006552125 \right] \right]
\end{aligned}$$

Следует отметить, что даже в предыдущем (сравнительно простом) примере при $n = 4$ пакет *Optimization* к результату не приводит, поэтому наиболее эффективным методом численно-аналитического решения периодических краевых задач является метод перехода к интегральному оператору, ядром которого является функция Грина. Этот метод будет подробно рассмотрен в следующих лекциях.

Задания для самостоятельной работы

Найти периодическое решение линейного дифференциального уравнения

$$1. \ddot{x}(t) - 7\dot{x}(t) + 12x(t) = \sin 2t.$$

$$2. \ddot{x}(t) - 8\dot{x}(t) + 15x(t) = 2\sin 3t.$$

$$3. \ddot{x}(t) - 8\dot{x}(t) + 12x(t) = 3\cos 2t.$$

$$4. \ddot{x}(t) - 12\dot{x}(t) + 27x(t) = 5\sin 2t.$$

$$5. \ddot{x}(t) - 11\dot{x}(t) + 10x(t) = 7\sin 2t.$$

3. Метод функций Грина

3.1 Периодические решения уравнения первого порядка

Перейдем далее к изучению T -периодических решений линейных дифференциальных уравнений вида

$$\mathbf{L}x := x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x^{(1)} + a_0x = f(t) \quad (3.1.1)$$

с постоянными комплексными коэффициентами $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ и непрерывной T -периодической комплекснозначной функцией f . Выясним прежде всего условия существования единственного T -периодического решения уравнения первого порядка

$$\dot{x} = \lambda x + f(t) \quad (3.1.2)$$

при любой функции f , принадлежащей пространству $\mathbf{B}_T$ всех непрерывных комплекснозначных T -периодических функций, определенных на числовой прямой $\mathbb{R}$. Через ρ обозначим множество комплексных чисел вида

$$\frac{2k\pi i}{T}, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Л е м м а 1. Если $\lambda \notin \rho$, то уравнение (3.1.2) при любой $f \in \mathbf{B}_T$ имеет единственное решение $\varphi \in \mathbf{B}_T$. Это решение φ имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{1}{1 - e^{\lambda T}} \int_0^T e^{\lambda s} f(t - s) ds. \quad (3.1.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В равенстве

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} c + \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds, \quad (3.1.4)$$

дающем общее решение уравнения (3.1.2), найдем постоянную c из условия T – периодичности интересующего нас решения φ :

$$c = e^{\lambda T} c + \int_0^T e^{\lambda(T-s)} f(s) ds,$$

т.е.

$$c = \frac{1}{1 - e^{\lambda T}} \int_0^T e^{\lambda(T-s)} f(s) ds.$$

Подставляя найденное значение c в равенство (3.1.4), получаем

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{e^{\lambda t}}{1 - e^{\lambda T}} \int_0^T e^{\lambda(T-s)} f(s) ds + \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds = \\ &= \frac{e^{\lambda T}}{1 - e^{\lambda T}} \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds + \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds + \frac{e^{\lambda T}}{1 - e^{\lambda T}} \int_t^T e^{\lambda(t-s)} f(s) ds = \\ &= \frac{1}{1 - e^{\lambda T}} \left[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds + \int_t^T e^{\lambda(T+t-s)} f(s) ds \right]. \end{aligned}$$

Сделав в первом интеграле замену $t - s = \tau$, а во втором $T + t - s = \tau$, получим

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{1 - e^{\lambda T}} \left[- \int_t^0 e^{\lambda \tau} f(t - \tau) d\tau - \int_T^t e^{\lambda \tau} f(t + T - \tau) d\tau \right] = \\ &= \frac{1}{1 - e^{\lambda T}} \left[\int_0^t e^{\lambda \tau} f(t - \tau) d\tau + \int_t^T e^{\lambda \tau} f(t - \tau) d\tau \right] = \frac{1}{1 - e^{\lambda T}} \int_0^T e^{\lambda s} f(t - s) ds, \end{aligned}$$

что совпадает с равенством (3.1.3).

Л е м м а 2. Если уравнение (3.1.2) при любой функции $f \in \mathbf{B}_T$ имеет единственное решение $\varphi \in \mathbf{B}_T$, то число $\lambda \notin \sigma$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположив противное, получаем, что уравнение

$$\dot{x} = \frac{2k\pi i}{T} x$$

имеет целое семейство T – периодических решений

$$\varphi(t) = e^{\frac{2k\pi i}{T}t} c = \left(\cos \frac{2k\pi}{T}t + i \sin \frac{2k\pi}{T}t \right) c.$$

Далее заметим, что правая часть равенства (3.1.3) представляет собой интегральный оператор вида

$$(Af)(t) = \int_0^t k(s) f(t-s) ds. \quad (3.1.5)$$

Введем в пространстве $\mathbf{B}_T$ supremum – норму.

Л е м м а 3. Пусть $k:[0, T] \rightarrow R$ – непрерывная функция. Тогда интегральный оператор A , определенный равенством (3.1.5), действует в банаховом пространстве $\mathbf{B}_T$ и является линейным ограниченным оператором, причем

$$\|A\| = \int_0^T |k(s)| ds := k_*. \quad (3.1.6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Тот факт, что оператор A действует в пространстве $\mathbf{B}_T$, очевиден. Далее из неравенства

$$|(Af)(t)| \leq \int_0^T |k(s)| ds \|f\|$$

получаем, что $\|A\| \leq k_*$. Заметим, что функция $\operatorname{sgn} k(s)$ измерима, так как множества $\{s: \operatorname{sgn} k(s) < c\}$ измеримы при любом c . Например, при $c > 1$ множество $\{s: \operatorname{sgn} k(s) < c\}$ является отрезком $[0, T]$; при $c = 1$ множество $\{s: \operatorname{sgn} k(s) < 1\}$ совпадает с множеством тех значений s , для которых $k(s) \leq 0$, т.е. является замкнутым множеством и т.д.

По теореме Лузина для любого $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная на $[-T + \varepsilon, -\varepsilon]$ функция φ_ε , что

$$\operatorname{mes}\{s: \operatorname{sgn} k(s) \neq \varphi_\varepsilon(-s)\} < \varepsilon$$

Очевидно, функцию φ_ε можно расширить на отрезок $[0, T]$ так, чтобы выполнялось равенство $\varphi_\varepsilon(0) = \varphi_\varepsilon(-T)$, т.е. чтобы $\varphi_\varepsilon(-s)$ стала непрерывной периодической функцией, при этом, очевидно, что $\|\varphi_\varepsilon\| = 1$.

Пусть $M(\varepsilon) = \{s: \operatorname{sgn} k(s) \neq \varphi_\varepsilon(-s)\}$, а $CM(s)$ – дополнение множества $M(\varepsilon)$, тогда

$$\begin{aligned}
(A\varphi_\varepsilon)(0) &= \int_0^T k(s)\varphi_\varepsilon(-s)ds = \\
&= \int_0^T k(s)\operatorname{sgn} k(s)ds + \int_0^T k(s)[\varphi_\varepsilon(-s) - \operatorname{sgn} k(s)]ds = \\
&= \int_0^T |k(s)|ds + \int_0^\varepsilon k(s)[\varphi_\varepsilon(-s) - \operatorname{sgn} k(s)]ds + \int_{T-\varepsilon}^T k(s)[\varphi_\varepsilon(-s) - \operatorname{sgn} k(s)]ds + \\
&+ \int_{M(\varepsilon) \cap [\varepsilon, T-\varepsilon]} k(s)[\varphi_\varepsilon(-s) - \operatorname{sgn} k(s)]ds + \int_{CM(\varepsilon) \cap [\varepsilon, T-\varepsilon]} k(s)[\varphi_\varepsilon(-s) - \operatorname{sgn} k(s)]ds \geq \\
&\geq k_* - 2\varepsilon\|k\| - 2\varepsilon\|k\| - 2\varepsilon\|k\| = k_* - 6\varepsilon\|k\|,
\end{aligned}$$

т.е.

$$\|T\varphi_\varepsilon\| \geq (k_* - 6\varepsilon\|k\|)\|\varphi_\varepsilon\|,$$

что вместе с неравенством $\|T\| \leq k_*$ дает равенство (3.1.6).

Теорема доказана.

Дифференциальный оператор $\mathbf{L}$, определяемый левой частью уравнения (3.1.1), называется *регулярным*, если уравнение (3.1.1) имеет единственное решение $\varphi \in \mathbf{B}_T$ при любой правой части $f \in \mathbf{B}_T$.

Т е о р е м а 1. Пусть множество $\sigma(\mathbf{L})$ всех корней соответствующего характеристического многочлена не пересекается с множеством ρ , тогда оператор $\mathbf{L}$ регулярен.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (3.1.1) можно представить в виде

$$\left[\prod_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{d}{dt} - \lambda_j \right) \right] x(t) = f(t), \quad (3.1.7)$$

где λ_j ($1 \leq j \leq n$) — корни характеристического многочлена, после чего регулярность оператора $\mathbf{L}$ будет вытекать из регулярности операторов

$$\mathbf{L}_j = \frac{d}{dt} - \lambda_j \quad (1 \leq j \leq n). \quad (3.1.8)$$

Теорема доказана.

