

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра геометрии и математического анализа

М.Н. Подоксёнов, Т.Л. Сурин

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Методические рекомендации

*Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2021*

УДК 517.911(075.8)
ББК 22.161.61я73
П44

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 1 от 27.10.2021.

Авторы: заведующий кафедрой геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **М.Н. Подоксёнов**; доцент кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **Т.Л. Сурин**

Р е ц е н з е н т :
старший преподаватель кафедры высшей математики
и информационных технологий УО «ВГТУ» *А.В. Коваленко*

Подоксёнов, М.Н.
П44 Дифференциальные уравнения высших порядков : методические рекомендации / М.Н. Подоксёнов, Т.Л. Сурин. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2021. – 52 с.

Данное издание подготовлено для студентов I ступени очной и заочной форм получения высшего образования факультета математики и информационных технологий в соответствии с учебными программами по дисциплинам «Дифференциальные уравнения» (для специальностей «Прикладная математика», «Прикладная информатика (по направлениям)», «Математика и информатика», «Компьютерная безопасность»), «Математический анализ» для специальностей «Программное обеспечение информационных технологий» и «Информационные системы и технологии (в здравоохранении)» и «Высшая математика» для специальности «Управление информационными ресурсами». Излагаются теоретический материал, примеры решения задач и упражнения для самостоятельного решения.

УДК 517.911(075.8)
ББК 22.161.61я73

© Подоксёнов М.Н., Сурин Т.Л., 2021
© ВГУ имени П.М. Машерова, 2021

Содержание

Введение	4
ЧАСТЬ 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) высших порядков ..	5
1. ОДУ, разрешенные относительно производной	5
2. Существование и единственность решения задачи Коши. Граничные условия .	7
3. Особые решения	8
4. Понятие первого интеграла	8
5. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка	9
ЧАСТЬ 4. Линейные ОДУ- n	15
1. Основные понятия	15
2. Однородные линейные уравнения	15
3. Линейная независимость решений однородного линейного уравнения	16
4. Фундаментальная система решений. Структура общего решения однородного линейного уравнения	18
5. Неоднородное линейное уравнение	19
6. Метод Лагранжа (вариации произвольных постоянных) нахождения частного решения неоднородного уравнения	21
7. Понятие о комплексном решении однородного линейного уравнения	23
8. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	24
9. Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами	27
11. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	29
11. Линейные уравнения Эйлера	33
12. Применение линейных дифференциальных уравнений при изучении колебательных процессов	34
ЧАСТЬ 5. Системы ОДУ	43
1. Нормальные системы ОДУ	43
2. Механическое истолкование системы ОДУ	43
3. Задача Коши	44
4. Теорема существования и единственности (ТСЕ)	44
5. Общее решение системы	45
6. Связь между системой дифференциальных уравнений и уравнением n -го порядка	46
7. Общие методы интегрирования систем дифференциальных уравнений	47
8. Автономная система линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами	48
Литература	51

Введение

Данные методические рекомендации являются продолжением издания «Дифференциальные уравнения первого порядка» авторов М.Н. Подоксёнова и Т.Л. Сурин [6]. Предназначены для студентов, изучающих дисциплину «Дифференциальные уравнения» (специальности «Математика и информатика», «Прикладная математика», «Прикладная информатика (по направлениям)», «Компьютерная безопасность»). Методические рекомендации также охватывают разделы, посвященные дифференциальным уравнениям и входящие в предметы «Математический анализ» (специальности «Программное обеспечение информационных технологий», «Информационные системы и технологии (в здравоохранении)») и «Высшая математика» (специальность «Управление информационными ресурсами»).

Издание состоит из частей 3–5 и списка литературы. Первые две части изложены в предыдущей работе [6]. В третьей части изучаются обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков. В ней достаточно подробно излагается теоретический материал по теории обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков: основные понятия, типы уравнений, методы их решения, теоремы существования и единственности решения. В четвертой части рассматриваются линейные дифференциальные уравнения. Подробно излагается теория по линейным уравнениям. Отдельно рассматриваются неоднородные линейные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами и приводятся методы решения таких уравнений. В пятой части в краткой форме излагаются некоторые основные сведения из теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Материал каждой части дается в простой доступной для самостоятельного изучения форме.

В конце данного издания приведен список основной и дополнительной литературы, необходимой для изучения вышеназванных разделов дифференциальных уравнений.

Материал теоретического и практического содержания соответствует учебным программам по дифференциальным уравнениям для вышеперечисленных специальностей.

Издание может быть полезно для студентов других специальностей, изучающих высшую математику.

Знак ■ означает «конец доказательства».

