

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра геометрии и математического анализа

АКТУАРНАЯ МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации

*Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2021*

УДК 519.2(075.8)

ББК 22.17я73

А43

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 1 от 27.10.2020.

Составители: старшие преподаватели кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова **С.М. Бородич, Т.В. Кавитова**

Н а у ч н ы й р е д а к т о р :

доцент кафедры геометрии и математического анализа
ВГУ имени П.М. Машерова,
кандидат физико-математических наук *Т.Л. Сурин*

Р е ц е н з е н т :

старший преподаватель
кафедры математики и информационных технологий
УО «ВГТУ» *А.В. Коваленко*

А43 Актуарная математика : методические рекомендации / сост. С.М. Бородич, Т.В. Кавитова. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2021. – 50 с.

Настоящее учебное издание содержит теоретический материал, примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения. Оно может использоваться при проведении лабораторных занятий, а также для организации самостоятельной работы студентов.

Предназначается для студентов, обучающихся по специальностям «Программное обеспечение информационных технологий», «Прикладная информатика (программное обеспечение компьютерных систем)», «Управление информационными ресурсами».

УДК 519.2(075.8)

ББК 22.17я73

© ВГУ имени П.М. Машерова, 2021

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ЧАСТЬ I. ОСНОВЫ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ	5
1.1. Проценты, процентная ставка	5
1.2. Простая и сложная процентные ставки	5
1.3. Номинальная и эффективная процентные ставки	7
1.4. Непрерывные проценты. Сила роста	8
1.5. Эквивалентные процентные ставки	9
1.6. Дисконтирование	9
1.7. Номинальная и эффективная учетные ставки	12
1.8. Потоки платежей и финансовые ренты	12
1.9. Нарощенная сумма и современная стоимость потока платежей ...	13
1.10. Нарощенная сумма и современная стоимость постоянной ренты постнумерандо	13
1.11. Нарощенная сумма и современная стоимость постоянной ренты пренумерандо	17
ЧАСТЬ II. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ЖИЗНИ	18
2.1. Функция выживания	18
2.2. Кривая смертей	21
2.3. Интенсивность смертности	22
2.4. Макрохарактеристики продолжительности жизни	24
2.5. Остаточное время жизни	25
2.6. Основные величины, связанные с остаточным временем жизни ...	26
2.7. Макрохарактеристики остаточного времени жизни	28
2.8. Округленное остаточное время жизни	29
ЧАСТЬ III. АКТУАРНЫЕ РАСЧЕТЫ В СТРАХОВАНИИ ЖИЗНИ	30
3.1. Сущность страхования. Страхование жизни	30
3.2. Принцип эквивалентности финансовых обязательств. Нетто- и брутто-премии	31
3.3. Страхование на чистое дожитие	32
3.4. Страхование рент	34
3.5. Пожизненное страхование	39
3.6. Страхование жизни на срок	40
3.7. Смешанное страхование жизни	41
ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ	42
ЛИТЕРАТУРА	49

ВВЕДЕНИЕ

Актuariальная математика – математическая дисциплина, охватывающая методы расчетов и оценивания применительно к различным видам финансовых услуг, где обязательства по осуществлению платежа зависят от наступления события, имеющего вероятностную природу. История развития актуарной математики неразрывно связана с историей развития страхования, в первую очередь страхования жизни. И хотя современное понимание актуарной математики включает в себя теорию расчета любых финансовых контрактов в условиях неопределенности и риска, страхование жизни остается одной из самых важных сфер ее применения.

Учебное издание состоит из трех разделов: «Основы финансовой математики», «Вероятностные характеристики продолжительности жизни», «Актuariальные расчеты в страховании жизни». Первый раздел посвящен описанию математических моделей финансовых операций, используемых в актуарной математике. Второй содержит методы расчета основных характеристик продолжительности жизни. В третьем разделе приведены примеры актуарных расчетов для основных видов страхования жизни.

По каждой из рассматриваемых тем приводится краткий теоретический материал. Кроме того, издание содержит разобранные примеры, позволяющие закрепить теоретические знания и получить навыки практического использования методов актуарной математики. В конце издания приведен список задач, который полностью охватывает все изучаемые темы и вполне обеспечивает необходимую самостоятельную работу студентов.

Настоящее учебное издание адресуется, прежде всего, студентам факультета математики и информационных технологий ВГУ имени П.М. Машерова, обучающимся по специальностям «Программное обеспечение информационных технологий», «Прикладная информатика (программное обеспечение компьютерных систем)», «Управление информационными ресурсами».

Часть I. ОСНОВЫ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

1.1. Проценты, процентная ставка

Под *процентными деньгами* или, кратко, *процентами* в финансовых расчетах понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг в любой его форме.

Пусть P – первоначальная сумма долга (ссуды), I – проценты, полученные за определенный промежуток времени $(t_0, t_0 + t)$. Величина

$$i = I/P$$

называется *процентной ставкой* за рассматриваемый промежуток времени. Процентную ставку часто выражают в форме процентов, умножив i на 100, но в расчетных формулах i – это десятичная или, реже, обыкновенная дробь.

Временной интервал, к которому приурочена процентная ставка, называется *периодом начисления*, его не следует путать со *сроком начисления* (*сроком ссуды*). В качестве периода начисления обычно принимают год, полугодие, квартал, месяц или даже день. Чаще всего на практике имеют дело с годовыми ставками.

Процесс увеличения суммы денег во времени в связи с присоединением процентов к сумме долга называют *наращением*. Под *наращенной суммой* ссуды понимается первоначальная ее сумма вместе с начисленными на нее процентами к концу срока начисления.

На практике существуют различные способы начисления процентов, зависящие от условий контрактов. Соответственно применяют разные виды процентных ставок.

1.2. Простая и сложная процентные ставки

Процентные ставки различают по базе начисления процентов, в зависимости от того, является она постоянной или переменной.

Ниже используем следующие обозначения: P – первоначальная сумма долга, S – наращенная сумма.

Простая процентная ставка. *Простая процентная ставка* – это ставка, которая применяется к одной и той же первоначальной сумме долга на протяжении всего срока ссуды.

Наращение по простым процентам (т.е. с применением простой процентной ставки) осуществляется по формуле

$$S = P(1 + ni), \quad (1.1)$$

где n – срок ссуды (количество периодов начисления), i – процентная ставка. Множитель $(1 + ni)$ называют *множителем наращивания простых процентов*.

К простым процентам обычно прибегают при выдаче краткосрочных ссуд (на срок до 1 года) или в случаях, когда проценты не присоединяются к сумме долга, а периодически выплачиваются.

Если i – годовая ставка простых процентов, а срок ссуды измеряется не в годах, а в днях, то в формуле (1.1)

$$n = t/T,$$

где t – число дней ссуды, T – расчетное число дней в году (временная база).

Используются две временные базы: $T = 365$ (366) дней или $T = 360$ дней. В первом случае начисляемые проценты называют *точными*, во втором – *обыкновенными* (или *коммерческими*).

Расчет числа дней ссуды может быть *точным* или *приближенным*. В первом случае вычисляется фактическое число дней между датами. Во втором случае число дней любого целого месяца полагают равным 30, а оставшиеся дни считают точно.

Применяются три варианта расчета простых процентов:

а) точные проценты с точным числом дней ссуды – обозначение 365/365;

б) обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды (*банковский метод*) – обозначение 365/360;

в) обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды – обозначение 360/360.

Сложная процентная ставка. К наращению по сложным процентам прибегают в долгосрочных финансово-кредитных операциях (более 1 года), если проценты не выплачиваются периодически сразу после их начисления за прошедший интервал времени, а присоединяются к сумме долга. Присоединение начисленных процентов к основной сумме долга называется *капитализацией процентов*.

Сложная процентная ставка – это ставка, которая применяется к наращенной сумме долга, т.е. к первоначальной сумме долга вместе с начисленными за весь предыдущий период процентами.

Наращенная сумма по сложной процентной ставке i определяется формулой

$$S = P(1 + i)^n, \quad (1.2)$$

где n – число периодов начисления. Множитель $(1 + i)^n$ называется *множителем наращения сложных процентов*.

На рисунке 1 сравниваются наращения по простой и сложной процентным ставкам при одной и той же ставке процента. Как видим, наращение по схеме простых процентов является более выгодным для периода наращения менее года. Для периода наращения более года выгоднее наращение по схеме сложных процентов.

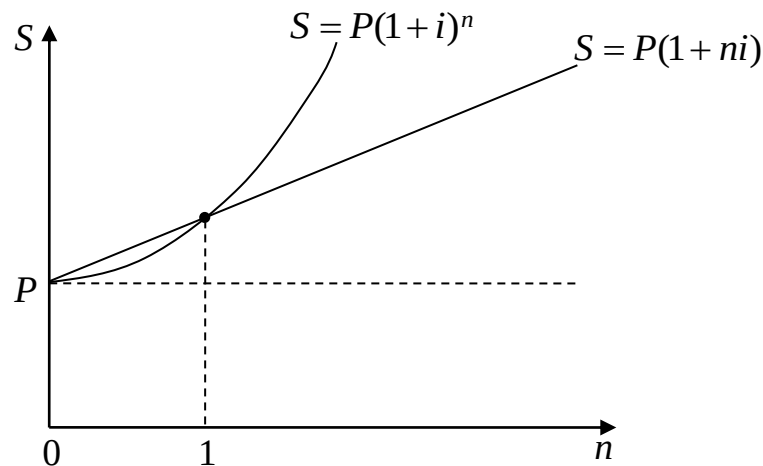


Рис. 1

Часто n не является целым числом. Пусть $n = a + b$, где a — целое число периодов начисления, b — дробная часть периода начисления. Применяются два метода:

1. *Общий* метод заключается в прямом расчете по формуле (1.2).
2. *Смешанный* метод расчета предполагает для целого числа периодов начисления использовать формулу сложных процентов, а для дробной части срока — формулу простых процентов:

$$S = P(1 + i)^a (1 + bi). \quad (1.3)$$

Пример 1.1. В банке получен кредит под 9,5% годовых в размере 250 тыс. руб. со сроком погашения 2 года и 9 месяцев. Определить сумму, которую необходимо вернуть по истечении срока займа двумя способами — общим и смешанным. Использовать способ расчета 360/360.

Решение. Здесь $n = 2 + \frac{270}{360} = 2,75$ года. Таким образом, по общему методу (формула (1.2))

$$S = 250(1 + 0,095)^{2,75} = 320,87 \text{ тыс. руб.},$$

а по смешанному (формула (1.3))

$$S = 250(1 + 0,095)^2 (1 + 0,75 \cdot 0,095) = 321,11 \text{ тыс. руб.} \bullet$$

1.3. Номинальная и эффективная процентные ставки

Проценты могут капитализироваться не один, а несколько раз в году — по полугодиям, кварталам, месяцам и т.д. Однако на практике в контрактах обычно фиксируется не ставка за период начисления, а годовая ставка (в процентах), одновременно указывается период начисления процентов. Указанная в договоре годовая ставка называется *номинальной*. Если номинальная годовая ставка равна j , а число периодов начисления в году — m ,

то каждый раз проценты начисляются по ставке j/m . Непосредственно из формулы (1.2) получается формула наращенной суммы по номинальной ставке:

$$S = P \left(1 + \frac{j}{m} \right)^N, \quad (1.4)$$

где N – общее количество периодов начисления.

Эффективная процентная ставка – это годовая ставка сложных процентов, которая дает тот же финансовый результат, что и m -разовое наращение в год по ставке j/m .

Связь между эффективной ставкой i и номинальной ставкой j выражается соотношениями

$$i = \left(1 + \frac{j}{m} \right)^m - 1, \quad j = m \left((1 + i)^{1/m} - 1 \right).$$

При $m > 1$ эффективная процентная ставка больше номинальной.

1.4. Непрерывные проценты. Сила роста

До сих пор мы рассматривали так называемые дискретные проценты, т.е. проценты, начисляемые за фиксированные интервалы времени (год, полугодие и т.д.). Иначе говоря, время рассматривалось как дискретная переменная. В теоретических финансовых расчетах нередко возникает необходимость в применении *непрерывных процентов*, когда наращение производится непрерывно, за бесконечно малые промежутки времени.

В силу формулы (1.4) при дискретном начислении процентов m раз в году по номинальной ставке j

$$S = P \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{mn},$$

где n – срок долга в годах. Чем больше m , тем меньше период начисления процентов, причем при $m \rightarrow \infty$ период начисления стремится к нулю, и значит, в пределе проценты будут начисляться непрерывно. Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, имеем

$$S = P \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{mn} = P e^{jn}.$$

Для того чтобы отличить непрерывную ставку от дискретной, номинальную ставку j обозначим через δ . Ставку δ называют *непрерывной ставкой процентов* или *силой роста*.