Вопросы для самопроверки

1. Какое дифференциальное уравнение называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка?
2. Какой вид имеют условия существования единственного T – периодического решения уравнения первого порядка?
3. Запишите вид периодического решения дифференциального уравнения первого порядка в интегральной форме.

4. Какое множество называется банаховым пространством?
5. Какой оператор называется линейным оператором?

3.2 Построение функции Грина T – периодической краевой задачи

Вернемся к равенству (3.1.3) из прошлой лекции, дающему явный вид периодического решения

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \int_0^T G_1(\lambda, s) f(t-s) ds, \\ \varphi(t) &= \int_0^T G_1(\lambda, s) f(t-s) ds,\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

где

$$G_1(\lambda, s) = \frac{e^{\lambda s}}{1 - e^{\lambda T}}.\tag{3.2.2}$$

Функция $G_1(\lambda, s)$ называется функцией Грина T – периодической краевой задачи. Покажем, что функция Грина T – периодической краевой задачи для уравнения второго порядка

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t)\tag{3.2.3}$$

является разделенной разностью первого порядка функции $G_1(\lambda, s)$, построенной по корням характеристического уравнения λ_1 и λ_2 . Пусть, например, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Рассмотрим выражение

$$\varphi(t) = \int_0^T \frac{G_1(\lambda_1, s) - G_1(\lambda_2, s)}{\lambda_1 - \lambda_2} f(t-s) ds.\tag{3.2.4}$$

Проведем некоторые преобразования над интегралом, расположенным в правой части равенства (3.2.4):

$$\begin{aligned}& \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_0^T \left(\frac{e^{\lambda_1 s}}{1 - e^{\lambda_1 T}} - \frac{e^{\lambda_2 s}}{1 - e^{\lambda_2 T}} \right) f(t-s) ds = \\&= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_0^t \left(\frac{e^{\lambda_1 s}}{1 - e^{\lambda_1 T}} - \frac{e^{\lambda_2 s}}{1 - e^{\lambda_2 T}} \right) f(t-s) ds + \\&+ \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_t^T \left(\frac{e^{\lambda_1 s}}{1 - e^{\lambda_1 T}} - \frac{e^{\lambda_2 s}}{1 - e^{\lambda_2 T}} \right) f(t-s) ds = \\&= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_0^t \left(\frac{e^{\lambda_1(t-\tau)}}{1 - e^{\lambda_1 T}} - \frac{e^{\lambda_2(t-\tau)}}{1 - e^{\lambda_2 T}} \right) f(\tau) d\tau + \\&+ \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_t^T \left(\frac{e^{\lambda_1(t+T-\tau)}}{1 - e^{\lambda_1 T}} - \frac{e^{\lambda_2(t+T-\tau)}}{1 - e^{\lambda_2 T}} \right) f(\tau) d\tau.\end{aligned}$$

Покажем, что функция $\varphi(t)$ является периодическим решением уравнения (3.2.3). Действительно,

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(t) &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_0^t \left(\frac{\lambda_1 e^{\lambda_1(t-\tau)}}{1 - e^{\lambda_1 T}} - \frac{\lambda_2 e^{\lambda_2(t-\tau)}}{1 - e^{\lambda_2 T}} \right) f(\tau) d\tau + \\ &+ \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_t^T \left(\frac{\lambda_1 e^{\lambda_1(t+T-\tau)}}{1 - e^{\lambda_1 T}} - \frac{\lambda_2 e^{\lambda_2(t+T-\tau)}}{1 - e^{\lambda_2 T}} \right) f(\tau) d\tau, \\ \ddot{\varphi}(t) &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_0^t \left(\frac{\lambda_1^2 e^{\lambda_1(t-\tau)}}{1 - e^{\lambda_1 T}} - \frac{\lambda_2^2 e^{\lambda_2(t-\tau)}}{1 - e^{\lambda_2 T}} \right) f(\tau) d\tau + \\ &+ \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_t^T \left(\frac{\lambda_1^2 e^{\lambda_1(t+T-\tau)}}{1 - e^{\lambda_1 T}} - \frac{\lambda_2^2 e^{\lambda_2(t+T-\tau)}}{1 - e^{\lambda_2 T}} \right) f(\tau) d\tau + f(t).\end{aligned}$$

Подставив полученные выражения для $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$, $\ddot{\varphi}(t)$ в уравнение (3.2.3), получим требуемый результат.

Пусть далее $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\gamma$ — корни характеристического многочлена уравнения (3.1.1) с кратностями $p_1, p_2, \dots, p_\gamma$ ($p_1 + p_2 + \dots + p_\gamma = n$).

Т е о р е м а 2. Функции Грина $G_n(s)$ T -периодической краевой задачи для уравнения (3.1.1) имеет вид:

$$G_n(s) = \sum_{k=1}^{\gamma} \sum_{m=0}^{p_k-1} \frac{g_{s,1}^{(p_k-m-1)}(\lambda_k)}{m!(p_k-m-1)!} \cdot \frac{d^m}{dz^m} \left[\frac{(z-\lambda_k)^{p_k}}{q(z)} \right] \Big|_{z=\lambda_k}, \quad (3.2.5)$$

где

$$G_1(\lambda, s) = g_{s,1}(\lambda) = \frac{e^{\lambda s}}{1 - e^{\lambda T}}, \quad q(z) = (z - z_1)^{p_1} (z - z_2)^{p_2} \cdot \dots \cdot (z - \lambda_\gamma)^{p_\gamma}, \quad (3.2.6)$$

т.е. является разделенной разностью $n-1$ -го порядка функции $g_{s,1}(\lambda)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $G_n(s)$, которая является решением однородного уравнения (2.1) и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned}G_n(0) - G_n(T) &= 0, \quad G_n^{(1)}(0) - G_n^{(1)}(T) = 0, \dots, \\ G_n^{(n-2)}(0) - G_n^{(n-2)}(T) &= 0, \quad G_n^{(n-1)}(0) - G_n^{(n-1)}(T) = 1,\end{aligned} \quad (3.2.7)$$

является требуемой функцией Грина. Доказательство этого факта аналогично проведенному для уравнения второго порядка. Покажем, что функция $G_n(s)$, определенная равенством (3.2.5), удовлетворяет условиям (3.2.7). Действительно,

$$G_n^{(\mu)}(0) = \sum_{k=0}^{\gamma} \sum_{m=0}^{p_k-1} \frac{1}{m!(p_k-m-1)!} \left(\frac{\lambda^\mu}{1 - e^{\lambda T}} \right)^{(p_k-m-1)} \Big|_{\lambda=\lambda_k} \cdot \frac{d^m}{dz^m} \left[\frac{(z-\lambda_k)^{p_k}}{q(z)} \right] \Big|_{z=\lambda_k};$$

$$\begin{aligned}
G_n^{(\mu)}(T) &= \sum_{k=0}^{\gamma} \sum_{m=0}^{p_k-1} \frac{1}{m!(p_k-m-1)!} \left(\frac{\lambda^\mu}{1-e^{\lambda T}} - \lambda^\mu \right)^{(p_k-m-1)} \Big|_{\lambda=\lambda_k} \cdot \frac{d^m}{dz^m} \left[\frac{(z-\lambda_k)^{p_k}}{q(z)} \right] \Big|_{z=\lambda_k} = \\
&= \sum_{k=0}^{\gamma} \sum_{m=0}^{p_k-1} \frac{1}{m!(p_k-m-1)!} \left(\frac{\lambda^\mu}{1-e^{\lambda T}} \right)^{(p_k-m-1)} \Big|_{\lambda=\lambda_k} \cdot \frac{d^m}{dz^m} \left[\frac{(z-\lambda_k)^{p_k}}{q(z)} \right] \Big|_{z=\lambda_k} - \\
&\quad - \sum_{k=0}^{\gamma} \sum_{m=0}^{p_k-1} \frac{1}{m!(p_k-m-1)!} (\lambda^\mu)^{(p_k-m-1)} \Big|_{\lambda=\lambda_k} \cdot \frac{d^m}{dz^m} \left[\frac{(z-\lambda_k)^{p_k}}{q(z)} \right] \Big|_{z=\lambda_k}.
\end{aligned}$$

Выражение, расположенное перед знаком «минус», является значением $G_n^{(\mu)}(0)$, а выражение со знаком «минус» является разделённой разностью $(m-1)$ -го порядка функции λ^μ и, следовательно, равно нулю при $0 \leq \mu \leq n-2$, и равно единице при $\mu = n-1$. Таким образом, условия (3.2.7) выполнены.

Тот факт, что функция Грина является разделённой разностью, позволяет в ряде случаев устанавливать ее неотрицательность. Рассмотрим выражение

$$g_{s,k}(\lambda) := \frac{e^{\lambda s}}{(1-e^{\lambda T})^k}. \quad (3.2.8)$$

Л е м м а. Справедливо равенство

$$g_{s,k}^{(n)}(\lambda) = \sum_{0 \leq j \leq n} c_j g_{s+jT, k+n}(\lambda) \quad (3.2.9)$$

с неотрицательными коэффициентами c_j , где $g_{s,k}^{(n)}(\lambda)$ — n -я производная функции $g_{s,k}(\lambda)$ по переменной λ .