ЧАСТЬ 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) высших порядков

1. ОДУ, разрешенные относительно производной

Дифференциальное уравнение n -го порядка ($n > 1$) имеет вид

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1)$$

Здесь F – некоторая известная функция от своих аргументов, которую будем предполагать всегда действительной. Производная n -го порядка обязательно входит в уравнение (1). Напомним, что x – независимая переменная, $y = y(x)$ – неизвестная искомая функция. Мы будем рассматривать главным образом уравнения, разрешенные относительно старшей производной.

Определение. ОДУ n -го порядка, разрешенное относительно производной, имеет вид:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (2)$$

где f есть известная функция, определенная в некоторой области D изменения переменных $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$.

Как правило, предполагается, что f непрерывна в области определения. Относительно такого уравнения будем говорить, что оно задано в **нормальной форме**. Например, нормальной формой уравнения

$$(1 + x^2)y'' - y'^2 + 1 = 0$$

будет

$$y'' = \frac{1}{1 + x^2} y'^2 - \frac{1}{1 + x^2}.$$

Определение. Решением уравнения (2) на интервале (a, b) называется функция $y = y(x)$, которая определена и n раз непрерывно дифференцируема на этом интервале, и которая при подстановке в уравнение (2) обращает его в тождество.

Решение может быть также задано в неявной форме $\Phi(x, y) = 0$ или в параметрическом виде: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. График решения уравнения называется интегральной кривой.

Геометрический смысл уравнения второго порядка. Напомним из дифференциальной геометрии, что кривизна кривой, заданной уравнением в явном виде $y = y(x)$ вычисляется по формуле

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

Поэтому уравнение второго порядка $F(x, y, y', y'') = 0$ можно переписать так:

$$F(x, y, y', \pm k(1 + y'^2)^{3/2}) = 0.$$

Тем самым оно представляет собой связь между координатами (x, y) точки на кривой, угловым коэффициентом касательной к интегральной кривой y' в этой точке и кривизной интегральной кривой.

Физический смысл уравнения второго порядка. Предположим, что материальная точка массы m движется по оси Ox под воздействием силы F , зависящей от времени t , положения точки $x(t)$ и скорости $x'(t)$. Ускорение этой точки есть $x''(t)$. Тогда по второму закону Ньютона

$$x''(t) = f(t, x, x'),$$

где $f(t, x, x') = \frac{1}{m} F(t, x, x')$. Тем самым, движение описывается дифференциальным уравнением второго порядка.

Пример 1. Один конец пружины закреплён в точке O , а на другом её конце закреплена материальная точка весом 1 грамм. Пружина находится в растянутом состоянии. Сила упругости, действующая на точку пропорциональна её расстоянию от точки O с коэффициентом пропорциональности 10. Сопротивление среды пропорционально скорости движения с коэффициентом пропорциональности 3. Найти закон движения.

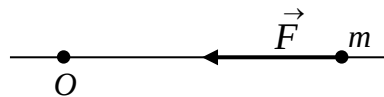


рис.1

Решение. Пусть $x = x(t)$ – расстояние от точки до центра. Тогда скорость $v = x'(t)$. Результирующая сила $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, где $\vec{F}_1$ направлена по движению и $F_1 = 10x$, а $\vec{F}_2$ направлена против движения, поэтому $F_2 = -3v = -3x'$. Закон движения $ma = F$, где $a = v' = x''$ – ускорение. Значит,

$$x'' = 10x - 3x' \Leftrightarrow x'' + 3x' - 10x = 0.$$

Методы решения таких уравнений мы изучим позже.

Задача Коши. Как правило, уравнение (2) имеет решение, зависящее от нескольких произвольных постоянных. Чтобы выделить искомое решение, задают дополнительные условия. Условия Коши для уравнения (2) имеют вид

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (3)$$

Задача Коши состоит в нахождении решения уравнения (2), удовлетворяющего условиям (3) и включает в себя уравнение (2) и условия (3).

Для уравнения второго порядка условия Коши имеют вид

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0. \quad (3')$$

Геометрически это означает, что требуется найти интегральную кривую, проходящую через заданную точку (x_0, y_0) , и имеющую в этой точке заданный тангенс угла наклона касательной y'_0 . Если в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) такое решение существует и единственно, то говорим, что задача Коши имеет единственное решение.

Определение. Общим решением уравнения (2) называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, такая что

1) она имеет непрерывные частные производные по x до порядка n включительно;

2) для любых начальных данных (3) система

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ y'_0 = \varphi'_x(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ \dots\dots\dots \\ y_0^{(n-1)} = \varphi_x^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n), \end{cases} \quad (4)$$

разрешима относительно неизвестных $C_1, C_2, \dots, C_n$;

3) при любом фиксированном наборе постоянных функция является решением уравнения (2).