Таким образом, формулу наращенной суммы можно записать в виде

$$S = P e^{\delta n}.$$

1.5. Эквивалентные процентные ставки

Процентные ставки разного вида называются *эквивалентными*, если их применение при одинаковых начальных условиях дает одинаковые финансовые результаты.

Классическим примером эквивалентности являются номинальная и эффективная ставки процентов.

При выводе равенств, связывающих эквивалентные ставки, приравниваются друг к другу множители наращения. Получим, например, соотношения эквивалентности между простой и сложной ставками. Обозначим через i_s ставку простых процентов, а через i – ставку сложных процентов. Приравняем друг к другу соответствующие множители наращения:

$$1 + ni_s = (1 + i)^n .$$

Разрешив данное равенство относительно i_s и i , соответственно получим

$$i_s = \frac{(1 + i)^n - 1}{n}, \quad i = \sqrt[n]{1 + ni_s} - 1.$$

1.6. Дисконтирование

В финансовой практике часто сталкиваются с задачей, обратной наращению процентов: по заданной наращенной сумме S , которую следует выплатить через некоторое заданное время n , необходимо определить первоначальную сумму долга P . В этих случаях говорят, что сумма S *дисконтируется* (или *учитывается*), сам процесс начисления процентов и их удержания называют *учетом*, а удержанные проценты – *дисконтом* (или *скидкой*). Таким образом, разность $S - P$ можно рассматривать не только как проценты, начисленные на P , но и как дисконт D с суммы S :

$$D = S - P .$$

Величину P , найденную с помощью дисконтирования, называют *современной стоимостью* (современной величиной, текущей стоимостью) будущего платежа S .

Исходя из методики начисления процентов, применяют два вида дисконтирования: *математическое дисконтирование* по процентной ставке i и *банковский (коммерческий) учет* по учетной ставке d .

Математическое дисконтирование. Этот вид дисконтирования представляет собой решение следующей задачи: какую сумму P следует выдать в долг, чтобы в конце заданного срока n получить сумму S при заданной ставке процента? Величина P находится из соответствующих формул наращения:

а) если i – простая процентная ставка, то

$$P = S(1 + ni)^{-1};$$

б) если i – сложная процентная ставка, то

$$P = S(1 + i)^{-n};$$

в) если j – номинальная ставка, проценты начисляются m раз в году, n – срок ссуды в годах, то

$$P = S \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{-mn};$$

г) если δ – непрерывная процентная ставка, то

$$P = Se^{-\delta n}.$$

Множители в правых частях этих формул, на которые умножается сумма S , называются *дисконтными множителями* по соответствующей процентной ставке.

Банковский учет. Банковский учет – второй вид дисконтирования, при котором исходя из известной суммы S в будущем, определяют сумму P в данный момент времени, удерживая дисконт. При этом применяется *учетная ставка d* .

Учетные ставки, как и процентные, могут быть *простыми* и *сложными*.

Дисконт по простой учетной ставке, также как и наращение по простым процентам, обычно используется для краткосрочных периодов (до 1 года).

Операцию банковского учета с простой учетной ставкой рассмотрим на примере учета векселя. Суть этой операции состоит в том, что банк до наступления срока платежа по векселю покупает его у владельца по цене P , меньшей той суммы S , которая будет выплачена по векселю в конце срока. Разница в цене ($S - P$) и есть дисконт, который получает банк при наступлении срока векселя. В свою очередь владелец векселя с помощью его учета имеет возможность получить деньги ранее указанного на нем срока, хотя и не в полном объеме.

Согласно методу банковского учета с простой учетной ставкой проценты за пользование ссудой P в виде дисконта начисляются на сумму S , подлежащую уплате в конце срока. При этом размер дисконта, или суммы учета, определяется по формуле

$$D = ndS,$$

где d – учетная ставка, n – срок от момента учета векселя до даты его погашения (если d – годовая учетная ставка, то n измеряется в годах). Таким образом,

$$P = S - D = S(1 - nd).$$

Множитель $(1 - nd)$ называется *дисконтным множителем по простой учетной ставке*.

Учет посредством учетной ставки чаще всего осуществляется при временной базе $T = 360$ дней, число дней ссуды обычно берется точным.

В том случае, когда учету подлежит долговое обязательство, по которому предусматривается начисление процентов, происходит совмещение начисления процентов по процентной ставке i и дисконтирования по учетной ставке d :

$$P_2 = P_1(1 + ni)(1 - n'd), \quad (1.5)$$

где P_1 – первоначальная сумма долга, P_2 – сумма, получаемая при учете обязательства, n – общий срок платежного обязательства, n' – срок от момента учета до даты погашения.

Дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется по формуле

$$P = S(1 - d)^n, \quad (1.6)$$

где d – учетная ставка, n – число периодов дисконтирования (если d – годовая учетная ставка, то n измеряется в годах). Множитель $(1 - d)^n$ называется *дисконтным множителем по сложной учетной ставке*.

При использовании сложной учетной ставки процесс дисконтирования происходит с прогрессирующим замедлением, так как учетная ставка каждый раз применяется к сумме, уменьшенной за предыдущий период на величину дисконта.

Пример 1.2. Долговое обязательство в сумме 2000 руб. должно быть погашено через 90 дней по ставке 10% годовых. Владелец обязательства учел его в банке за 30 дней до наступления срока по учетной ставке 12%. Найти полученную при учете векселя сумму.

Решение. Используем формулу (1.5). В нашем случае $P_1 = 2000$, $n = 90/360 = 1/4$, $n' = 30/360 = 1/12$, $i = 0,1$, $d = 0,12$. Имеем:

$$P_2 = 2000 \left(1 + \frac{1}{4} \cdot 0,1 \right) \left(1 - \frac{1}{12} \cdot 0,12 \right) = 2029,50 \text{ руб.} \bullet$$

Пример 1.3. За долговое обязательство в 300 тыс. руб. банком было выплачено 200 тыс. руб. За какое время до срока погашения было учтено это обязательство, если банком использовалась годовая сложная учетная ставка 8%?

Решение. Имеем: $P = 200$, $S = 300$, $d = 0,08$. Из формулы (1.6) получаем

$$n = \frac{\ln(P/S)}{\ln(1 - d)}.$$

Таким образом,

$$n = \frac{\ln(200/300)}{\ln(1 - 0,08)} \approx 4,863 \text{ года.} \bullet$$

1.7. Номинальная и эффективная учетные ставки

При дисконтировании m раз в году используется *номинальная учетная ставка* f . В каждом периоде, равном $1/m$ части года, дисконтирование осуществляется по сложной учетной ставке f/m . В этом случае

$$P = S \left(1 - \frac{f}{m} \right)^{mn},$$

где n – срок долгового обязательства в годах. Множитель $\left(1 - \frac{f}{m} \right)^{mn}$ называется *дисконтным множителем по номинальной учетной ставке*.

Эффективная учетная ставка d – это сложная годовая учетная ставка, которая дает тот же финансовый результат, что и m -разовое дисконтирование в год по ставке f/m .

Эффективная и номинальная учетные ставки связаны следующими соотношениями:

$$d = 1 - \left(1 - \frac{f}{m} \right)^m, \quad f = m \left(1 - (1 - d)^{1/m} \right).$$

При $m > 1$ эффективная учетная ставка меньше номинальной.

1.8. Потоки платежей и финансовые ренты

Как правило, различные финансовые операции предусматривают не отдельные платежи, а некоторую их последовательность во времени, например, погашение задолженности в рассрочку, периодическое поступление доходов от инвестиций, выплаты пенсии и т.д. Такого рода последовательность платежей называют *потоком платежей*. Отдельный элемент этой последовательности (величина отдельного платежа) называется *членом потока*.

Члены потока могут быть как положительными величинами (поступления), так и отрицательными (выплаты), а временные интервалы между членами потока могут быть равными и неравными.

Поток платежей, все члены которого имеют одинаковый знак, а временные интервалы между последовательными платежами постоянны, называется *финансовой рентой* или *аннуитетом*.

Рента описывается следующими параметрами:

- *член ренты* – размер отдельного платежа;
- *период ренты* – временной интервал между двумя последовательными платежами;
- *срок ренты* – время от начала первого периода ренты до конца последнего;

▪ *процентная ставка* – ставка, используемая при наращении платежей, из которых состоит рента.

По количеству платежей в году ренты делятся на *годовые* (платежи производятся раз в год) и *р-срочные* (платежи производятся p раз в году).

По числу начислений процентов на протяжении года различают ренты с начислением 1 раз в году и ренты с начислением t раз в году.

Если все рентные платежи равны между собой, рента называется *постоянной*.

Рента, в которой платежи осуществляются в конце рентных периодов, называется *обыкновенной* или *постнумерандо*.

1.9. Наращенная сумма и современная стоимость потока платежей

Анализ потока платежей предполагает расчет одной из двух обобщающих характеристик: наращенной суммы и современной стоимости потока.

Наращенная сумма потока платежей – это сумма всех членов потока с начисленными на них к концу срока процентами.

Современная (текущая) стоимость потока платежей – это сумма всех его членов, дисконтированных на начало срока (или некоторый более ранний, чем начало срока, момент времени).

Рассмотрим общую постановку задачи. Пусть имеется ряд платежей R_k , выплачиваемых спустя время n_k после некоторого начального момента времени t_0 . Общий срок выплат – n лет. Необходимо определить наращенную на конец срока потока платежей сумму S . Если проценты начисляются раз в году по сложной ставке i , то по определению получаем

$$S = \sum_k R_k (1 + i)^{n - n_k}.$$

Современную стоимость A такого потока находим как сумму дисконтированных на момент времени t_0 платежей R_k :

$$A = \sum_k R_k (1 + i)^{-n_k}.$$

Легко видеть, что величины A и S функционально связаны друг с другом следующими соотношениями:

$$A = S(1 + i)^{-n}, \quad S = A(1 + i)^n. \quad (1.7)$$

1.10. Наращенная сумма и современная стоимость постоянной ренты постнумерандо

Получим формулы для расчета наращенной суммы S и современной стоимости A различных видов постоянных рент постнумерандо. Современная стоимость в этих формулах рассчитана на начало срока ренты. Срок ренты – n лет, R – годовая сумма платежей.

Годовая рента с начислением процентов 1 раз в году. Рентные платежи размером R вносятся 1 раз в год в конце года. На взносы начисляются сложные проценты по годовой ставке i . Таким образом, имеется годовая рента постнумерандо, член которой равен R . Нарощенные к концу срока суммы для каждого взноса будут равны соответственно

$$R(1+i)^{n-1}, R(1+i)^{n-2}, \dots, R(1+i), R.$$

Этот ряд, рассмотренный в обратном порядке, представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q=1+i$ и первым членом $b_1=R$. Число членов прогрессии равно n . Нарощенную к концу срока сумму рассматриваемой ренты находим как сумму членов этой прогрессии:

$$S = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \quad (1.8)$$

Найдем современную стоимость той же ренты, используя первое из соотношений (1.7) и формулу (1.8):

$$A = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i)^{-n} = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}. \quad (1.9)$$

Замечание 1.1. Из формул (1.8) и (1.9) можно получить формулы для наращенной суммы и современной стоимости других видов постоянных рент постнумерандо. При этом вместо n нужно брать число периодов ренты во всем ее сроке, вместо i – ставку сложных процентов за 1 период ренты, эквивалентную процентной ставке данной ренты, а вместо R – размер одного платежа.

Годовая рента с начислением процентов m раз в году. Как и выше, рассматривается годовая постоянная рента постнумерандо, только проценты начисляются m раз в году. Для начисления процентов используется номинальная ставка j .