Доказательство проведем по индукции. При $n=1$ имеем

$$\begin{aligned}
g_{s,k}^{(1)}(\lambda) &= \frac{1}{(1-e^{\lambda T})^{2k}} \left[s e^{\lambda s} (1-e^{\lambda T})^k - k e^{\lambda s} (1-e^{\lambda T})^{k-1} (-T e^{\lambda T}) \right] = \\
&= \frac{s(e^{\lambda s} - e^{\lambda s} e^{\lambda T})}{(1-e^{\lambda T})^{k+1}} + \frac{k T e^{\lambda(s+T)}}{(1-e^{\lambda T})^{k+1}} = s g_{s,k+1} + (kT-s) g_{s+T, k+1}(\lambda).
\end{aligned}$$

Проведем шаг индукции; предположив справедливость равенства (3.2.9), получаем

$$\begin{aligned}
g_{s,k}^{(n+1)}(\lambda) &= \sum_{j=0}^{j=n} c_j(n) \left\{ (s+jT) g_{s+jT, k+n+1}(\lambda) + [(k+n-j)T-s] g_{s+(j+1)T, k+n+1}(\lambda) \right\} = \\
&= \sum_{j=0}^{j=n} c_j(n) (s+jT) g_{s+jT, k+n+1}(\lambda) + \sum_{j=0}^{j=n} c_j(n) [(k+n-j)T-s] g_{s+(j+1)T, k+n+1}(\lambda) = \\
&= c_0(n) s g_{s, k+n+1} + \sum_{j=0}^{j=n} \left\{ c_j(n) (s+jT) + c_{j-1}(n) [(k+n-j+1)T-s] \right\} g_{s+jT, k+n+1} +
\end{aligned}$$

$$+c_n(n)(kT-s)g_{s+(n+1)T, k+n+1}(\lambda) = \sum_{j=0}^{j=n+1} c_j(n+1)g_{s+jT, k+n+1}(\lambda).$$

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0, \quad (3.2.10)$$

соответствующее дифференциальному уравнению (3.1.1).

Т е о р е м а 3. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\gamma$ – корни характеристического уравнения (3.2.10) с кратностями $p_1, p_2, \dots, p_\gamma$ ($p_1 + p_2 + \dots + p_\gamma = n$). Тогда

- a) если $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_\gamma < 0$, то функция Грина $G_n(s)$ неотрицательна;
- b) если $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_\gamma$ и n четное, то функция Грина неотрицательна;
- c) если $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_\gamma$ и n нечетно, то функция Грина неположительна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как функция Грина является разделенной разностью $n-1$ -го порядка функции $g_{s,1}(\lambda)$ (и в соответствии с известным представлением для разделенной разности)

$$G_n(s) = \frac{g_{s,1}^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}, \quad \xi \in [\lambda_1, \lambda_2],$$

то из равенства (3.9) вытекает требуемый результат.

Действительно, функции $g_{s+jT, k+n}(\xi)$ положительны при $\xi > 0$ и любом $k+n$ и при $\xi > 0$ и $k+n$ четном и отрицательны при $\xi > 0$ и $k+n$ нечетном.

Приведем примеры функций Грина в конкретных случаях. Для дифференциального уравнения третьего порядка

$$G_3(s) = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} \cdot \frac{e^{\lambda_1 s}}{1 - e^{\lambda_1 T}} + \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} \cdot \frac{e^{\lambda_2 s}}{1 - e^{\lambda_2 T}} + \frac{1}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} \cdot \frac{e^{\lambda_3 s}}{1 - e^{\lambda_3 T}}.$$

Например, при $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5$ получим для $T = 2\pi$

$$\frac{e^s}{8(1 - e^{2\pi})} - \frac{e^{3s}}{4(1 - e^{6\pi})} + \frac{e^{5s}}{8(1 - e^{10\pi})}.$$

График этой функции имеет вид

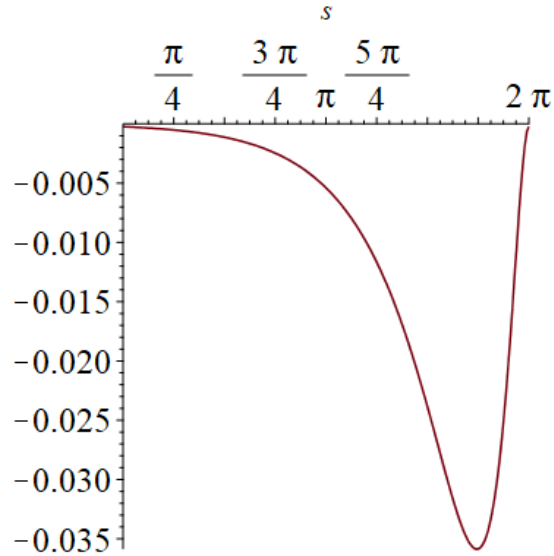


Рис. 7. – График функции Грина
для конкретного дифференциального уравнения третьего порядка

Находим по формуле

$$\varphi(t) = \int_0^T G_3(s) \sin(t-s) ds$$

решение дифференциального уравнения

$$\left(\frac{d}{dt} - 1\right) \left(\frac{d}{dt} - 3\right) \left(\frac{d}{dt} - 5\right) x(t) = \sin t.$$

Получаем

$$\varphi(t) = -\frac{3\sin t}{260} - \frac{11\cos t}{260}.$$

Можно было бы поступить следующим образом: перейти к уравнению

$$\left(\frac{d}{dt} - 3\right) \left(\frac{d}{dt} - 5\right) x(t) = \left(\frac{d}{dt} - 1\right)^{-1} \sin t.$$

т.е. к уравнению

$$\left(\frac{d}{dt} - 3\right) \left(\frac{d}{dt} - 5\right) x(t) = -\frac{\cos t}{2} - \frac{\sin t}{2}.$$

После чего перейти к уравнению

$$\left(\frac{d}{dt} - 5\right) x(t) = \left(\frac{d}{dt} - 3\right) \left(-\frac{\cos t}{2} - \frac{\sin t}{2}\right),$$

т.е.

$$\left(\frac{d}{dt} - 5\right) x(t) = \frac{\cos t}{5} + \frac{\sin t}{10}.$$

Наконец,

$$\varphi(t) = \left(\frac{d}{dt} - 5 \right)^{-1} \left(\frac{\cos t}{5} + \frac{\sin t}{10} \right) = -\frac{11 \cos t}{260} - \frac{3 \sin t}{260}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Какая функция называется функцией Грина Т-периодической краевой задачи?
2. Как определяется разделенная разность первого порядка?
3. Как определяется разделенная разность произвольного порядка?
4. Какой вид имеет функция Грина для дифференциального уравнения второго порядка?
5. Каким образом можно представить дифференциальный оператор произвольного порядка в виде произведения дифференциальных операторов первого порядка?

Задания для самостоятельной работы

При помощи метода функций Грина найти T – периодическое решение дифференциального уравнений.

- 1) $\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = \sin(t)\cos(t);$
- 2) $\ddot{x} - 2\dot{x} - 15x = 2\cos(3t);$
- 3) $\ddot{x} + 7\dot{x} + 6x = 4\cos^3 t - 3\cos t;$
- 4) $\ddot{x} - 12\dot{x} + 32x = 3\sin t - 4\sin^3 t;$
- 5) $\ddot{x} - 8\dot{x} - 20x = 9\cos(4t).$

4. О спектральной оптимизации интеграла от модуля функции Грина

Поставим следующую задачу: выяснить зависимость интеграла от модуля функции Грина для уравнения

$$x'(t) = (a + bi)x(t) + f(t).$$

С помощью математического пакета *Maple* это можно сделать следующим образом:

```
> assume(s>0, T>0, a,real, b,real);
> g1:=(exp(a*s))*exp(I*b*s);
      g1 := e^{a~s~} e^{I b~s~}
> g2:=1-(exp(a*T))*exp(I*b*T);
      g2 := 1 - e^{a~T~} e^{I b~T~}
> g:=simplify(g1/g2);
```