Согласно замечанию 1.1, для нахождения наращенной суммы и современной стоимости данной ренты используем формулы (1.8) и (1.9). Вместо i в этих формулах нужно взять годовую ставку сложных процентов, эквивалентную номинальной ставке j с начислением процентов m раз в году. Такой ставкой, как известно (см. пп. 1.3, 1.5), является эффективная ставка, равная

$$\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1.$$

После подстановки получаем

$$S = R \cdot \frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{(1 + j/m)^m - 1}, \quad A = R \frac{1 - (1 + j/m)^{-mn}}{(1 + j/m)^m - 1}.$$

p -срочная рента с начислением процентов 1 раз в году. Платежи производятся p раз в году через равные промежутки времени. Каждый платеж равен R/p . Проценты начисляются по сложной годовой ставке i . В этом случае число периодов ренты во всем ее сроке равно np . Поскольку длина периода ренты составляет $1/p$, то сложная процентная ставка за 1 период ренты, эквивалентная данной сложной годовой ставке i , равна

$$(1+i)^{1/p} - 1.$$

Учитывая замечание 1.1, имеем

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{((1+i)^{1/p})^{np} - 1}{(1+i)^{1/p} - 1} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{p((1+i)^{1/p} - 1)}, \quad A = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{p((1+i)^{1/p} - 1)}.$$

p -срочная рента с начислением процентов m раз в году (случай $p = m$). На практике особенно часто встречается случай, когда число выплат в году равно числу начислений процентов: $p = m$. В этом случае размер одного платежа равен R/m , число периодов ренты — mn , процентная ставка за 1 период ренты — j/m , где j — номинальная ставка. Таким образом, с учетом замечания 1 получаем

$$S = \frac{R}{m} \cdot \frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{j/m} = R \cdot \frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{j}, \quad A = R \cdot \frac{1 - (1+j/m)^{-mn}}{j}.$$

p -срочная рента с начислением процентов m раз в году (случай $p \neq m$). Рента постнумерандо выплачивается p раз в году равными суммами, проценты начисляются m раз в год по номинальной ставке j , $p \neq m$, член ренты равен R/p .

В этом случае число периодов ренты — np . Так как период ренты равен $1/p$, а период начисления процентов — $1/m$, то число периодов начисления процентов в одном периоде ренты равно m/p . Следовательно, процентная ставка за 1 период ренты, эквивалентная номинальной ставке j с начислением процентов m раз в году, равна $(1+j/m)^{m/p} - 1$. Таким образом, в силу замечания 1.1 имеем

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+j/m)^{(m/p)np} - 1}{(1+j/m)^{m/p} - 1} = R \cdot \frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{p((1+j/m)^{m/p} - 1)}, \quad A = R \cdot \frac{1 - (1+j/m)^{-mn}}{p((1+j/m)^{m/p} - 1)}.$$

Годовая рента с непрерывным начислением процентов. Платежи размером R вносятся 1 раз в год в конце года, проценты начисляются непрерывно по ставке δ . В этом случае процентная ставка за 1 период ренты (т.е. за год), эквивалентная непрерывной ставке δ , равна $e^\delta - 1$, и следовательно,

$$S = R \cdot \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta} - 1}, \quad A = R \frac{1 - e^{-\delta n}}{e^{\delta} - 1}.$$

p -срочная рента с непрерывным начислением процентов. Платежи размером R/p производятся p раз в году через равные промежутки времени. Число периодов ренты равно np . Поскольку длина периода ренты — $1/p$, то процентная ставка за 1 период ренты, эквивалентная непрерывной ставке δ , равна $e^{\delta/p} - 1$. Таким образом,

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{e^{(\delta/p)np} - 1}{e^{\delta/p} - 1} = R \cdot \frac{e^{\delta n} - 1}{p(e^{\delta/p} - 1)}, \quad A = R \cdot \frac{1 - e^{-\delta n}}{p(e^{\delta/p} - 1)}.$$

Пример 1.4. Какую сумму необходимо поместить в банк, начисляющий ежемесячно сложные проценты по номинальной ставке 8% годовых, чтобы в течение 5 лет иметь возможность в конце каждого года снимать со счета 3 тыс. руб., исчерпав счет полностью?

Решение. Необходимо определить современную стоимость постоянной ренты постнумерандо. По формуле (1.9) при $R = 3$, $j = 0,08$, $m = 12$, $n = 5$ находим

$$A = 3 \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{0,08}{12}\right)^{-12 \cdot 5}}{\left(1 + \frac{0,08}{12}\right)^{12} - 1} = 11,884 \text{ тыс. руб.} \bullet$$

Пример 1.5. Акционерное общество решило создать резервный фонд. Размер фонда 6 млн. руб., и создать его необходимо за 5 лет. Взносы в фонд вносятся ежегодно равными платежами в конце каждого года. Определить размер одного платежа, если банк начисляет сложные проценты по ставке 16% годовых.

Решение. Из формулы (1.8) следует, что

$$R = \frac{S \cdot i}{(1 + i)^n - 1}.$$

Отсюда при $S = 6$, $i = 0,16$, $n = 5$ получаем

$$R = \frac{6 \cdot 0,16}{(1 + 0,16)^5 - 1} = 0,872456 \text{ млн. руб.} \bullet$$

Пример 1.6. Какой необходим срок для накопления 5 млн. руб. при условии, что в конце каждого года вносится по 1 млн. руб., а на накопления начисляются проценты по ставке 12% годовых?

Решение. Из (1.8) получаем:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R} \cdot i + 1\right)}{\ln(1+i)}.$$

При $S = 5$, $R = 1$, $i = 0,12$ отсюда находим

$$n = \frac{\ln\left(\frac{5}{1} \cdot 0,12 + 1\right)}{\ln(1+0,12)} \approx 4,147 \text{ года. } \bullet$$

1.11. Нарощенная сумма и современная стоимость постоянной ренты пренумерандо

Нарощенную сумму и современную стоимость постоянной ренты пренумерандо будем обозначать соответственно S' и A' . Очевидно, что эти величины больше соответственно наращенной суммы S и современной стоимости A аналогичной ренты постнумерандо в число раз, равное множителю наращивания за 1 период ренты. Таким образом,

для годовой ренты с начислением процентов 1 раз в году

$$S' = S(1+i), \quad A' = A(1+i);$$

для годовой ренты с начислением процентов m раз в году

$$S' = S\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m, \quad A' = A\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m;$$

для p -срочной ренты с начислением процентов 1 раз в году

$$S' = S(1+i)^{1/p}, \quad A' = A(1+i)^{1/p};$$

для p -срочной ренты с начислением процентов m раз в году (случай $p = m$)

$$S' = S\left(1 + \frac{j}{m}\right), \quad A' = A\left(1 + \frac{j}{m}\right);$$

для p -срочной ренты с начислением процентов m раз в году (случай $p \neq m$)

$$S' = S\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p}, \quad A' = A\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p};$$

для годовой ренты с непрерывным начислением процентов

$$S' = Se^{\delta}, \quad A' = Ae^{\delta};$$

для p -срочной ренты с непрерывным начислением процентов

$$S' = Se^{\delta/p}, \quad A' = Ae^{\delta/p}.$$

Часть II. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ЖИЗНИ

2.1. Функция выживания

В некоторых видах страхования (страхование жизни, пенсионное страхование) актуарные расчеты должны учитывать продолжительность жизни клиентов. Очевидно, что о моменте смерти конкретного человека, как правило, трудно сказать что-либо определенное. Однако если рассматривается достаточно большая однородная группа людей, то для нее уже будут справедливы закономерности, присущие массовым случайным явлениям, например, устойчивость частот. Поэтому можно говорить о продолжительности жизни как о случайной величине T , причем $T \geq 0$. Естественно предположить, что T – непрерывная случайная величина.

Исчерпывающей характеристикой случайной величины T (продолжительности жизни) является ее функция распределения

$$F(x) = P(T < x).$$

В актуарной математике обычно вместо функции распределения используют *функцию выживания* (*функцию дожития*)

$$s(x) = 1 - F(x).$$

Заметим, что $s(x) = P(T \geq x)$ – вероятность того, что наугад выбранный человек доживет до возраста x лет.

Функция выживания обладает следующими свойствами:

- 1) $s(x)$ не возрастает при $x \geq 0$;
- 2) $s(0) = 1$;
- 3) $s(+\infty) = 0$;
- 4) $s(x)$ непрерывна.

Типичный график функции выживания изображен на рис. 2.

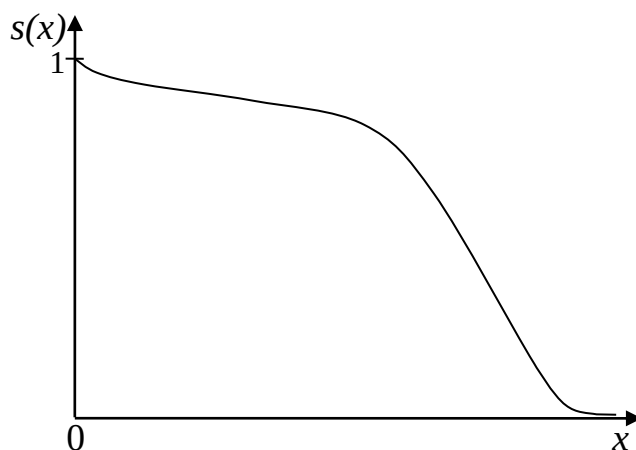


Рис. 2

Замечание 2.1. Естественно считать, что существует некоторый предельный возраст ω и соответственно $s(x) = 0$ при $x > \omega$. Однако при описании смертности аналитическими законами обычно полагают, что время жизни неограниченно, но функция $s(x)$ очень быстро убывает с ростом x , так что $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha s(x) = 0$ при любом $\alpha \in \mathbf{R}$.

Пусть наблюдается группа из l_0 новорожденных (как правило $l_0 = 100\,000$). Будем обозначать через $L(x)$ число лиц в группе, которые доживут до возраста x . Характеристика $L(x)$ представляет собой случайную величину. Обозначим через l_x ее математическое ожидание:

$$l_x = M[L(x)].$$

Припишем всем лицам в группе номера $j = 1, 2, \dots, l_0$ и заметим, что

$$L(x) = \sum_{j=1}^{l_0} I_j(x),$$

где $I_j(x)$ – индикатор дожития до возраста x для лица с номером j , т.е.

$$I_j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если лицо с номером } j \text{ доживёт до возраста } x, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Так как $M[I_j(x)] = s(x)$, то

$$l_x = \sum_{j=1}^{l_0} M[I_j(x)] = l_0 s(x). \quad (2.1)$$

Отсюда

$$s(x) = l_x / l_0,$$

т.е. функция выживания $s(x)$ равна средней доле доживших до возраста x из некоторой фиксированной группы новорожденных.

Пример 2.1. Проверить, обладают ли функции

$$1) s(x) = e^{x-0,7(2^x-1)},$$

$$2) s(x) = \frac{1}{(1+x)^2},$$

$$3) s(x) = e^{-x^2}$$

свойствами функции выживания.

Решение. Для всех трех функций $s(0) = 1$, $s(+\infty) = 0$. Кроме того, очевидно, все три функции непрерывны. Таким образом, ключевым является вопрос о невозрастании этих функций при $x \geq 0$.

Функции 2 и 3, очевидно, убывающие.

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = x - 0,7(2^x - 1)$ (показатель функции 1). Находим ее производную

$$\varphi'(x) = 1 - 0,7 \cdot 2^x \ln 2.$$

Заметим, что $\varphi'(0) = 1 - 0,7 \cdot \ln 2 > 0$, и следовательно, $\varphi(x)$ не может быть невозрастающей при $x \geq 0$ функцией. Значит, функция 1 тоже не является невозрастающей при $x \geq 0$. Таким образом, только функции 2 и 3 обладают всеми четырьмя указанными выше свойствами функции выживания. •

Пример 2.2. В таблице приведены значения функции выживания:

x	$s(x)$	x	$s(x)$	x	$s(x)$	x	$s(x)$
0	1,000	30	0,975	60	0,837	90	0,142
5	0,985	35	0,958	65	0,771	95	0,050
10	0,983	40	0,949	70	0,682	100	0,012
15	0,982	45	0,936	75	0,568	105	0,002
20	0,977	50	0,915	80	0,432	110	0
25	0,971	55	0,883	85	0,280		

Вычислить среднее значение и дисперсию числа представителей исходной группы в $l_0 = 1000$ новорожденных, которые умрут в возрасте от 50 до 70 лет.

Решение. Используем обозначения, введенные в этом пункте. Среднее значение числа представителей исходной группы, которые умрут в возрасте от 50 до 70 лет, – это математическое ожидание случайной величины $L(50) - L(70)$. Находим его:

$$\begin{aligned} M[L(50) - L(70)] &= l_{50} - l_{70} = l_0 (s(50) - s(70)) = 1000(0,915 - 0,682) = \\ &= 1000 \cdot 0,233 = 233 \text{ чел.} \end{aligned}$$

Заметим, что

$$L(50) - L(70) = \sum_{j=1}^{l_0} (I_j(50) - I_j(70)).$$

Это сумма независимых в совокупности одинаково распределенных случайных величин $I_j(50) - I_j(70)$ ($j = 1, \dots, l_0$). Каждая из этих величин распределена по следующему закону:

$I_j(50) - I_j(70)$	0	1
P	$1 - (s(50) - s(70))$	$s(50) - s(70)$

Очевидно, что случайная величина $(I_j(50) - I_j(70))^2$ имеет тот же закон распределения, что и величина $I_j(50) - I_j(70)$. Поэтому

$$M[I_j(50) - I_j(70)]^2 = M[I_j(50) - I_j(70)] = s(50) - s(70).$$

Находим дисперсию случайной величины $I_j(50) - I_j(70)$:

$$D[I_j(50) - I_j(70)] = M[I_j(50) - I_j(70)]^2 - M^2[I_j(50) - I_j(70)] = \\ = s(50) - s(70) - (s(50) - s(70))^2.$$

Вычисляем дисперсию случайной величины $L(50) - L(70)$:

$$D[L(50) - L(70)] = \sum_{j=1}^{l_0} D[I_j(50) - I_j(70)] = \\ = l_0 (s(50) - s(70) - (s(50) - s(70))^2) = \\ = 1000 \cdot (0,915 - 0,682 - (0,915 - 0,682)^2) = 1000 \cdot (0,233 - 0,233^2) = 178,711. \bullet$$

2.2. Кривая смертей

Пусть $f(x)$ – плотность вероятностей случайной величины T (продолжительности жизни). В актуарной математике график $f(x)$ называют *кривой смертей*.

Свойства функции $f(x)$:

- 1) $f(x) \equiv 0$ при $x < 0$;
- 2) $\int_0^{+\infty} f(x) dx = 1$;
- 3) $f(x) \geq 0$ при $x > 0$;
- 4) $f(x) = -s'(x)$, если $s(x)$ – дифференцируемая функция.

Пусть d_x – среднее число представителей исходной группы в l_0 новорожденных, умерших в возрасте от x до $x + 1$ лет. С учетом (2.1) получаем

$$d_x = l_x - l_{x+1} = l_0 (s(x) - s(x + 1)). \quad (2.2)$$

Если $s(x)$ – дифференцируемая на интервале $(x, x + 1)$ функция, то в силу формулы конечных приращений Лагранжа

$$s(x) - s(x + 1) = -s'(c) = f(c),$$

где $c \in (x, x + 1)$. Если считать, что функция $f(x)$ почти не меняется в течение года, то

$$s(x) - s(x + 1) \approx f(x).$$

Отсюда и из (2.2) вытекает

$$d_x \approx l_0 f(x).$$

Функция выживания может быть восстановлена по плотности:

$$s(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt. \quad (2.3)$$

Пример 2.3. Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a^2} e^{-x/a} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0 \end{cases}$$

($a > 0$) может рассматриваться как плотность продолжительности жизни T .

Решение. Поскольку $f(x) = 0$ при $x < 0$ и $f(x) > 0$ при $x > 0$, то $f(x)$ может рассматриваться как плотность неотрицательной случайной величины T тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{a^2} \int_0^{+\infty} x e^{-x/a} dx = -\frac{x}{a} e^{-x/a} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-x/a} dx = -e^{-x/a} \Big|_0^{+\infty} = 1.$$

Таким образом, функция $f(x)$ может рассматриваться как плотность продолжительности жизни T . •

2.3. Интенсивность смертности

Найдем вероятность того, что лицо, достигшее возраста x , умрет в промежутке $[x, x+t)$:

$$\begin{aligned} P(x \leq T < x+t | T \geq x) &= \frac{P(x \leq T < x+t, T \geq x)}{P(T \geq x)} = \\ &= \frac{P(x \leq T < x+t)}{P(T \geq x)} = \frac{F(x+t) - F(x)}{s(x)}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Предположим, что $F(x)$ — дифференцируемая функция и величина t мала. Тогда

$$F(x+t) - F(x) \approx F'(x)t = f(x)t.$$

С учетом этого из (2.4) получаем

$$P(x \leq T < x+t | T \geq x) \approx \frac{f(x)}{s(x)} \cdot t.$$

Величина

$$\mu_x = \frac{f(x)}{s(x)}$$

называется *интенсивностью смертности*.

Таким образом, при малом t

$$P(x \leq T < x+t | T \geq x) \approx \mu_x t.$$

Замечание 2.2. Легко видеть, что

$$\mu_x = -\frac{s'(x)}{s(x)} = -(\ln s(x))'.$$

Отметим основные свойства функции μ_x :

1) $\mu_x \geq 0$;

2) $s(x) = e^{-\int_0^x \mu_t dt}$.

Доказательство. С учетом замечания 2.2 получаем

$$\int_0^x \mu_t dt = -\ln s(t) \Big|_0^x = -\ln s(x) + \ln s(0) = -\ln s(x). \quad (2.5)$$

Отсюда следует доказываемое равенство. ◀

3) $F(x) = 1 - e^{-\int_0^x \mu_t dt}$.

4) $\int_0^{+\infty} \mu_x dx = +\infty$.

Доказательство. В (2.5) переходим к пределу при $x \rightarrow +\infty$. С учетом того, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} s(x) = 0$, получаем доказываемое равенство. ◀

Поскольку функция выживания может быть восстановлена по интенсивности смертности (свойство 2), то интенсивность смертности может быть использована в качестве первичной характеристики продолжительности жизни.

Пример 2.4. Пусть плотностью вероятностей продолжительности жизни T является функция $f(x)$ из примера 2.3. Найти интенсивность смертности μ_x .

Решение. Найдем сначала функцию выживания:

$$\begin{aligned} s(x) &= \int_x^{+\infty} f(t) dt = \frac{1}{a^2} \int_x^{+\infty} t e^{-t/a} dt = -\frac{t}{a} e^{-t/a} \Big|_x^{+\infty} + \frac{1}{a} \int_x^{+\infty} e^{-t/a} dt = \\ &= \frac{x}{a} e^{-x/a} - e^{-t/a} \Big|_x^{+\infty} = \frac{x+a}{a} e^{-x/a}. \end{aligned}$$

Теперь

$$\mu_x = \frac{f(x)}{s(x)} = \frac{\frac{x}{a^2} e^{-x/a}}{\frac{x+a}{a} e^{-x/a}} = \frac{x}{a(x+a)}.$$

2.4. Макрохарактеристики продолжительности жизни

С практической точки зрения важны следующие характеристики продолжительности жизни:

- *среднее время жизни*

$$e_0 = M(T) = \int_0^{+\infty} x f(x) dx;$$

- *дисперсия времени жизни*

$$D(T) = M[T - M(T)]^2 = M(T^2) - M^2(T),$$

где

$$M(T^2) = \int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx;$$

- *медиана времени жизни* $m(0)$, которая определяется как корень уравнения

$$s(x) = 0,5.$$

Замечание 2.3. В силу формулы (2.1)

$$l_{m(0)} = 0,5l_0.$$

Таким образом, медиана времени жизни – это возраст, до которого доживает ровно половина представителей исходной группы новорожденных.

Выразим среднее время жизни через функцию выживания. Учитывая, что $f(x) = -s'(x)$ (свойство 4 функции $f(x)$), и применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$e_0 = - \int_0^{+\infty} x s'(x) dx = - x s(x) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} s(x) dx.$$

В силу замечания 2.1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x s(x) = 0$. Таким образом,

$$e_0 = \int_0^{+\infty} s(x) dx. \quad (2.6)$$

При выражении дисперсии времени жизни через функцию $s(x)$ приходится вычислять интеграл

$$M(T^2) = \int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx.$$

Так же как и при выводе формулы (2.6) получаем

$$M(T^2) = 2 \int_0^{+\infty} x s(x) dx.$$

Пример 2.5. Для некоторой популяции

$$l_x = \frac{l_0}{(1+kx)^2}, \quad x \geq 0,$$

где k – положительный параметр. Вычислить среднее время жизни.

Решение. Находим функцию выживания (см. п. 2.1):

$$s(x) = \frac{l_x}{l_0} = \frac{1}{(1+kx)^2}.$$

В силу формулы (2.6)

$$e_0 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+kx)^2} = -\frac{1}{k(1+kx)} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{k}.$$

2.5. Остаточное время жизни

Страховая компания имеет дело с конкретными людьми, дожившими до определенного возраста. Статистические свойства времени жизни таких людей существенно отличаются от свойств времени жизни новорожденных. Если человек в возрасте x лет обратился в страховую компанию (в актуарной математике такого человека обозначают (x)), то заведомо известно, что он дожил до x лет, и поэтому все случайные события, связанные с этим человеком, должны рассматриваться при условии, что $T \geq x$.

Для человека в возрасте x лет обычно рассматривают не продолжительность жизни T , а остаточное время жизни $T_x = T - x$. Найдем функцию распределения случайной величины T_x , которая является условной функцией распределения величины $T - x$ при условии, что $T \geq x$:

$$\begin{aligned} F_x(t) &= P(T_x < t) = P(T - x < t | T \geq x) = \frac{P(x \leq T < x+t)}{P(T \geq x)} = \\ &= \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} \end{aligned} \quad (2.7)$$

(здесь была учтена формула (2.1)).

Пусть $s_x(t)$ – соответствующая функция выживания, т.е. $s_x(t) = 1 - F_x(t)$. Используя (2.7), получаем

$$s_x(t) = 1 - \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_{x+t}}{l_x}. \quad (2.8)$$

Дифференцированием (2.7) по t находим плотность случайной величины T_x :

$$f_x(t) = \frac{f(x+t)}{1 - F(x)} = \frac{f(x+t)}{s(x)}, \quad 0 \leq t < \infty. \quad (2.9)$$

2.6. Основные величины, связанные с остаточным временем жизни

В актуарной математике используют следующие величины:

${}_t q_x$ – вероятность того, что человек возраста x лет не доживет до возраста $x+t$ лет:

$${}_t q_x = P(T_x < t) = F_x(t);$$

${}_t p_x$ – вероятность того, что человек возраста x лет доживет, по крайней мере, до возраста $x+t$ лет:

$${}_t p_x = P(T_x \geq t) = s_x(t).$$

С учетом формул (2.7) и (2.8) имеем

$${}_t q_x = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}, \quad (2.10)$$

$${}_t p_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_{x+t}}{l_x}. \quad (2.11)$$

Случай $t=1$ играет особую практическую роль и встречается наиболее часто. В этом случае передние индексы у ${}_t q_x$ и ${}_t p_x$ опускаются. Таким образом, символ q_x обозначает вероятность того, что человек возраста x лет умрет в течение ближайшего года:

$$q_x = P(T_x < 1),$$

а символ p_x – вероятность того, что человек возраста x лет проживет еще, по крайней мере, один год:

$$p_x = P(T_x \geq 1).$$

Из общих формул (2.10) и (2.11) получаем

$$q_x = \frac{s(x) - s(x+1)}{s(x)} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x},$$

$$p_x = \frac{s(x+1)}{s(x)} = \frac{l_{x+1}}{l_x}.$$

С помощью вероятностей p_x можно вычислить и более сложные вероятности ${}_t p_x$:

$${}_t p_x = p_x p_{x+1} \cdots p_{x+t-1}. \quad (2.12)$$

Рассмотрим теперь более общее событие, заключающееся в том, что человек возраста x проживет еще t лет, но умрет на протяжении последующих u лет. Его вероятность обозначается ${}_{t|u} q_x$:

$${}_{t|u} q_x = P(t \leq T_x < t+u).$$

Заметим, что

$${}_t|_u q_x = P(T_x < t + u) - P(T_x < t) = {}_{t+u}q_x - {}_t q_x, \quad (2.13)$$

а также

$${}_t|_u q_x = P(T_x \geq t) - P(T_x \geq t + u) = {}_t p_x - {}_{t+u} p_x. \quad (2.14)$$

Из (2.13) и (2.10) получаем

$${}_t|_u q_x = \frac{s(x) - s(x + t + u)}{s(x)} - \frac{s(x) - s(x + t)}{s(x)} = \frac{s(x + t) - s(x + t + u)}{s(x)}. \quad (2.15)$$

Случай $u = 1$ представляет особый интерес для практики страхования жизни. Как обычно, этот индекс принято опускать. Таким образом, ${}_t| q_x$ — это вероятность того, что человек возраста x лет проживет еще t лет, но умрет на протяжении следующего года. Согласно формулам (2.13)–(2.15) имеем

$${}_t| q_x = {}_{t+1}q_x - {}_t q_x = {}_t p_x - {}_{t+1} p_x = \frac{s(x + t) - s(x + t + 1)}{s(x)}. \quad (2.16)$$

Пример 2.6. Известно, что

$$\mu_{x+t} = \frac{1}{85-t} + \frac{3}{105-t}, \quad 0 < t < 85.$$

Вычислить ${}_{20}p_x$.