$$g := - \frac{e^{s\sim} (I b\sim + a\sim)}{e^{T\sim} (I b\sim + a\sim) - 1}$$

```

> gr:=Re(g) ; gi:=Im(g) ;
gr := - \frac{e^{a\sim s\sim} (\cos(b\sim T\sim) \cos(b\sim s\sim) e^{a\sim T\sim} + e^{a\sim T\sim} \sin(b\sim T\sim) \sin(b\sim s\sim) - \cos(b\sim s\sim))}{\cos(b\sim T\sim)^2 (e^{a\sim T\sim})^2 + (e^{a\sim T\sim})^2 \sin(b\sim T\sim)^2 - 2 e^{a\sim T\sim} \cos(b\sim T\sim) + 1}
gi := - \frac{e^{a\sim s\sim} (\cos(b\sim T\sim) \sin(b\sim s\sim) e^{a\sim T\sim} - e^{a\sim T\sim} \sin(b\sim T\sim) \cos(b\sim s\sim) - \sin(b\sim s\sim))}{\cos(b\sim T\sim)^2 (e^{a\sim T\sim})^2 + (e^{a\sim T\sim})^2 \sin(b\sim T\sim)^2 - 2 e^{a\sim T\sim} \cos(b\sim T\sim) + 1}
> ga:=simplify(abs(g)) ;
ga := \frac{e^{a\sim s\sim}}{\sqrt{e^{2 a\sim T\sim} - 2 e^{a\sim T\sim} \cos(b\sim T\sim) + 1}}
> qq:=int(ga,s=0..T) ;
qq := \frac{e^{a\sim T\sim} - 1}{a\sim \sqrt{e^{2 a\sim T\sim} - 2 e^{a\sim T\sim} \cos(b\sim T\sim) + 1}}
> qqa:=simplify(factor(diff(qq,a))) :
> qqan1:=evalf[7](subs(a=2,b=1,T=6,qq)) ;
qqan1 := 0.5000000
> qqan2:=evalf[7](subs(a=1,b=1,T=6,qq)) ;
qqan2 := 0.9999008
> qqan3:=evalf[7](subs(a=0.2,b=1,T=6,qq)) ;
qqan3 := 4.881516
> qqan4:=evalf[7](subs(a=-2,b=1,T=6,qq)) ;
qqan4 := 0.5000000
> qqan5:=evalf[7](subs(a=-4,b=1,T=6,qq)) ;
qqan5 := 0.2500000
> qqan6:=evalf[7](subs(a=-4,b=0,T=6,qq)) ;
qqan6 := 0.2500000
> qqan7:=evalf[7](subs(a=-7,b=1,T=6,qq)) ;
qqan7 := 0.1428571
> qqan8:=evalf[7](subs(a=-7,b=1,T=16,qq)) ;
qqan8 := 0.1428571

```

Таким образом,

$$\int_0^T |G(s)| ds = \frac{e^{aT} - 1}{a [e^{2aT} - 2e^{aT} \cos(bT) + 1]}.$$

Эта формула позволяет решать некоторые задачи управления колебаниями. Например, минимизировать данное выражение в области изменения параметров a, b, T , проведя численный эксперимент.

Далее рассмотрим аналогичную задачу для уравнения второго порядка

$$x''(t) + c_1 x'(t) + c_2 x(t) = f(t).$$

Проведем следующие преобразования. Пусть $a+bi$, $a-bi$ – корни характеристического уравнения, тогда

```

> assume(s>0, T>0, a,real, b,real);
> g1:=exp((a+b*I)*s);

$$g1 := e^{(a+Ib)s}$$

> g2:=exp((a-I*b)*s);

$$g2 := e^{(a-Ib)s}$$

> g3:=1-exp((a+b*I)*T);

$$g3 := 1 - e^{(a+Ib)T}$$

> g4:=1-exp((a-b*I)*T);

$$g4 := 1 - e^{(a-Ib)T}$$

> g5:=2*b*I;

$$g5 := 2Ib$$

> gg:=(1/g5)*(g1/g3-g2/g4);

$$gg := \frac{-\frac{1}{2} \left( \frac{e^{(a+Ib)s}}{1 - e^{(a+Ib)T}} - \frac{e^{(a-Ib)s}}{1 - e^{(a-Ib)T}} \right)}{b}$$

> gr:=factor(simplify(Re(gg)));

$$gr := \frac{e^{a\tilde{s}} (\cos(b\tilde{s}) e^{T\tilde{a}} \sin(T\tilde{b}) - \sin(b\tilde{s}) \cos(T\tilde{b}) e^{T\tilde{a}} + \sin(b\tilde{s}))}{b\tilde{ } (-2 e^{T\tilde{a}} \cos(T\tilde{b}) + e^{2T\tilde{a}} + 1)}$$

> gi:=simplify(Im(gg));

$$gi := 0$$

> ggg:=sqrt(simplify(gr^2+gi^2));

$$ggg := \sqrt{\frac{e^{2a\tilde{s}} (\cos(b\tilde{s}) e^{T\tilde{a}} \sin(T\tilde{b}) - \sin(b\tilde{s}) \cos(T\tilde{b}) e^{T\tilde{a}} + \sin(b\tilde{s}))^2}{b\tilde{ }^2 (-2 e^{T\tilde{a}} \cos(T\tilde{b}) + e^{2T\tilde{a}} + 1)^2}}$$

> Gn:=factor(simplify(int(gr,s=0..T)));

$$Gn := \frac{1}{a\tilde{ }^2 + b\tilde{ }^2}$$

> Gn1:=subs(a=1, b=2, Gn);

$$Gn1 := \frac{1}{5}$$

> Gnn:=factor(simplify(int(abs(gr),s=0..T)));

$$Gnn := -\frac{\text{signum}(\sin(T\tilde{b})) \text{signum}(b\tilde{ }) \text{signum}(2 e^{T\tilde{a}} \cos(T\tilde{b}) - e^{2T\tilde{a}} - 1)}{a\tilde{ }^2 + b\tilde{ }^2}$$

> qm:=evalf[7](subs(a=1, b=1, T=7, Gnn));

$$qm := 0.5000000$$

> gr1:=evalf[7](subs(a=1,b=16,T=7,gr));

```

```
gr1 := 5.201376 10-8 es~ ( -975.9985 cos(16. s~) - 499.0308 sin(16. s~) )
> q:=plot(gr1,s=0..7);
```

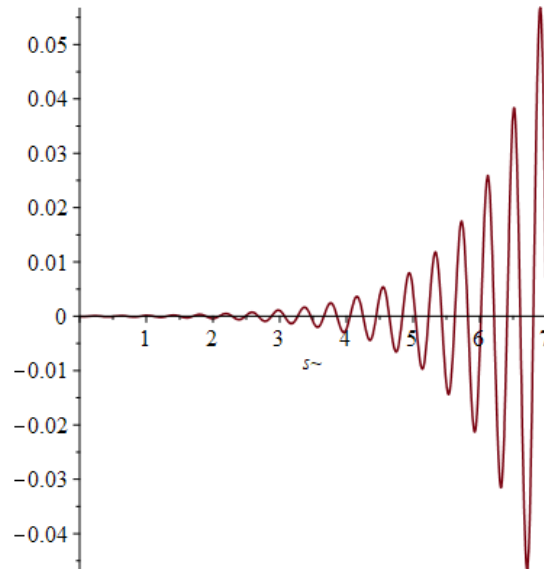


Рис. 8. – Визуализация № 1 результатов вычислений в *Maple*

```
> q:=plot(abs(gr1),s=0..7);
```

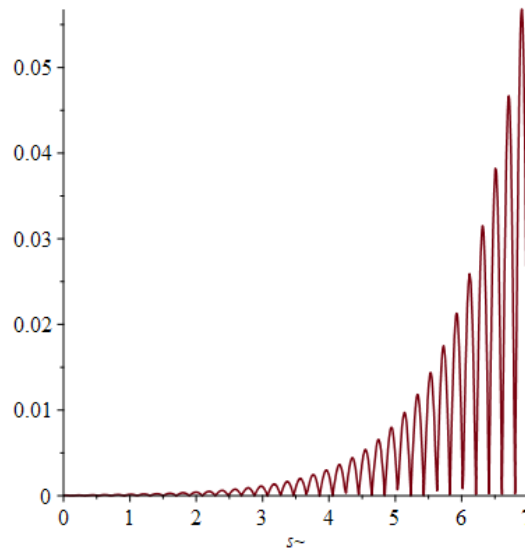


Рис. 9. – Визуализация № 2 результатов вычислений в *Maple*

5. Матричные функции Грина

Пусть R – вещественная прямая, Z и σ – соответственно множества целых чисел и чисел вида

$$\left\{ \frac{2k\pi i}{T}, k \in Z \right\},$$

$\mathbf{B}_T$ - банахово пространство определенных на R непрерывных T – периодических функций с *supremum*-нормой $\|\cdot\|$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f_1(t), \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2(t) \end{cases} \quad (5.1)$$

с постоянными коэффициентами $a_{jk} (j, k=1, 2)$ и функциями $f_j (j=1, 2)$ из $\mathbf{B}_T$. Если положить

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix},$$

то систему (5.1) можно записать в виде одного векторного уравнения

$$\dot{x} = Ax + f(t). \quad (5.2)$$

Известно ([3]), что если спектр $s(A)$ матрицы A не пересекается с множеством σ , то при любой T – периодической векторной функции f уравнение (5.2) (или, что то же самое, система (5.1)) имеет единственное T – периодическое решение φ .