Решение. В силу (2.11)

$${}_{20}p_x = \frac{s(x + 20)}{s(x)}.$$

Выразив функцию выживания через интенсивность смертности (см. п. 2.3), отсюда получаем:

$$\begin{aligned} {}_{20}p_x &= \frac{e^{-\int_0^{x+20} \mu_u du}}{e^{-\int_0^x \mu_u du}} = e^{-\int_x^{x+20} \mu_u du} = e^{-\int_0^{20} \mu_{x+t} dt} = e^{-\int_0^{20} \left(\frac{1}{85-t} + \frac{3}{105-t} \right) dt} = e^{(\ln(85-t) + 3\ln(105-t)) \Big|_0^{20}} = \\ &= e^{\ln 65 + 3\ln 85 - \ln 85 - 3\ln 105} = \frac{65 \cdot 85^3}{85 \cdot 105^3} \approx 0,4057. \bullet \end{aligned}$$

Пример 2.7. Используя таблицу значений функции выживания из примера 2.2, определить вероятность ${}_{40|10}q_{20}$ того, что остаточное время жизни человека, которому сейчас 20 лет, лежит в промежутке от 40 до 50 лет.

Решение. Согласно формуле (2.15),

$${}_{40|10}q_{20} = \frac{s(60) - s(70)}{s(20)} = \frac{0,837 - 0,682}{0,977} \approx 0,16. \bullet$$

Пример 2.8. Предположим, что в возрасте от 30 до 33 лет интенсивность смертности описывается формулой $\mu_x = 0,001x$. Вычислить ${}_2| q_{30}$.

Решение. В силу формулы (2.16)

$${}_2|q_{30} = \frac{s(32) - s(33)}{s(30)}.$$

Находим функцию выживания (см. п. 2.3):

$$s(x) = e^{-\int_0^x \mu_t dt} = e^{-\int_0^x 0,001t dt} = e^{-0,001 \frac{t^2}{2} \Big|_0^x} = e^{-0,0005x^2}.$$

Таким образом,

$${}_2|q_{30} = \frac{e^{-0,512} - e^{-0,5445}}{e^{-0,45}} = e^{-0,062} - e^{-0,0945} \approx 0,03. \bullet$$

2.7. Макрохарактеристики остаточного времени жизни

Математическое ожидание остаточного времени жизни человека в возрасте x лет (т.е. случайной величины T_x) называется *средним оста-*

точным временем жизни и обозначается e_x :

$$e_x = M(T_x) = \int_0^{+\infty} t f_x(t) dt.$$

Выразим e_x через $s(x)$. Используя формулу (2.9) и формулу интегрирования по частям, получаем

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{1}{s(x)} \int_0^{+\infty} t f(x+t) dt = \frac{1}{s(x)} \left(-ts(x+t) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} s(x+t) dt \right) = \\ &= \frac{1}{s(x)} \int_0^{+\infty} s(x+t) dt = \frac{1}{s(x)} \int_x^{+\infty} s(u) du \end{aligned} \quad (2.17)$$

(здесь мы учли также, что $f(x+t) = -s'(x+t)$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} ts(x+t) = 0$).

Дисперсия остаточного времени жизни находится, как обычно, по формуле

$$D(T_x) = M(T_x^2) - M^2(T_x) = M(T_x^2) - \left(e_x \right)^2.$$

При этом, так же как и при выводе формулы (2.17) устанавливается, что

$$M(T_x^2) = \int_0^{+\infty} t^2 f_x(t) dt = \frac{2}{s(x)} \int_0^{+\infty} ts(x+t) dt.$$

Пример 2.9. Предположим, что функция выживания имеет вид:

$$s(x) = \sqrt{1 - \frac{x}{110}}, \quad 0 \leq x \leq 110.$$

Найти среднее остаточное время жизни человека возраста 50 лет.

Решение. В силу формулы (2.17)

$$\begin{aligned} e_{50} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{50}{110}}} \cdot \int_{50}^{110} \sqrt{1 - \frac{u}{110}} du = \frac{1}{\sqrt{6/11}} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-110) \cdot \left(1 - \frac{u}{110}\right)^{3/2} \Big|_{50}^{110} = \\ &= -\frac{220}{3\sqrt{6/11}} \cdot \left(0 - \left(1 - \frac{50}{110}\right)^{3/2}\right) = 40. \bullet \end{aligned}$$

2.8. Округленное остаточное время жизни

Величина $K_x = [T_x]$ (целая часть T_x) называется *округленным остаточным временем жизни*. Найдем закон распределения случайной величины K_x .

Округленное остаточное время жизни может принимать значения 0, 1, 2, Пусть k – какое-либо значение случайной величины K_x . Очевидно, что событие $\{K_x = k\}$ эквивалентно событию $\{k \leq T_x < k+1\}$. Поэтому

$$P(K_x = k) = P(k \leq T_x < k+1) = {}_k q_x.$$

В силу (2.16)

$$P(K_x = k) = \frac{s(x+k) - s(x+k+1)}{s(x)} = \frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_x}. \quad (2.18)$$

В частности, $K_0 = [T]$ – округленное время жизни. Его закон распределения определяется формулой

$$P(K_0 = k) = s(k) - s(k+1) = \frac{l_k - l_{k+1}}{l_0}.$$

Математическое ожидание случайной величины K_x называется *средней округленной продолжительностью жизни* и обозначается e_x :

$$e_x = M(K_x) = \sum_{k=1}^{\infty} k P(K_x = k).$$

Выразим e_x через $s(x)$ (используем при этом формулу (2.18)):

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{1}{s(x)} \sum_{k=1}^{\infty} k [s(x+k) - s(x+k+1)] = \frac{1}{s(x)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k s(x+k) - \sum_{k=1}^{\infty} k s(x+k+1) \right) = \\ &= \frac{1}{s(x)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k s(x+k) - \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) s(x+k) \right) = \frac{1}{s(x)} \sum_{k=1}^{\infty} s(x+k). \end{aligned}$$

С учетом (2.11) последнюю формулу можно переписать с использованием вероятностей ${}_k p_x$:

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x.$$

Имеет место также следующая формула:

$$e_x = p_x(1 + e_{x+1}). \quad (2.19)$$

Доказательство. $e_x = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x = p_x + \sum_{k=2}^{\infty} {}_k p_x = p_x + \sum_{k=2}^{\infty} p_x \cdot {}_{k-1} p_{x+1} =$
 $= p_x + p_x \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_{x+1} = p_x + p_x e_{x+1} = p_x(1 + e_{x+1}). \blacktriangleleft$

Пример 2.10. Известно, что

$$e_{75} = 10,5, \quad e_{76} = 10,0, \quad e_{77} = 9,5.$$

Найти вероятность того, что человек в возрасте 75 лет доживет до 77 лет.

Решение. Из (2.19) получаем

$$p_x = \frac{e_x}{1 + e_{x+1}}.$$

Следовательно, мы можем найти p_{75} и p_{76} :

$$p_{75} = \frac{10,5}{11}, \quad p_{76} = \frac{10}{10,5}.$$

В силу формулы (2.12) имеем:

$${}_2 p_{75} = p_{75} \cdot p_{76} = \frac{10}{11} \approx 0,909. \bullet$$

Часть III. АКТУАРНЫЕ РАСЧЕТЫ В СТРАХОВАНИИ ЖИЗНИ

3.1. Сущность страхования. Страхование жизни

Целью страхования является обеспечение финансовой компенсации физическим и юридическим лицам потерь, касающихся жизни, здоровья, имущества, товаров, вкладов.

Участниками отношений в сфере страхования являются страховщик и страхователь.

Страховщик – специализированная организация, проводящая страхование.

Страхователь – физическое или юридическое лицо, уплачивающее страховые взносы и вступающее в конкретные страховые отношения со страховщиком.

Суть страхования состоит в том, что страхователь передает страховщику (страховой компании) за определенную плату (*страховую премию*) свой

риск. При наступлении *страхового случая* страховщик выплачивает страхователю или указанным им третьим лицам страховое возмещение (*страховую сумму*). Если страховой случай в течение действия договора не наступает, то страхователь не получает ничего. Таким образом, убытки одного лица, с которым произошел страховой случай, распределяются на большое число страхователей, с которыми в данный момент такой случай не произошел.

Выплата страховой суммы (или страховой премии) может иметь вид разового платежа, а может быть серией регулярных выплат (взносов), т.е. являться страховой рентой.

В страховом деле принято различать страхование жизни и виды страхования, не связанные со страхованием жизни. Риск, который страхуется в страховании жизни, относится к жизнедеятельности страхователя и определяется такими событиями, как смерть, болезнь, инвалидность, дожитие и т.п.

В страховании жизни различают *краткосрочное* (на срок не более 1 года) и *долгосрочное* (на срок более 1 года) *страхование*.

При краткосрочном страховании не учитывается изменение стоимости денег в течение периода действия договора (другими словами, не предусматривается инвестирование собранных премий). Этот вид страхования представляет собой скорее теоретический и методический интерес. В дальнейшем речь будет идти только о долгосрочном страховании жизни.

Страхование жизни обычно осуществляется в двух формах: страхование сумм (капитала) и страхование рент (аннуитетов). В первом случае при наступлении страхового события (смерти или дожития) выплачивается единовременно определенная сумма денег, во втором случае – страховщик производит регулярные выплаты в течение определенного периода времени или пожизненно.

3.2. Принцип эквивалентности финансовых обязательств. Нетто- и брутто-премии

Важнейшей задачей теории страхования является определение платы, которую должна назначить страховая компания за то, что принимает на себя тот или иной риск. Долгосрочное страхование характеризуется тем, что при расчетах принимается во внимание изменение стоимости денег с течением времени. Сопоставляя обязательства страховщика и страхователя, мы должны привести их к одному моменту времени с помощью дисконтирования по заданной процентной ставке i (называется *техническим процентом*). Для удобства в качестве такого момента времени выбирают момент заключения договора.

В общем случае финансовые обязательства страховщика (сумма страховых выплат) и страхователя (сумма взносов) представляют собой случайные величины, а следовательно, случайными величинами будут являться и современные стоимости этих обязательств.

При расчетах используются математические ожидания современных стоимостей обязательств сторон.

Математическое ожидание современной стоимости финансового обязательства называется его *актуарной современной стоимостью*.

В основе расчета размера страховых взносов лежит *принцип эквивалентности финансовых обязательств* страховщика и страхователя, который заключается в равенстве актуарных современных стоимостей этих обязательств:

Актуарная современная стоимость обязательств страхователя	=	Актуарная современная стоимость обязательств страховщика
--	---	---

Математически принцип эквивалентности финансовых обязательств сторон записывается как равенство математических ожиданий

$$M(Y) = M(Z),$$

где случайная величина Y – современная стоимость суммы всех взносов страхователя, случайная величина Z – современная стоимость суммы всех выплат страховщика.

Премия, рассчитанная на основании принципа эквивалентности финансовых обязательств сторон, называется *нетто-премией*. Нетто-премия предназначена для выполнения обязательств страховщика по выплате страховых возмещений.

Замечание 3.1. Если страхователь целиком уплачивает нетто-премию P в момент заключения договора (в этом случае P называется *единовременной (разовой) нетто-премией*), то актуарная современная стоимость его обязательства совпадает с P . Согласно принципу эквивалентности, в этом случае нетто-премия будет равна актуарной современной стоимости обязательств страховщика:

$$P = M(Z).$$

На практике премия, которая поступает страховой организации, превышает величину нетто-премии, так как включает помимо нетто-премии и так называемую *нагрузку*. Последняя охватывает все расходы по ведению дела и некоторую прибыль страховой организации. Сумма нетто-премии и нагрузки составляет *брутто-премию*.

Ниже мы рассмотрим вопрос о нахождении единовременных нетто-премий для различного вида договоров страхования жизни.

3.3. Страхование на чистое дожитие

Человек в возрасте x лет заключает со страховой компанией договор сроком на n лет, по которому компания обязуется выплатить застрахованному сумму S , если тот доживет до окончания срока договора. В случае смерти застрахованного в период действия контракта страховая сумма не выплачивается и премия не возвращается. Требуется рассчитать единове-

менную нетто-премию P , которая должна быть выплачена при заключении договора.

Согласно замечанию 3.1, $P = M(Z)$, где случайная величина Z – современная стоимость выплаты страховщика. Пусть случайная величина X – сумма, которую выплатит страховщик страхователю по окончании срока, на который был заключен договор. Эта случайная величина может принимать два значения: S с вероятностью ${}_n p_x$ и 0 с вероятностью ${}_n q_x$. Следовательно, $M(X) = {}_n p_x S$. Поскольку $Z = v^n X$, где $v^n = (1+i)^{-n}$ – дисконтный множитель по ставке i сложных процентов, то

$$M(Z) = v^n M(X) = v^n {}_n p_x S.$$

Таким образом,

$$P = v^n {}_n p_x S. \quad (3.1)$$

Формулу (3.1) можно получить другим способом. Предположим, что аналогичный договор сроком на n лет заключила со страховщиком группа из l_x страхователей в возрасте x лет. Если каждый страхователь внес взнос P , то первоначальная стоимость страхового фонда равна $l_x P$.

Суммарная выплата, которую должен осуществить страховщик по окончании срока контрактов, равна $l_{x+n} S$. Ее современная стоимость – $v^n l_{x+n} S$. Приравниваем современные стоимости обязательств сторон:

$$l_x P = v^n l_{x+n} S.$$

Отсюда, с учетом того, что $\frac{l_{x+n}}{l_x} = {}_n p_x$, получаем формулу (3.1).

Из формулы (3.1) видно, что нетто-премия каждого застрахованного меньше современной стоимости страховой суммы S , которая равна $v^n S$. Причина этого в том, что часть застрахованных, уплативших взносы не доживает до конца срока страхования, и их взносы перераспределяются между оставшимися в живых. С учетом этого обстоятельства взнос каждого из них уменьшается на соответствующую величину.

В актуарной математике все расчеты принято производить для страховой суммы, равной 1. При страховании на чистое дожитие сроком на n лет единовременная нетто-премия, рассчитанная для страховой суммы $S = 1$, обозначается $A_{x:\overline{n}|}^1$. Таким образом, в силу (3.1)

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = v^n {}_n p_x, \quad (3.2)$$

а для конкретной страховой суммы S величина соответствующей единовременной нетто-премии P находится по формуле

$$P = S \cdot A_{x:\overline{n}|}^1.$$

Для упрощения актуарных расчетов часто используют так называемые коммутационные функции, для которых составлены таблицы. В страховании на дожитие используется функция

$$D_x = v^x l_x. \quad (3.3)$$

Ее смысл следующий: если при рождении группы детей численностью l_0 их страхуют на дожитие с условием выплаты единичной страховой суммы по достижению возраста x , то формула (3.3) дает ожидаемую современную стоимость суммы страховых выплат, т.е. суммарную страховую премию. Перепишем формулу (3.2) с помощью функции D_x :

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{v^{x+n} l_{x+n}}{v^x l_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

3.4. Страхование рент

Страхование рент является разновидностью страхования на дожитие, когда вместо единовременной выплаты по дожитию до срока окончания договора предусмотрен ряд регулярных страховых выплат в течение некоторого периода времени или пожизненно (при условии дожития до сроков выплаты). В этом случае единовременная нетто-премия, которую уплачивает страхователь в момент заключения договора, равна актуарной современной стоимости соответствующей ренты.

Замечание 3.2. Ниже мы рассмотрим различные виды страховых рент, полагая при этом, что годовая выплата страховщика равна 1. Если актуарная современная стоимость какой-либо из таких рент равна a , то очевидно, что единовременная нетто-премия P для соответствующей ренты с годовой страховой выплатой, равной R , будет находиться по формуле

$$P = R \cdot a.$$

Обыкновенная пожизненная рента. Рассмотрим *обыкновенную пожизненную ренту*, которая выплачивается в конце каждого года с момента заключения договора (она называется также *пожизненной рентой постнумерандо*). Если такая рента покупается лицом в возрасте x лет, то выплаты по ней производятся в моменты времени

$$x+1, x+2, x+3, \dots$$

Найдем актуарную современную стоимость a_x рассматриваемой пожизненной ренты при условии, что величина ежегодной выплаты страховщика равна 1. Через ω будем обозначать предельный возраст в таблице смертности.

Пусть случайная величина X_k – страховая выплата, которую получит страхователь в конце k -го года ($k=1, 2, \dots, \omega-x$). Эта случайная величина может принимать два значения: 1 с вероятностью ${}_k p_x$ и 0 с вероятностью

${}_k q_x$. Поэтому $M(X_k) = {}_k p_x$. Случайная величина Z (современная стоимость суммы всех выплат страховщика) выражается через случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_{\omega-x}$ следующим образом:

$$Z = \sum_{k=1}^{\omega-x} v^k X_k.$$

Находим актуарную современную стоимость обязательств страховщика:

$$M(Z) = \sum_{k=1}^{\omega-x} v^k M(X_k) = \sum_{k=1}^{\omega-x} v^k {}_k p_x.$$

Следовательно,

$$a_x = \sum_{k=1}^{\omega-x} v^k {}_k p_x.$$

К этой формуле можно прийти также путем следующих рассуждений. Предположим, что в страховую компанию обратились l_x страхователей возраста x . Тогда в момент заключения контрактов суммарные поступления (премии) страховой компании составят $l_x a_x$. Эта сумма должна обеспечить пожизненные ежегодные выплаты для всех участников.

В конце первого года страховщик выплатит сумму l_{x+1} , в конце второго — l_{x+2} и т.д. до тех пор, пока будет жив хотя бы один страхователь. Последняя выплата будет осуществлена лицам в возрасте ω лет. Современная стоимость страховых выплат на момент заключения договора составит соответственно $v l_{x+1}, v^2 l_{x+2}, \dots, v^{\omega-x} l_{\omega}$.

Согласно принципу эквивалентности обязательств,

$$l_x a_x = v l_{x+1} + v^2 l_{x+2} + \dots + v^{\omega-x} l_{\omega}.$$

Отсюда следует, что

$$a_x = \sum_{k=1}^{\omega-x} v^k \cdot \frac{l_{x+k}}{l_x} = \sum_{k=1}^{\omega-x} v^k {}_k p_x.$$

Для упрощения актуарных расчетов по страхованию ренты используют коммутационную функцию

$$N_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} D_{x+k} = \sum_{k=x}^{\omega} D_k.$$

Запишем с помощью этой функции актуарную современную стоимость рассмотренной пожизненной ренты:

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}. \quad (3.4)$$

Приведенная пожизненная рента. Наряду с обыкновенной пожизненной рентой часто используется *приведенная пожизненная рента*, платежи по которой осуществляются в начале каждого года контракта, начиная с момента его заключения. Такую ренту называют еще *пожизненной рентой пренумерандо*.

Актuarную современную стоимость приведенной пожизненной ренты с единичной годовой выплатой обозначают $\ddot{a}_x$.

Рассуждая также, как и в случае ренты постнумерандо, получаем следующее уравнение баланса между поступлениями и выплатами:

$$l_x \ddot{a}_x = l_x + v l_{x+1} + v^2 l_{x+2} + \dots + v^{\omega-x} l_{\omega}.$$

Отсюда находим

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^k \cdot \frac{l_{x+k}}{l_x} = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^k {}_k p_x.$$

С помощью коммутационных функций эта актуарная стоимость запишется следующим образом:

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}.$$

Легко видеть, что между актуарными современными стоимостями двух типов пожизненных рент имеется простое соотношение

$$\ddot{a}_x = a_x + 1.$$

Отложенные пожизненные ренты. Срок действия *отложенных* рент начинается не сразу после заключения контракта, а спустя указанное в контракте число лет. Так, если контракт заключается лицом в возрасте x лет, а период отсрочки составляет m лет, то первая выплата будет произведена в возрасте $x + m + 1$ для обыкновенной ренты и в возрасте $x + m$ — для приведенной ренты.

Актуарные современные стоимости обыкновенной и приведенной отложенных на m лет пожизненных рент (с единичной годовой выплатой) обозначают символами ${}_m|a_x$ и ${}_m|\ddot{a}_x$ соответственно.

Дисконтируя общие суммы выплат, составим уравнение баланса

$$l_x \cdot {}_m|a_x = v^{m+1} l_{x+m+1} + \dots + v^{\omega-x} l_{\omega}.$$

Отсюда следует, что

$${}_m|a_x = \sum_{k=m+1}^{\omega-x} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} = \frac{N_{x+m+1}}{D_x}.$$

Аналогично выводится формула для актуарной современной стоимости приведенной отложенной на m лет пожизненной ренты:

$${}_m|\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{\omega-x} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} = \frac{N_{x+m}}{D_x}. \quad (3.5)$$

Очевидно, что имеет место следующее соотношение:

$${}_m|\ddot{a}_x = {}_m|a_x + v^m \cdot {}_m p_x.$$

Срочные ренты. *Срочная рента* представляет собой контракт, выплаты по которому производятся в течение n лет. Выплаты прекращаются, если застрахованный умирает.

Обыкновенная срочная рента, покупаемая лицом в возрасте x лет, определяется как серия выплат, производимых ежегодно при достижении возрастов $x+1$, $x+2$, ..., $x+n$ лет. Актуарная современная стоимость ренты такого вида (с единичной годовой выплатой) обозначается $a_{x;\overline{n}|}$.

Балансовое уравнение для данной ренты имеет следующий вид:

$$l_x \cdot a_{x;\overline{n}|} = v l_{x+1} + \dots + v^n l_{x+n}.$$

Отсюда получаем

$$a_{x;\overline{n}|} = \sum_{k=1}^n v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} = \frac{\sum_{k=1}^n D_{x+k}}{D_x} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}.$$

Актуарная современная стоимость приведенной срочной ренты обозначается $\ddot{a}_{x;\overline{n}|}$. Рассуждая так же, как и выше, выводим

$$\ddot{a}_{x;\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}. \quad (3.6)$$

Отложенные срочные ренты. Если выплаты срочной ренты по контракту отложены на заданное число лет, то такая рента называется отложенной срочной рентой. Более точно, если x – возраст страхователя, n – срок ренты, а m – период отсрочки, то:

для *обыкновенной* отложенной срочной ренты выплаты производятся при достижении возрастов $x+m+1$, $x+m+2$, ..., $x+m+n$ лет;

для *приведенной* отложенной срочной ренты выплаты производятся при достижении возрастов $x+m$, $x+m+1$, ..., $x+m+n-1$ лет.

Актуарные современные стоимости отложенных срочных рент (с единичной годовой выплатой) обозначаются ${}_m|a_{x;\overline{n}|}$ (для обыкновенной ренты) и ${}_m|\ddot{a}_{x;\overline{n}|}$ (для приведенной ренты).

Так же, как и выше, исходя из принципа эквивалентности финансовых обязательств сторон, можно получить следующие формулы:

$${}_m|a_{x;\overline{n}|} = \sum_{k=m+1}^{m+n} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x},$$

$${}_m|\ddot{a}_{x;\overline{n}|} = \sum_{k=m}^{m+n-1} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}.$$

Пример 3.1. Мужчина в возрасте 60 лет приобрел пожизненную ренту с выплатой 4000 рублей в конце каждого года. Эффективная процентная ставка $i = 5\%$. Найти стоимость полиса.

Решение. Стоимость полиса (единовременная нетто-премия) находится по формуле

$$P = 4000 \cdot a_{60},$$

где a_{60} – актуарная современная стоимость аналогичной ренты с единичной годовой выплатой. Согласно формуле (3.4),

$$a_{60} = N_{61}/D_{60}.$$

Числа N_{61} и D_{60} находим по таблице коммутационных чисел, соответствующей данной процентной ставке $i = 5\%$: $N_{61} = 41976,68$, $D_{60} = 3980,38$ (здесь и далее используем таблицу из книги [3]). Таким образом,

$$a_{60} = \frac{41976,68}{3980,38} \approx 10,545898, \quad P = 4000 \cdot 10,545898 \approx 42183,59 \text{ руб.} \bullet$$

Пример 3.2. Мужчина в возрасте 40 лет покупает за 50 000 рублей пожизненную ренту, выплаты которой начинаются с возраста 65 лет. Эффективная процентная ставка $i = 5\%$. Найти величину ежегодных выплат.