Т е о р е м а 4. Пусть $s(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ и $s(A) \cap \sigma = \emptyset$. Тогда единственное T – периодическое решение φ уравнения (5.2) допускает следующее представление:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_0^T [G(\lambda_1, s) - G(\lambda_2, s)] f(t-s) ds, \quad (5.3)$$

если $\lambda_1 \neq \lambda_2$; и

$$\varphi(t) = \int_0^T \tilde{G}(\lambda, s) f(t-s) ds, \quad (5.4)$$

если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, где матрицы $G(\lambda, s)$ и $\tilde{G}(\lambda, s)$ имеют вид

$$G(\lambda, s) = \frac{e^{\lambda s}}{1 - e^{\lambda T}} \begin{pmatrix} \lambda - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & \lambda - a_{11} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{G}(\lambda, s) = \frac{e^{\lambda s}}{1 - e^{\lambda T}} \begin{pmatrix} 1 + (\lambda - a_{22}) \left(s + \frac{Te^{\lambda T}}{1 - e^{\lambda T}} \right) & a_{12} \left(s + \frac{Te^{\lambda T}}{1 - e^{\lambda T}} \right) \\ a_{21} \left(s + \frac{Te^{\lambda T}}{1 - e^{\lambda T}} \right) & 1 + (\lambda - a_{11}) \left(s + \frac{Te^{\lambda T}}{1 - e^{\lambda T}} \right) \end{pmatrix}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что функция φ (ее T – периодичность очевидна) является решением уравнения (5.2). В самом деле, полагая (в случае $\lambda_1 \neq \lambda_2$)

$$\Gamma(\lambda_1, \lambda_2; s) = \frac{G(\lambda_1, s) - G(\lambda_2, s)}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

будем иметь

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \int_0^t \Gamma(\lambda_1, \lambda_2; s) f(t-s) ds + \int_t^T \Gamma(\lambda_1, \lambda_2; s) f(t+T-s) ds = \\ &= \int_0^t \Gamma(\lambda_1, \lambda_2; t-\tau) f(\tau) d\tau + \int_t^T \Gamma(\lambda_1, \lambda_2; t+T-\tau) f(\tau) d\tau,\end{aligned}$$

а тогда

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(t) &= \int_0^t \dot{\Gamma}(\lambda_1, \lambda_2; t-\tau) f(\tau) d\tau + \int_t^T \dot{\Gamma}(\lambda_1, \lambda_2; t+T-\tau) f(\tau) d\tau + \\ &+ [\Gamma(\lambda_1, \lambda_2; 0) - \Gamma(\lambda_1, \lambda_2; 0)] f(t) = \int_0^t A \Gamma(\lambda_1, \lambda_2; t-\tau) f(\tau) d\tau + \\ &+ \int_t^T A \Gamma(\lambda_1, \lambda_2; t+T-\tau) f(\tau) d\tau + f(t) = A\varphi(t) + f(t).\end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что и формула (5.4) дает решение уравнения (5.2).

Матричную функцию $\Gamma(\lambda_1, \lambda_2; s)$ ($0 \leq s \leq T$) в случае различных собственных значений λ_1 и λ_2 матрицы A , а в случае кратного собственного значения – матричную функцию $\tilde{G}(\lambda, s)$, естественно назвать матричной функцией Грина второго порядка T – периодической задачи для уравнения (5.2).

Если ввести обозначение

$$\kappa(\lambda, s) = \frac{e^{\lambda s}}{1 - e^{\lambda T}},$$

то нетрудно видеть, что матрица $G(\lambda, s)$ и матрица $\tilde{G}(\lambda, s)$ связаны следующим соотношением

$$\tilde{G}(\lambda, s) = \kappa(\lambda, s) \{ I + [s + T\kappa(\lambda, s)] G(\lambda, s) \},$$

где I – единичная матрица.

Далее рассмотрим вопрос о неотрицательности матриц Γ и $\tilde{G}$. Под неотрицательной мы понимаем матрицу, все элементы которой неотрицательны.

Т е о р е м а 5. Если собственные значения матрицы A отрицательны, а ее внедиагональные элементы a_{12} и a_{21} неотрицательны, то матрицы $\Gamma(\lambda_1, \lambda_2; s)$ и $\tilde{G}(\lambda, s)$ ($0 \leq s \leq T$) неотрицательны при всех $s \in [0, T]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем для случая $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Так как

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} < 0, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \det A > 0, \quad a_{21} a_{12} \geq 0,$$

то $a_{11}a_{22} > 0$, а значит $a_{11} < 0$ и $a_{22} < 0$. Пусть для определенности $\lambda_1 < \lambda_2$ и $a_{11} \leq a_{22}$. Тогда

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= \frac{1}{2} \left[a_{11} + a_{22} - \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4 \det A} \right] = \frac{1}{2} \left[a_{11} + a_{22} - \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{21}a_{12}} \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{2} (a_{11} + a_{22} + |a_{22} - a_{11}|) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left[a_{11} + a_{22} + \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{21}a_{12}} \right] = \frac{1}{2} \left[a_{11} + a_{22} + \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 - 4 \det A} \right] = \lambda_1.\end{aligned}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае мы установили неравенства

$$\lambda_2 \leq a_{11} \leq a_{22} \leq \lambda_1,$$

из которых очевидным образом следует неотрицательность матрицы $\Gamma(\lambda_1, \lambda_2; s)$ с элементами

$$\begin{aligned}[\Gamma(\lambda_1, \lambda_2; s)]_{11} &= \frac{\lambda_1 \kappa(\lambda_1, s) - \lambda_2 \kappa(\lambda_2, s) - a_{22} [\kappa(\lambda_1, s) - \kappa(\lambda_2, s)]}{\lambda_1 - \lambda_2} = \\ &= \frac{(\lambda_1 - a_{22}) \kappa(\lambda_1, s) - (\lambda_2 - a_{22}) \kappa(\lambda_2, s)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ [\Gamma(\lambda_1, \lambda_2; s)]_{12} &= \frac{a_{12} [\kappa(\lambda_1, s) - \kappa(\lambda_2, s)]}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ [\Gamma(\lambda_1, \lambda_2; s)]_{21} &= \frac{a_{21} [\kappa(\lambda_1, s) - \kappa(\lambda_2, s)]}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ [\Gamma(\lambda_1, \lambda_2; s)]_{22} &= \frac{\lambda_1 \kappa(\lambda_1, s) - \lambda_2 \kappa(\lambda_2, s) - a_{11} [\kappa(\lambda_1, s) - \kappa(\lambda_2, s)]}{\lambda_1 - \lambda_2}.\end{aligned}$$

Неотрицательность матрицы $\tilde{G}(\lambda, s)$ доказывается аналогичным образом.

Далее вычислим норму интегрального оператора H , порожденного правой частью равенств (5.3) и (5.4), т.е.

$$\varphi = Hf, \quad (5.5)$$

и действующем в банаховом пространстве непрерывных T – периодических векторных функций

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$$

с нормой $\|f\| := \max \{ \|f_1\|, \|f_2\| \}$.

Т е о р е м а 6. При выполнении условий теоремы 5 для нормы $\|H\|$ оператора H имеют место равенства

$$||| H ||| = \begin{cases} \frac{1}{\det A} \max \{a_{12} - a_{22}, a_{21} - a_{11}\}, & \text{если } \lambda_1 \neq \lambda_2, \\ \frac{1}{\det A} \max \{a_{21} - \sqrt{\det A}; a_{12} - \sqrt{\det A}\}, & \text{если } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\varphi = Hf$, тогда последнее равенство в координатной форме примет вид

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) = & \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_0^T \left[\frac{(\lambda_1 - a_{22})e^{\lambda_1 s}}{1 - e^{\lambda_1 T}} - \frac{(\lambda_2 - a_{22})e^{\lambda_2 s}}{1 - e^{\lambda_2 T}} \right] f_1(t-s) ds + \\ & + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_0^T \left[\frac{a_{12}e^{\lambda_1 s}}{1 - e^{\lambda_1 T}} - \frac{a_{12}e^{\lambda_2 s}}{1 - e^{\lambda_2 T}} \right] f_2(t-s) ds; \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) = & \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_0^T \left[\frac{a_{21}e^{\lambda_1 s}}{1 - e^{\lambda_1 T}} - \frac{a_{21}e^{\lambda_2 s}}{1 - e^{\lambda_2 T}} \right] f_1(t-s) ds + \\ & + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_0^T \left[\frac{(\lambda_1 - a_{11})e^{\lambda_1 s}}{1 - e^{\lambda_1 T}} - \frac{(\lambda_2 - a_{11})e^{\lambda_2 s}}{1 - e^{\lambda_2 T}} \right] f_2(t-s) ds. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Из равенств (5.6) и (5.7) вытекает, что

$$||| H ||| = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \max \{b_1, b_2\},$$

где

$$\begin{aligned} b_1 = & \int_0^T \left[\frac{(\lambda_1 - a_{22})e^{\lambda_1 s}}{1 - e^{\lambda_1 T}} - \frac{(\lambda_2 - a_{22})e^{\lambda_2 s}}{1 - e^{\lambda_2 T}} \right] ds + \int_0^T \left[\frac{a_{12}e^{\lambda_1 s}}{1 - e^{\lambda_1 T}} - \frac{a_{12}e^{\lambda_2 s}}{1 - e^{\lambda_2 T}} \right] ds; \\ b_2 = & \int_0^T \left[\frac{a_{21}e^{\lambda_1 s}}{1 - e^{\lambda_1 T}} - \frac{a_{21}e^{\lambda_2 s}}{1 - e^{\lambda_2 T}} \right] ds + \int_0^T \left[\frac{(\lambda_1 - a_{11})e^{\lambda_1 s}}{1 - e^{\lambda_1 T}} - \frac{(\lambda_2 - a_{11})e^{\lambda_2 s}}{1 - e^{\lambda_2 T}} \right] ds. \end{aligned}$$