Решение. В данном случае имеется приведенная отложенная на 25 лет пожизненная рента. В силу замечания 3.2 величина годовой страховой выплаты R находится по формуле

$$R = \frac{50000}{{}_{25|}\ddot{a}_{40}}.$$

Согласно формуле (3.5),

$${}_{25|}\ddot{a}_{40} = \frac{N_{65}}{D_{40}}.$$

По таблице коммутационных чисел находим

$$N_{65} = 28648,16, \quad D_{40} = 12991,35.$$

Следовательно,

$${}_{25|}\ddot{a}_{40} = \frac{28648,16}{12991,35} \approx 2,2051719, \quad R = \frac{50000}{2,2051719} \approx 22673,97 \text{ руб.} \bullet$$

Пример 3.3. Известно, что

$$l_{30} = 96\,307, \quad l_{31} = 96\,117, \quad l_{32} = 95\,918.$$

Найти актуарную современную стоимость 3-летней срочной ренты, выплачиваемой раз в год в начале года в размере 10 000 рублей. Возраст человека на момент заключения договора – 30 лет. Эффективная годовая процентная ставка $i = 10\%$.

Решение. Искомая величина равна $10\,000 \cdot \ddot{a}_{30:\overline{3}|}$. В свою очередь, в силу формулы (3.6)

$$\ddot{a}_{30:\overline{3}|} = \frac{1}{l_{30}}(l_{30} + \nu l_{31} + \nu^2 l_{32}),$$

где $\nu = \frac{1}{1+i} = \frac{10}{11}$. Таким образом,

$$\ddot{a}_{30;\overline{3}|} = \frac{96\,307 + (10/11) \cdot 96\,117 + (10/11)^2 \cdot 95\,918}{96\,307} \approx 2,7304055,$$

$$10\,000 \cdot \ddot{a}_{30;\overline{3}|} = 10\,000 \cdot 2,7304055 = 27\,304,06 \text{ руб.} \bullet$$

3.5. Пожизненное страхование

Наряду со страхованием на дожитие весьма популярным является страхование жизни, когда страховая выплата осуществляется в случае смерти застрахованного. Рассмотрим случай пожизненного страхования. В полисе по данному виду страхования предусматривается страховая выплата в конце года смерти независимо от того, когда данный страховой случай произошел. Предполагаем, что договор заключается с лицом возраста x .

Найдем величину единовременной нетто-премии A_x , соответствующую единичной страховой сумме. Согласно замечанию 3.1, $A_x = M(Z)$, где случайная величина Z – современная стоимость выплаты страховщика. Пусть случайная величина X_k – сумма, которую выплатит страховщик в конце k -го года ($k = 1, 2, \dots, \omega - x + 1$). Эта случайная величина может принимать два значения: 1 с вероятностью ${}_{k-1|}q_x$ и 0 с вероятностью $1 - {}_{k-1|}q_x$. Следовательно,

$$M(X_k) = {}_{k-1|}q_x.$$

Так как $Z = \sum_{k=1}^{\omega-x+1} v^k X_k$, то

$$M(Z) = \sum_{k=1}^{\omega-x+1} v^k M(X_k) = \sum_{k=1}^{\omega-x+1} v^k {}_{k-1|}q_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^{k+1} {}_{k|}q_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^{k+1} {}_k p_x \cdot q_{x+k}.$$

Таким образом,

$$A_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^{k+1} {}_k p_x \cdot q_{x+k}.$$

Получим эту формулу другим способом. Пусть l_x лиц возраста x заключили договор на пожизненное страхование. Суммарные поступления страховой компании в момент заключения договора равны $l_x A_x$.

Спустя год в живых останутся только l_{x+1} лиц, а $d_x = l_x - l_{x+1}$ умрут в течение года. Считаем для простоты, что страховые выплаты осуществляются в конце года смерти застрахованного. Тогда современная стоимость выплат первого года страхования будет равна $v d_x$, второго – $v^2 d_{x+1}$, третьего – $v^3 d_{x+2}$ и т.д. (расчеты производятся для единичной суммы).

Современная стоимость страховых выплат по всем договорам составляет

$$\sum_{k=0}^{\omega-x} v^{k+1} d_{x+k} .$$

Таким образом, баланс между поступлениями и выплатами будет выполнен при условии, что

$$l_x A_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^{k+1} d_{x+k} .$$

Отсюда получаем

$$A_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^{k+1} \frac{d_{x+k}}{l_x} = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^{k+1} \frac{d_{x+k}}{l_{x+k}} \cdot \frac{l_{x+k}}{l_x} = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^{k+1} q_{x+k} \cdot p_x .$$

В актуарных расчетах по страхованию жизни вводятся следующие коммутационные функции:

$$C_x = v^{x+1} d_x, \quad M_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} C_{x+k} .$$

Формулу для A_x можно записать в следующем виде:

$$A_x = \frac{M_x}{D_x} .$$

Единовременная нетто-премия P при заключении контракта на пожизненное страхование со страховой суммой, равной S , определяется равенством

$$P = S \cdot A_x .$$

3.6. Страхование жизни на срок

В контрактах этого вида страхования фиксируется срок их действия. Если такой контракт заключен с лицом возраста x на срок n лет, то страховая сумма выплачивается только в том случае, если застрахованный умрет, не дожив до возраста $x+n$. При этом, как и выше, считаем, что страховая сумма выплачивается в конце года смерти застрахованного.

Полагая страховую сумму равной 1, найдем единовременную нетто-премию $A_{x;\overline{n}|}^1$ для контрактов этого вида. Повторив рассуждения предыдущего пункта, получим следующее уравнение баланса между поступлениями и выплатами:

$$l_x A_{x;\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} d_{x+k} .$$

Отсюда следует, что

$$A_{x;\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \frac{d_{x+k}}{l_x} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} C_{x+k}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} . \quad (3.7)$$

Единовременная нетто-премия P при страховании жизни на срок со страховой суммой S находится по формуле

$$P = S \cdot A_{x;\overline{n}|}^1.$$

Пример 3.4. Найти единовременную нетто-премию 5-летнего полиса страхования жизни на сумму 40 000 рублей для 30-летней женщины. Эффективная процентная ставка $i = 5\%$.

Решение. Единовременная нетто-премия P находится по формуле

$$P = 40000 \cdot A_{30;\overline{5}|}^1.$$

В силу (3.7)

$$A_{30;\overline{5}|}^1 = \frac{M_{30} - M_{35}}{D_{30}}.$$

По таблице коммутационных чисел находим

$$M_{30} = 2612,51, \quad M_{35} = 2466,77, \quad D_{30} = 22656,50.$$

Таким образом,

$$A_{30;\overline{5}|}^1 = \frac{2612,51 - 2466,77}{22656,50} \approx 0,00643259,$$

$$P = 40000 \cdot 0,00643259 \approx 257,30 \text{ руб.} \bullet$$

3.7. Смешанное страхование жизни

Этот вид страхования представляет собой комбинацию срочного страхования жизни и страхования на дожитие с тем же сроком. Страховая сумма выплачивается наследникам человека, заключившего контракт в возрасте x лет, в случае его смерти в возрасте от x до $x + n$ лет, или самому застрахованному, если он доживет до возраста $x + n$.

Единовременная нетто-премия такого страхования равна сумме единовременных нетто-премий страхования жизни на срок и страхования на дожитие. Таким образом, для единичных страховых выплат (в случае смерти и в случае дожития) единовременная нетто-премия $A_{x;\overline{n}|}$ по договору смешанного страхования жизни имеет вид:

$$A_{x;\overline{n}|} = A_{x;\overline{n}|}^1 + A_{x;\overline{n}|}^{\overline{1}}.$$

Используя коммутационные функции, формулу для $A_{x;\overline{n}|}$ можно записать в следующем виде:

$$A_{x;\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}.$$

Единовременная нетто-премия P для договора смешанного страхования жизни со страховой суммой S находится по формуле

$$P = S \cdot A_{x;\overline{n}|}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задачи к части I

1.1. Определить простую годовую процентную ставку, при которой первоначальный капитал в размере 2000 руб. достигнет через 90 дней 2060 руб. Способ расчета процентов – $365/360$.

1.2. На какой срок клиент банка может взять кредит в размере 100 тыс. руб. под простую процентную ставку 14% годовых с условием, чтобы величина возврата долга не превышала 110 тыс. руб.? Способ начисления процентов – $365/365$, год високосный.

1.3. Ссуда в размере 30 тыс. руб. выдана на 3 года и 160 дней под сложную процентную ставку 12% годовых. Определить сумму долга на конец срока общим и смешанным методами, используя схему $365/360$.

1.4. При заданной ставке сложных процентов 10 тыс. руб. прирастают до 15 тыс. руб. за 10 лет. Какой будет наращенная сумма в конце 6 года?

1.5. На вклад ежемесячно начисляются сложные проценты по номинальной годовой процентной ставке 10%. За какой срок первоначальный капитал увеличится в 2 раза?

1.6. Сумма в 10 тыс. руб. помещена на банковский депозит. Какой должна быть номинальная процентная ставка при ежемесячном начислении процентов, чтобы через три месяца наращенная сумма была равна 10,3 тыс. руб.?

1.7. Определить номинальную ставку с ежеквартальным начислением процентов, которая безубыточно заменит номинальную ставку 12% при ежемесячном начислении процентов.

1.8. Определить, какой должна быть номинальная ставка при ежеквартальном начислении процентов, чтобы обеспечить эффективную ставку в 12% годовых.

1.9. Через полгода после выдачи кредита должник обязан заплатить 2,14 тыс. руб. Какова сумма выданного кредита, если он выдан под простую процентную ставку 14% годовых? Чему равен дисконт?

1.10. Какой необходимо вложить капитал, чтобы получить 4 тыс. руб. через 5 лет наращением по сложным процентам по ставке 12% годовых, если наращение осуществляется: а) ежегодно; б) ежеквартально?

1.11. Определить доход банка при погашении векселя номиналом 10 тыс. руб. при его учете по простой ставке 4,5% за 135 дней до погашения.

1.12. При учете предъявленного векселя на сумму 15 тыс. руб. за 200 дней до срока его погашения доход банка составил 1,2 тыс. руб. Определите:

а) доходность этой финансовой операции для банка в виде простой годовой процентной ставки; б) по какой простой учетной ставке был учтен вексель. Расчетное число дней в году принимается равным 360.

1.13. Обязательство уплатить через 100 дней сумму долга в размере 5 тыс. руб. с начисляемыми на нее точными процентами по простой ставке 8% годовых было учтено за 25 дней до срока погашения по учетной ставке 5%. Определить сумму, полученную при учете обязательства.

1.14. Чему равна разница в стоимости при учете векселя номиналом 35 тыс. рублей за два с половиной года до погашения, если при дисконтировании использовать вместо сложной учетной ставки в 13,5% сложную процентную ставку той же величины?

1.15. Долговое обязательство было учтено за 2 года до срока погашения, при этом его владелец получил $\frac{4}{5}$ от написанной в нем суммы. По какой годовой номинальной учетной ставке было учтено это обязательство, если производилось: а) полугодовое дисконтирование; б) поквартальное дисконтирование?

1.16. За долговое обязательство в 8 тыс. руб. банком было выплачено 6,2 тыс. руб. За какое время до срока погашения было учтено это обязательство, если банком использовалась годовая сложная учетная ставка 12% годовых?

1.17. Определить номинальную учетную ставку, если годовая эффективная учетная ставка равна 13% годовых и учет осуществляется: а) каждые полгода; б) ежеквартально; в) ежемесячно.

1.18. Производственная фирма приняла решение о создании инвестиционного фонда. С этой целью в течение 3 лет в конце каждого года в банк вносится 100 тыс. руб. На взносы начисляются сложные проценты по ставке 12% годовых. Определить накопленную сумму к концу срока ренты.

1.19. Взносы в специальный пенсионный фонд вносятся в конце каждого квартала с ежеквартальным начислением процентов по номинальной ставке 12% годовых. Определить накопленную сумму и сумму начисленных процентов в фонде через 5 лет, если размер каждого взноса составляет 100 рублей.

1.20. По условиям договора о страховании платежи размером 10 тыс. руб. должны поступать в страховую компанию ежеквартально, образуя при этом ренту постнумерандо. Срок договора – 3 года. Банк, обслуживающий страховую компанию, начисляет проценты ежемесячно по ставке 8% годовых. Определить сумму накоплений по этому контракту.

1.21. Определить современную стоимость облигации (величину ренты), если купоны (платежи) выплачиваются в течение 4 лет в конце каждого года в размере 190 руб. и на них в конце каждого полугодия начисляются проценты по ставке 8% годовых.

1.22. В течение 7 лет один раз в конце года в фонд поступают средства по 850 руб. На них ежеквартально начисляются проценты по сложной ставке 15% годовых. Определить современную стоимость фонда.

1.23. Вкладчик намеревается положить в банк такую сумму, чтобы, снимая в конце каждого года по 10 тыс. руб., через пять лет израсходовать весь вклад. Определить сумму вклада, если известно, что банк ежегодно начисляет сложные проценты по ставке 12% годовых.

1.24. Предприятие решило в течение трех лет создать фонд для обеспечения инвестиций в сумме 100 тыс. руб. С этой целью планируется вносить в банк в конце каждого квартала одинаковые суммы. Банк в конце года начисляет 15% сложных годовых. Определить размер платежа для накопления указанной суммы.

1.25. Найти размер ежемесячных платежей постоянной ренты постнумерандо, современная стоимость которой 100 тыс. руб., срок 3 года. Проценты начисляются ежемесячно по номинальной ставке 12% годовых.

1.26. Должник обязался вернуть 1 млн. руб. равными ежегодными платежами в течение 20 лет. Каким должен быть размер одного платежа, если на остаток долга начисляются сложные проценты по ставке 10% годовых и выплаты образуют ренту постнумерандо?

1.27. Определить срок, за который сумма фонда составит 100 тыс. руб., если в фонд вносится по 10 тыс. руб. в конце каждого года и на них ежеквартально начисляются проценты по сложной ставке 8% годовых.

1.28. В фонд ежегодно поступают средства, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых, причем выплаты производятся одинаковыми суммами в конце каждого квартала, а проценты начисляются ежемесячно. Величина фонда на конец срока – 100 тыс. руб., годовая выплата – 10 тыс. руб. Определить срок ренты.

1.29. Долг в 200 тыс. руб. возвращается равными ежегодными платежами в 50 тыс. руб. Через какое время долг будет погашен, если на него ежегодно начисляются сложные проценты по ставке 12% годовых?

Задачи к части II

2.1. Функция выживания задана формулой

$$s(x) = \sqrt{1 - \frac{x}{100}}, \quad 0 \leq x \leq 100.$$

Найти интенсивность смертности в возрасте 30 лет.

2.2. Функция выживания задана формулой

$$s(x) = \frac{1}{(1+x)^4}, \quad x \geq 0.$$

Найти среднюю продолжительность жизни для лица возраста 41 год.

2.3. Пусть плотность продолжительности жизни задается формулой

$$f(x) = \frac{1}{20\sqrt{100-x}}, \quad 0 \leq x < 100.$$

Найти вероятность того, что (69,75) умрет в течение следующих 10 лет.

2.4. Плотность продолжительности жизни имеет вид

$$f(x) = Ae^{-x/2}.$$

Найти: а) функцию выживания; б) дисперсию времени жизни.

2.5. Пусть

$$\mu_x = \frac{1}{4+x}, \quad x \geq 0.$$

Какова вероятность того, что возраст смерти новорожденного больше 5?

2.6. Известно, что

$$l_x = \frac{1}{(k+x)^3}, \quad x \geq 10,$$

и ожидаемый возраст смерти для (40) равен 63 годам. Найти k .

2.7. Интенсивность смертности

$$\mu_x = \frac{3}{110-x} + \frac{2}{150-x}, \quad 0 \leq x < 110.$$

Найти ${}_{70}p_{10}$.

2.8. Пусть $\mu_x = \frac{1}{2+2x}$, $x \geq 0$. Найти ${}_9q_{15}$.

2.9. Пусть $\mu_x = \frac{3}{200-2x}$, $0 \leq x < 100$. Найти ${}_{28|11}q_{36}$.

2.10. Известно, что

$${}_x\mu_x = 0,01 \quad (0 \leq x \leq \omega), \quad {}_5p_{25} = \frac{12}{13}.$$

Найти e_{31} .

2.11. Имеется 50 000 новорожденных, причем ${}_x\mu_x = \text{const}$, $0 \leq x < \omega$.

Известно, что

$$\frac{d^6}{dx^6} \mu_x = \frac{45}{8} \quad \text{при } x=58.$$

Найти ожидаемое число выживших в возрасте 42 года.

2.12. Пусть

$$\int_{10}^{+\infty} {}_t p_{50} dt = 15, \quad \int_0^{+\infty} {}_t p_{60} dt = 20.$$

Найти ${}_{10} p_{50}$.

2.13. Пусть интенсивность смертности $\mu_x \equiv 1$. Найти $M(\{T\})$, где $\{T\}$ – дробная часть будущей продолжительности жизни.

2.14. Известно, что $\mu_x = A + e^{2x}$, $x \geq 0$. Определить значение параметра A , если ${}_{0,4} p_0 = 0.50$.

2.15. Пусть величина ${}_t p_x \cdot \mu_{x+t}$ убывает при $t \in [0, 1]$. Доказать, что $q_x < \mu_x$.

2.16. Для некоторого возраста x известно, что

$${}_t p_x = 1 - \left(\frac{t}{100} \right)^{1,5} \text{ при } 0 < t < 100.$$

Вычислить e_x .

2.17. Для некоторого возраста x известно, что

$${}_t p_x = 1 - 0,6t + 0,12t^2 - 0,008t^3 \text{ при } 0 \leq t \leq 5.$$

Найти μ_{x+3} .

2.18. Известно, что

$${}_t p_x = \frac{100 - x - t}{100 - x}, \quad x \in [0, 100), \quad t \in [0, 100 - x].$$

Найти μ_{45} .

2.19. Известно, что

$$\frac{1}{k} q_x = \frac{2}{1 + 4k} \text{ при } k > 100.$$

Найти μ_x .

2.20. Пусть $\mu_{x+t} = \text{const}$ при $t \in [0, 1]$, $q_x = 0,16$. Найти такое t , что ${}_t p_x = 0,95$.

2.21. Дана таблица

x	e_x
63	9,5
64	9,0
65	8,5

Найти вероятность того, что (63) не доживет до 65 лет.

2.22. Известно, что ${}_n p_{20} = \frac{e_{20}}{5 \cdot 2^n}$, $n = 1, 2, 3, 4$. Найти e_{24} .

□ *Гипотеза Балдуччи* между возрастами n и $n + 1$ состоит в том, что на промежутке $[n, n + 1]$ величина $\frac{1}{s(x)}$ меняется по линейному закону.

2.23. Пусть гипотеза Балдуччи имеет место между возрастами n и $n + 1$. Показать, что

$$\frac{1}{s(n + \tau)} = \frac{1 - \tau}{s(n)} + \frac{\tau}{s(n + 1)} \text{ при } \tau \in [0, 1].$$

2.24. Пусть гипотеза Балдуччи имеет место между возрастами 30 и 31. Известно, что

$$q_{30} = 0,1, \quad \frac{1}{k} q_{30,5} = \frac{1}{39}.$$

Найти k .

Задачи к части III

3.1. Определить актуарную современную стоимость единичной страховой суммы при страховании на дожитие сроком на 5 лет для мужчины в возрасте 40 лет. Эффективная процентная ставка $i = 5\%$.

3.2. Женщина в возрасте 60 лет решила приобрести себе за 20 000 руб. пожизненную приведенную ренту. Какова величина годовых выплат по этой ренте? Эффективная процентная ставка $i = 5\%$.

3.3. Определить величину взноса родителей при рождении ребенка (мальчика) по договору страхования на дожитие. По достижении 18 лет юноше предполагается выплата суммы в размере 30 000 руб. Эффективная процентная ставка $i = 5\%$.

3.4. Найти стоимость пожизненной ренты с годовыми выплатами в 10 тыс. руб. для лица в возрасте 50 лет. Рассмотреть случаи обыкновенной и приведенной рент. Эффективная процентная ставка $i = 5\%$.

3.5. Внук получил в наследство от дедушки 100 000 у.е. По договору наследования эти деньги необходимо перевести в пожизненную страховую ренту с постоянными выплатами. Какую ежегодную выплату будет получать внук, если выплаты начинаются с 18 лет? Эффективная процентная ставка $i = 5\%$.

3.6. Родители решают обеспечить образование за рубежом своих 20-летних детей-близнецов (сына и дочери) путем покупки полиса приведенной срочной ренты. Определить для каждого из детей стоимость 5-летней страховой ренты с ежегодными выплатами по 10 000 у.е.? Эффективная процентная ставка $i = 5\%$.

3.7. Мужчина в возрасте 55 лет приобрел 5-летнюю страховую ренту, выплачиваемую раз в год в конце года в размере 3000 руб. Найти актуарную современную стоимость этой ренты. Эффективная процентная ставка $i = 5\%$.

3.8. Вычислить актуарные современные стоимости приведенных 3-летних страховых рент для 50-летних мужчины и женщины. Эффективная процентная ставка $i = 5\%$.

3.9. Рассчитать стоимость 5-летней страховой ренты в 3 тыс. руб. для 14-летнего человека, если первую выплату он получит в 17 лет. Отдельно рассмотреть случаи обыкновенной и приведенной рент. Эффективная процентная ставка $i = 5\%$.

3.10. Для 15-летнего юноши за 13 тыс. руб. приобретена 5-летняя страховая рента, первую выплату по которой он получит в 18 лет. Определить величину годовой страховой выплаты. Отдельно рассмотреть случаи обыкновенной и приведенной рент. Эффективная процентная ставка $i = 5\%$.

3.11. Найти стоимость единовременной премии по пожизненному страхованию на сумму 50 000 руб. для 18-летнего застрахованного молодого человека. Эффективная процентная ставка $i = 5\%$.

3.12. Найти единовременную нетто-премию по договору смешанного страхования со страховой суммой 50 000 руб. для 30-летнего мужчины. Срок страхования – 20 лет. Эффективная процентная ставка $i = 5\%$.

3.13. Получить следующие рекуррентные формулы для актуарной современной стоимости обыкновенной пожизненной ренты с единичными годовыми страховыми выплатами:

$$a_x = \frac{D_{x+1}}{D_x} (a_{x+1} + 1), \quad a_x = v \cdot p_x \cdot (a_{x+1} + 1).$$

3.14. Получить следующие рекуррентные формулы для актуарной современной стоимости приведенной пожизненной ренты с единичными годовыми страховыми выплатами:

$$\ddot{a}_x = 1 + \frac{D_{x+1}}{D_x} \ddot{a}_{x+1}, \quad \ddot{a}_x = 1 + v \cdot p_x \cdot \ddot{a}_{x+1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Актуарная математика (элементы финансовой математики): учебное пособие / В.Н. Баскаков [и др.] – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 64 с.
2. Актуарная математика (модели страхования): методическое пособие / В.Н. Баскаков [и др.] – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 60 с.
3. Актуарные расчеты: учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / Ю.Н. Миронкина [и др.]. – М.: Изд-во Юрайт, 2015. – 663 с. – (Серия: Бакалавр и магистр. Академический курс).
4. Баскаков, В.Н. Введение в актуарную математику: учебное пособие / В.Н. Баскаков, Г.Д. Карташов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. – 63 с.
5. Бородич, С.М. Теория вероятностей и математическая статистика: методические рекомендации / С.М. Бородич, Т.В. Кавитова. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2017. – 52 с.
6. Касимов, Ю.Ф. Введение в актуарную математику (страхования жизни и пенсионных схем) / Ю.Ф. Касимов. – М.: Анкил, 2001. – 176 с.
7. Кирлица, В.П. Финансовая математика: рук. к решению задач: учебное пособие / В.П. Кирлица. – Мн.: ТетраСистемс, 2005. – 192 с.
8. Медведев, Г.А. Начальный курс финансовой математики: учебное пособие / Г.А. Медведев. – М.: ТОО «Остожье», 2000. – 267 с.
9. Фалин, А.Г. Введение в математику финансов и инвестиций для актуариев: учебное пособие / А.Г. Фалин, Г.И. Фалин. – М.: МАКС Пресс, 2016. – 248 с.
10. Фалин, Г.И. Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем / Г.И. Фалин. – 2-е изд. – М.: Анкил, 2002. – 262 с.
11. Четыркин, Е.М. Финансовая математика: учебник / Е.М. Четыркин. – 10-е изд. – М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2011. – 392 с.

Учебное издание

АКТУАРНАЯ МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации

Составители:

БОРОДИЧ Сергей Митрофанович

КАВИТОВА Татьяна Валерьевна

Технический редактор

Г.В. Разбоева

Компьютерный дизайн

Л.И. Ячменёва

Подписано в печать

2021. Формат 60х84 ¹/₁₆. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 2,91. Уч.-изд. л. 2,56. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/255 от 31.03.2014.

Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.