Находя интегралы, расположенные в правой части последнего равенства, получим требуемый результат. В случае кратного корня из условий теоремы следует, что $\lambda = a_{11} = a_{22}$ и, по крайней мере, одно из чисел a_{12} или a_{21} обращается в нуль. Предположим, что $a_{12} = 0$. Тогда

$$||| H ||| = \max \{c_1, c_2\},$$

где

$$c_1 = \int_0^T \frac{e^{\lambda s}}{1 - e^{\lambda T}} ds; \quad c_2 = \int_0^T \left\{ \left[\frac{s}{1 - e^{\lambda T}} + \frac{Te^{\lambda T}}{(1 - e^{\lambda T})^2} \right] a_{21}e^{\lambda s} + \frac{s}{1 - e^{\lambda T}} \right\} ds.$$

Таким образом,

$$||| H ||| = \frac{a_{21}}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}.$$

6. Нелинейные дифференциальные уравнения

6.1. Итерационные процессы

Основными методами, применяемыми для нахождения решений краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений, являются методы итерационные. Рассмотрим уравнение

$$x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = \sin t + x^2(t)$$

с квадратичной нелинейностью. Используя функцию Грина, решение периодической краевой задачи можно получить как решение интегрального уравнения

$$x(t) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_0^T \left(\frac{e^{\lambda_2 s}}{1 - e^{\lambda_2 T}} - \frac{e^{\lambda_1 s}}{1 - e^{\lambda_1 T}} \right) [\sin(t-s) + x^2(t-s)] ds,$$

в котором $\lambda_{1,2}$ – корни характеристического уравнения. Первым приближением берем функцию $0,1 \sin t$. Итерационный процесс быстро сходится, так что уже вторая итерация даёт приемлемый результат. В конце вычислений осуществляем проверку по невязке.

```
> g2:=exp(3*s)/(1-exp(3*T));
g2 :=  $\frac{e^{3s}}{1 - e^{3T}}$ 
> g1:=exp(2*s)/(1-exp(2*T));
g1 :=  $\frac{e^{2s}}{1 - e^{2T}}$ 
> gg:=evalf[7](subs(T=2*Pi, g2-g1));
gg := -6.512384 10-9 e3.s + 3.487357 10-6 e2.s
> f1:=evalf[7](int(gg*(sin(t-s)+(0.1*sin(t-s))^2),
s=0..2*Pi));
f1 := 0.1000016 sin(t) - 1.305922 10-8 sin(t)2
+ 0.0009615469 sin(t) cos(t) + 0.1000006 cos(t)
- 0.0001923325 cos(t)2 + 0.0009295151
> f11:=subs(t=t-s, f1);
f11 := 0.1000016 sin(t-s) - 1.305922 10-8 sin(t-s)2
+ 0.0009615469 sin(t-s) cos(t-s) + 0.1000006 cos(t-s)
- 0.0001923325 cos(t-s)2 + 0.0009295151
> f2:=simplify(evalf[7](int(gg*(sin(t-s)+(f11)^2),
s=0..2*Pi)));
f2 := 2.956946606 10-9 cos(t)4 + (4.290091209 10-8 sin(t)
+ 0.00001282054352) cos(t)3 + (0.00001282131321 sin(t)
+ 0.001923277706) cos(t)2 + (0.0003847068004 sin(t)
+ 0.1000338999) cos(t) + 0.1000003000 sin(t)
+ 0.0007052173937
> Q:=simplify(diff(f2,t$2)-5*diff(f2,t)+6*f2-sin(t)-f2^2);
```

$$\begin{aligned}
Q := & 1.831744725 \cdot 10^{-15} \cos(t)^8 + (-2.537114128 \cdot 10^{-16} \sin(t) \\
& + 1.024272737 \cdot 10^{-12}) \cos(t)^7 + (\\
& -1.175849898 \cdot 10^{-12} \sin(t) + 2.16523820 \cdot 10^{-11}) \cos(t)^6 + (\\
& -4.960482586 \cdot 10^{-10} \sin(t) - 3.146252003 \cdot 10^{-8}) \cos(t)^5 + (\\
& -6.835667447 \cdot 10^{-8} \sin(t) - 4.439494685 \cdot 10^{-6}) \cos(t)^4 + (\\
& -6.978975042 \cdot 10^{-6} \sin(t) - 0.0005386622045) \cos(t)^3 + (\\
& -0.0003077980088 \sin(t) - 0.000011979655) \cos(t)^2 + (\\
& -4.934534528 \cdot 10^{-6} \sin(t) + 0.0001551030100) \cos(t) \\
& + 0.00005559822452 \sin(t) + 8.36444 \cdot 10^{-7}
\end{aligned}$$

> q1:=evalf[7](subs(t=0.2,Q));

$$q1 := -0.0004198409$$

> q2:=evalf[7](subs(t=0.4,Q));

$$q2 := -0.0003745331$$

> q3:=evalf[7](subs(t=1.2,Q));

$$q3 := 0.00004193498$$

Далее рассмотрим уравнение с кубической нелинейностью:

$$x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = \sin(t) - x^3(t),$$

> restart;

> g:=(1/(l2-l1))*(exp(l2*s)/(1-exp(l2*T))-exp(l1*s)/(1-exp(l1*T)));

$$g := \frac{\frac{e^{l2 s}}{1 - e^{l2 T}} - \frac{e^{l1 s}}{1 - e^{l1 T}}}{l2 - l1}$$

> g1:=subs(T=2*Pi, l1=2, l2=3, g);

$$g1 := \frac{e^{3s}}{1 - e^{6\pi}} - \frac{e^{2s}}{1 - e^{4\pi}}$$

> x2:=int(g1*(sin(t-s)-(cos(t-s))^3), s=0..2*Pi);

$$\begin{aligned}
x2 := & \frac{5 \sin(t) \cos(t)^2}{78} + \frac{\cos(t)^3}{78} + \frac{31 \sin(t)}{195} \\
& + \frac{\cos(t)}{65}
\end{aligned}$$

> x22:=subs(t=t-s, x2);

$$\begin{aligned}
x22 := & \frac{5 \sin(t-s) \cos(t-s)^2}{78} + \frac{\cos(t-s)^3}{78} \\
& + \frac{31 \sin(t-s)}{195} + \frac{\cos(t-s)}{65}
\end{aligned}$$

> x3:=evalf[13](int(g1*(sin(t-s)-x22^3), s=0..2*Pi));

$$\begin{aligned}
x3 := & -1.652745590557 \cdot 10^{-7} \cos(t)^9 - 3.189798989776 \cdot 10^{-6} \cos(t)^8 \sin(t) + 6.339075066357 \cdot 10^{-6} \cos(t)^7 \\
& - 0.00003485690989876 \cos(t)^6 \sin(t) + 0.00006118758057421 \cos(t)^5 - 0.0001148834524897 \cos(t)^4 \sin(t) \\
& + 0.00002298018029660 \cos(t)^3 - 0.00002619643224840 \cos(t)^2 \sin(t) + 0.09949923024003 \cos(t) \\
& + 0.09970770140861 \sin(t)
\end{aligned}$$

```

> x33:=subs(t=t-s,x3);
x33 := -1.652745590557 10-7 cos(t-s)9 - 3.189798989776 10-6 cos(t-s)8 sin(t-s) + 6.339075066357 10-6 cos(t-s)7 - 0.00003485690989876 cos(t-s)6 sin(t-s) + 0.00006118758057421 cos(t-s)5 - 0.0001148834524897 cos(t-s)4 sin(t-s) + 0.00002298018029660 cos(t-s)3 - 0.00002619643224840 cos(t-s)2 sin(t-s) + 0.09949923024003 cos(t-s) + 0.09970770140861 sin(t-s)

> x4:=evalf[13](int(g1*(sin(t-s)-x33^3),s=0..2*Pi));
x4 := -3.828876182697 10-12 cos(t)14 sin(t) - 3.021119197414 10-13 cos(t)16 sin(t) + 2.528961734271 10-17 cos(t)22 sin(t) - 8.837224842915 10-15 cos(t)18 sin(t) + 1.947177597110 10-16 cos(t)20 sin(t) + 6.337963744786 10-12 cos(t)13 + 1.417840084038 10-9 cos(t)11 - 2.348025229529 10-13 cos(t)15 + 0.09981722934481 cos(t) + 0.1000252127921 sin(t) - 0.0001517164028354 cos(t)3 + 4.428635555375 10-20 cos(t)26 sin(t) - 4.664546089565 10-19 cos(t)25 + 1.825393018045 10-8 cos(t)9 - 1.297727679334 10-21 cos(t)27 - 0.0001017336666134 cos(t)2 sin(t) + 1.541184867530 10-8 cos(t)8 sin(t) + 1.269797470322 10-7 cos(t)6 sin(t) + 1.029420371545 10-7 cos(t)4 sin(t) + 5.653625613855 10-8 cos(t)7 - 1.213719330226 10-13 cos(t)17 - 8.501754190751 10-15 cos(t)19 + 8.061042564039 10-9 cos(t)5 - 1.539785728949 10-17 cos(t)23 - 2.183055801299 10-16 cos(t)21 + 5.213236553517 10-10 cos(t)10 sin(t) - 2.251356164730 10-11 cos(t)12 sin(t) + 1.646537711785 10-18 cos(t)24 sin(t)

> w:=diff(x4,t$2)-5*diff(x4,t)+6*x4-sin(t)+x4^3;
> with(Optimization);
      [ImportMPS, Interactive, LPSolve, LSSolve,
      Maximize, Minimize, NLPsolve, QPSolve]

> Maximize(w);
      [0.0000230356384962509801, [t= 0.918265305397132]]

> Minimize(w);
      [-0.0000230356384962530909, [t= 29.1925991977819]]

```

Задания для самостоятельной работы

Итерационными методами (с использованием функции Грина) найти приближенное решение T – периодической краевой задачи для неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с точностью до 10^{-4} . Первое приближение выбирать кратным той периодической функции, что стоит в правой части уравнения.

- 1) $x'' - 5x' + 6x = 2\sin(t)\cos(t) + x(t) + 3x^3(t)$;
- 2) $x'' - 2x' - 15x = 2\cos(4t) + 5x(t) + 6x^2(t)$;
- 3) $x'' + 7x' + 6x = \sin(8t) + x^2(t) + x^3(t)$;
- 4) $x'' - 12x' + 32x = \cos^2 t - \sin^2 t + 2x^3(t)$;
- 5) $x'' - 8x' - 20x = 2\sin(4t) + 4x^2(t)$.

6.2. Нахождение интервалов знакопостоянства функции Грина и вычисление констант сжатия интегральных операторов

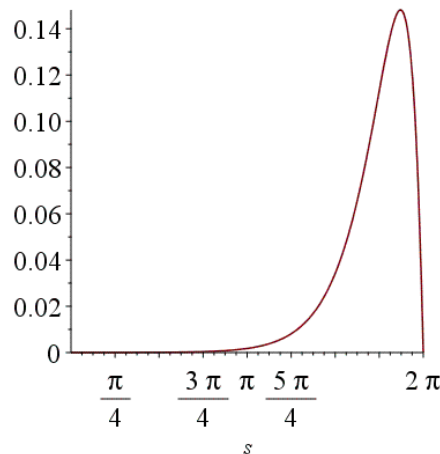
Функция Грина проявляет различные свойства при различных значениях параметров. Для уравнения второго порядка параметрами являются корни характеристического уравнения и период правой части дифференциального уравнения. Далее приводятся графики функций Грина в трех случаях расположения корней характеристического уравнения:

- 1) корни характеристического уравнения действительны и различны,
- 2) корни характеристического уравнения действительны и совпадают,
- 3) характеристическое уравнение имеет комплексно сопряженные корни.

```
> g2:=exp(l2*s)/(1-exp(l2*T)): g1:=exp(l1*s)/(1-exp(l1*T)):
> G:=(1/(l2-l1))*(g2-g1):
> gg1:=subs(l1=2,l2=3,T=2*Pi,G); with(plots):
```

$$gg1 := \frac{e^{3s}}{1 - e^{6\pi}} - \frac{e^{2s}}{1 - e^{4\pi}}$$

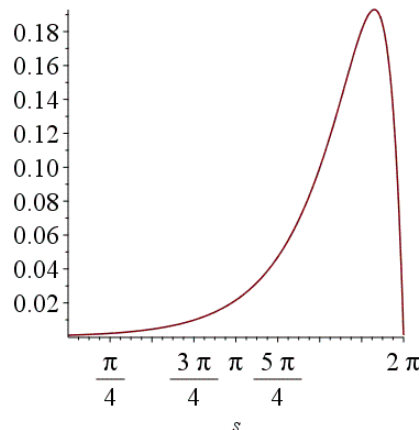
```
> plot(gg1, s=0..2*Pi);
```



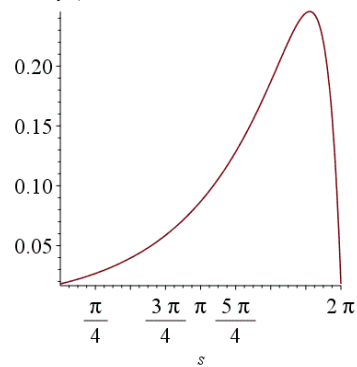
```
> gg1:=subs(l1=1,l2=3,T=2*Pi,G);
```

$$gg1 := \frac{e^{3s}}{2(1 - e^{6\pi})} - \frac{e^s}{2(1 - e^{2\pi})}$$

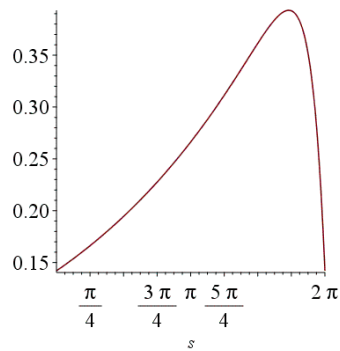
```
> plot(gg1, s=0..2*Pi);
```



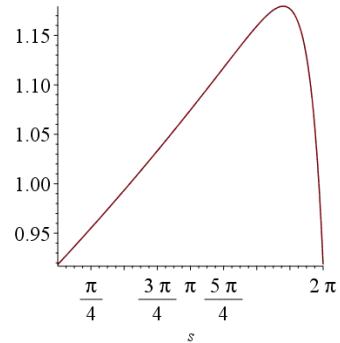

```
> gg1:=subs(l1=1/2,l2=3, T=2*Pi, G):
> plot(gg1, s=0..2*Pi);
```



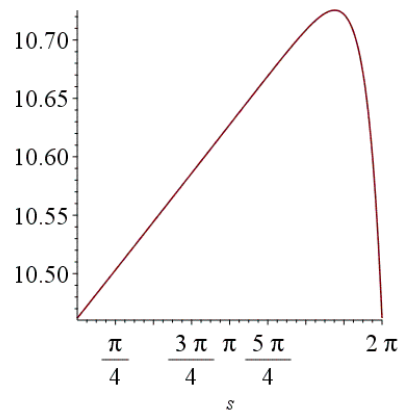
```
> gg1:=subs(l1=1/5,l2=3, T=2*Pi, G):
> plot(gg1, s=0..2*Pi);
```



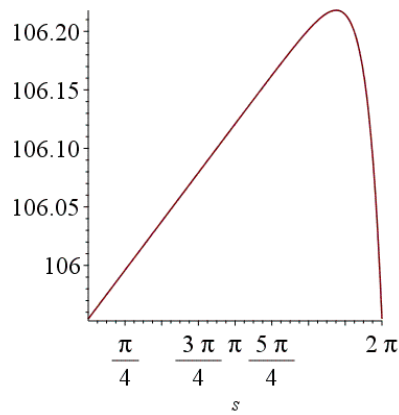
```
> gg1:=subs(l1=1/20,l2=3, T=2*Pi, G):
> plot(gg1, s=0..2*Pi);
```



```
> gg1:=subs(l1=1/200,l2=3, T=2*Pi, G):
> plot(gg1, s=0..2*Pi);
```



```
> gg1:=subs(l1=1/2000,l2=3, T=2*Pi, G):
> plot(gg1, s=0..2*Pi);
```



Далее рассмотрим случай кратного действительного корня.

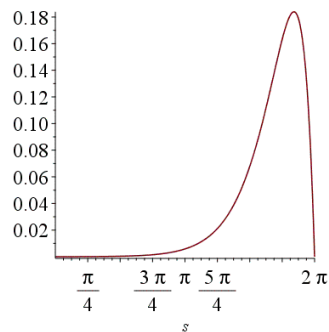
```
> u1:=s*exp(1*s)/(1-exp(1*T)):
> u2:=T*exp(1*T)*exp(1*s)/(1-exp(1*T))^2:
> GG:=u1+u2;
```

$$GG := \frac{s e^{ls}}{1 - e^{lT}} + \frac{T e^{lT} e^{ls}}{(1 - e^{lT})^2}$$

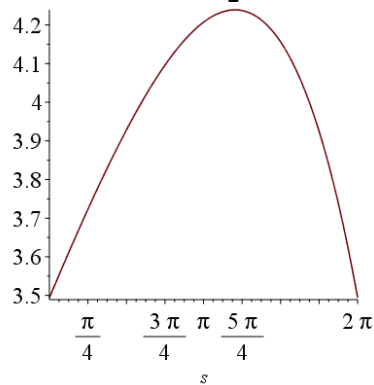
```
> uu1:=subs(l=2, T=2*Pi,GG); q:=int(uu1,s=0..2*Pi);
```

$$uu1 := \frac{s e^{2s}}{1 - e^{4\pi}} + \frac{2\pi e^{4\pi} e^{2s}}{(1 - e^{4\pi})^2} \quad q := \frac{1}{4}$$

```
> plot(uu1, s=0..2*Pi);
```

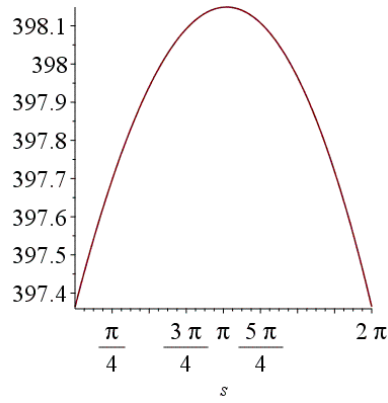


```
> uu2:=subs(l=0.2, T=2*Pi,GG):
> plot(uu2, s=0..2*Pi); q:=int(uu2,s=0..2*Pi);
```



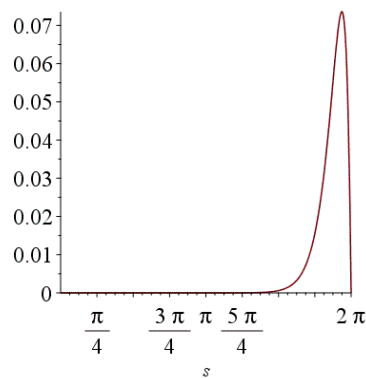
$$q := 24.99999998$$

```
> uu3:=subs(l=0.02, T=2*Pi,GG):
> plot(uu3, s=0..2*Pi); q:=int(uu3,s=0..2*Pi);
```



$$q := 2500.000011$$

```
> uu4:=subs(l=5, T=2*Pi, GG):
> plot(uu4, s=0..2*Pi); q:=int(uu4, s=0..2*Pi);
```



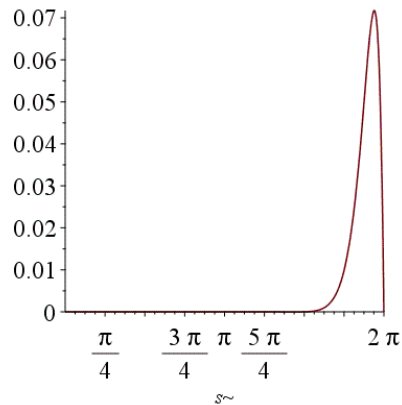
$$q := \frac{1}{25}$$

Далее рассмотрим случай комплексных корней характеристического уравнения.

```
> assume(s, real, T, real); g1:=exp(l1*s)/(1-exp(l1*T)):
> g2:=exp(l2*s)/(1-exp(l2*T)): G:=(1/(l2-l1))*(g2-g1):
> vv:=simplify(subs(l2= 5+2*I, l1=5-2*I, G));
```

$$vv := \frac{\frac{1}{4} \left(e^{(5+2I)s} + (5-2I)T - e^{(5-2I)s} + (5+2I)T - e^{(5+2I)s} + e^{(5-2I)s} \right)}{(-1 + e^{(5+2I)T})(-1 + e^{(5-2I)T})}$$

```
> vv1:=subs(T=2*Pi, vv):
> VV1:= plot(vv1, s=0..2*Pi); int(vv1, s=0..2*Pi);
```

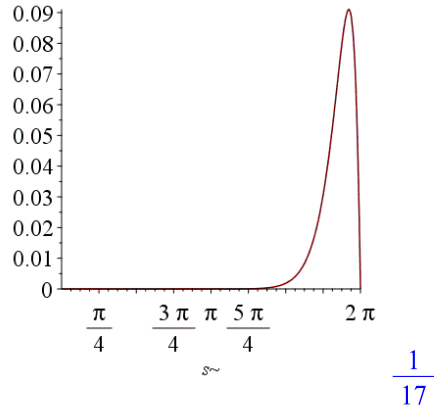


$$\frac{1}{29}$$

```
> vv2:=simplify(subs(l2= 4+I, l1=4-I, T=2*Pi, G));
```

$$vv2 := \frac{\frac{I}{2} \left(-e^{(4+I)s} + e^{(4-I)s} + 2I e^{8\pi+4s} \sin(s) \right)}{\left(-1 + e^{8\pi} \right)^2}$$

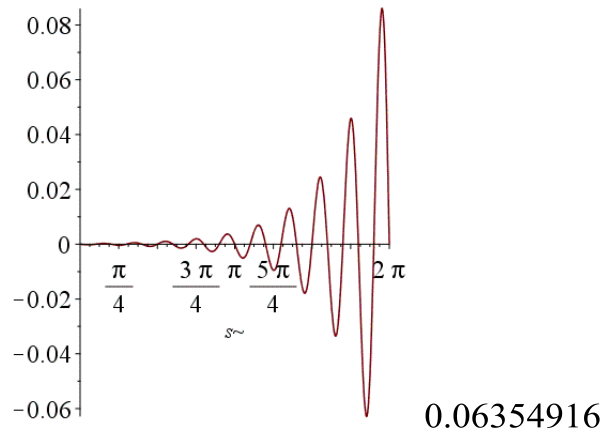
```
> vv2:=plot(vv2, s=0..2*Pi); int(vv2, s=0..2*Pi);
```



```
> vv3:=simplify(subs(l2= 1+10*I, l1=1-10*I,T=2*Pi,G));
```

$$vv3 := \frac{I e^{(1-10I)s} - I e^{(1+10I)s} - 2 e^{2\pi+s} \sin(10s)}{20 \left(-1 + e^{2\pi} \right)^2}$$

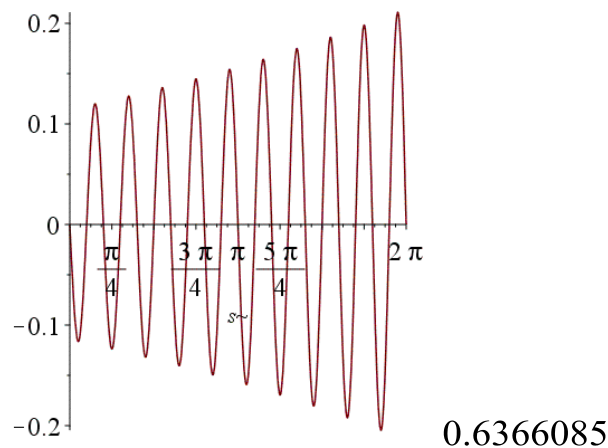
```
> VV3:=plot(vv3, s=0..2*Pi); evalf[7](int(abs(vv3), s=0..2*Pi));
```



0.06354916

```
> vv3:=simplify(subs(l2= 0.1+10*I, l1=0.1-10*I,T=2*Pi,G));
```

```
> VV3:=plot(vv3, s=0..2*Pi); evalf[7](int(abs(vv3), s=0..2*Pi));
```



0.6366085

Литература

1. Красносельский, М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский. – Москва: Наука, 1966. – 332 с.
2. Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.]. – Москва: Наука, 1966. – 332 с.
3. Красносельский, М.А. Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. – Москва: Наука, 1975. – 511 с.
4. Перов, А.И. Монотонные дифференциальные уравнения. I. / А.И. Перов, Ю.В. Трубников // Дифференц. уравнения. – 1974. – Т. 10, № 5. – С. 804–815.
5. Перов, А.И. Монотонные дифференциальные уравнения. II. / А.И. Перов, Ю.В. Трубников // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, № 7. – С. 1224–1237.
6. Перов, А.И. Монотонные дифференциальные уравнения. III. / А.И. Перов, Ю.В. Трубников // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. 14, № 2. – С. 232–244.
7. Перов, А.И. Монотонные дифференциальные уравнения. IV. / А.И. Перов, Ю.В. Трубников // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. 14, № 7. – С. 1192–1202.
8. Трубников, Ю.В. Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями / Ю.В. Трубников, А.И. Перов. – Минск: Наука и техника. – 1986. – 199 с.
9. Трубников, Ю.В. Экстремальные конструкции в негладком анализе и операторные уравнения с аккретивными нелинейностями / Ю.В. Трубников. – Москва : Астропресс XXI, 2002. – 256 с.
10. Щеглова, И.Ю. Моделирование колебательных процессов (на примере физических задач): методическое пособие для студентов физико-математического факультета / И.Ю. Щеглова, А.А. Богуславский. – Коломна: КГПИ, 2009. – 130 с.
11. Богуславский, А.А. Лабораторный практикум по курсу «Моделирование физических процессов»: учебно-методическое пособие для студентов физико-математического факультета / А.А. Богуславский, И.Ю. Щеглова. – Коломна: КГПИ, 2002. – 88 с.

Учебное издание

ТРУБНИКОВ Юрий Валентинович
ЧЕРНЯВСКИЙ Михаил Михайлович
ПОДОКСЁНОВ Михаил Николаевич

ПРИЛОЖЕНИЯ
КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Методические рекомендации

Технический редактор

Г.В. Разбоева

Компьютерный дизайн

Л.И. Ячменёва

Подписано в печать 29.11.2021. Формат 60х84 ¹/₁₆. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 2,71. Уч.-изд. л. 1,89. Тираж 25 экз. Заказ 182.

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий

№ 1/255 от 31.03.2014.

Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.