Решив систему (4) в общем виде, мы получим, что $C_1, C_2, \dots, C_n$ есть функции от начальных данных $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$. Подставив полученные выражения в общее решение, получим запись, которая называется общим решением в форме Коши:

$$y = \varphi(x, x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}).$$

Если общее решение задано в неявном виде:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0,$$

то оно называется общим интегралом данного уравнения. Всякое решение, которое получается из общего решения в результате подстановки конкретных значений $C_1, C_2, \dots, C_n$ называется частным решением.

2. Существование и единственность решения задачи Коши. Граничные условия

Следующие две теоремы мы сформулируем для уравнения второго порядка, но надо иметь в виду, что она верна для дифференциального уравнения любого порядка.

Теорема Пеано. Если правая часть уравнения

$$y'' = f(x, y, y') \quad (5)$$

непрерывна в параллелепипеде

$$R: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, |y' - y'_0| \leq b,$$

(а следовательно, ограничена на нём: $|f(x, y, y')| \leq M, M > 0$), то существует по крайней мере одно решение $y = y(x)$ уравнения (5), удовлетворяющее начальным условиям (3'), заведомо определенное на интервале $|x - x_0| \leq h$, где

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{N} \right\}, N = \max_R \{M, |y'|\}. \quad (6)$$

Теорема Пикара. Если правая часть уравнения (5) определена в параллелепипеде R и удовлетворяет в нем двум условиям:

1) непрерывна;

2) существуют и ограничены частные производные: $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq K, \left| \frac{\partial f}{\partial y'} \right| \leq K,$

тогда уравнение (5) имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям (3'), заведомо определенное на интервале $|x - x_0| \leq h$, где h удовлетворяет условиям (6).

Пример 2. Правая часть уравнения

$$y'' = yy' - 2x^3 + 2x + 2$$

является многочленом и, поэтому, удовлетворяет условиям теоремы Пикара. Решением, удовлетворяющим начальным данным $y(0) = -1, y'(0) = 0$, является $y = x^2 - 1$. Согласно теореме Пикара, это решение единственно.

Понятие граничного условия мы ввели в параграфе 4 главы 1 и рассмотрели пример. Приведём пример более сложных граничных условий.

Пример 3. Найти решение уравнения $y'' = 6x$, удовлетворяющее граничным условиям $y' = y$, при $x = 0$, $y' = -y$, при $x = 1$. Общее решение уравнения:

$$y = x^3 + C_1 x + C_2.$$

При этом, $y' = 3x^2 + C_1$. Подставляем граничные условия и получаем систему

$$\begin{cases} C_1 = C_2, \\ 3 + C_1 = 1 + C_1 + C_2, \end{cases} \Rightarrow C_1 = -2, C_2 = 2.$$

Ответ: $y = x^3 - 2x + 2$ ($x \in [0, 1]$).

3. Особые решения

Определение. Решение уравнения (1) называется особым, если в каждой его точке нарушается единственность решения задачи Коши.

Если правая часть уравнения (1) является многочленом относительно всех аргументов, то уравнение заведомо не имеет особых решений. Если правая часть уравнения (1) непрерывна и имеет частные производные по переменным $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$, то особыми могут быть только те решения, для которых хотя бы одна из этих частных производных обращается в бесконечность. Уравнение (1) может иметь семейство особых решений, зависящее от нескольких произвольных постоянных, число которых не превышает $n-1$.

4. Понятие первого интеграла

Если в процессе интегрирования уравнения нам удастся понизить порядок уравнения и прийти к соотношению вида

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-k)}, C_1, C_2, \dots, C_k) = 0 \quad (7)$$

т.е. к уравнению $(n-k)$ -го порядка, то соотношение (7) называют **промежуточным интегралом k -го порядка**. Промежуточный интеграл вида $\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, C_1) = 0$ называется первым интегралом уравнения (1). Знание k независимых первых интегралов дает возможность понизить порядок уравнения на k единиц путем исключения из этих соотношений $(k-1)$ старших производных. Если известно n независимых первых интегралов, то исключая из них производные, получим общий интеграл уравнения.

Пример 4. Найти первый интеграл уравнения

$$\frac{y''}{y'} + \sin y \cdot y' = 0.$$

Решение. Можно заметить, что $\frac{y''}{y'} = (\ln |y'|)'$, $\sin y \cdot y' = (-\cos y)'$, тогда

$$\frac{y''}{y'} + \sin y \cdot y' = (\ln |y'| - \cos y)'.$$

Отсюда получаем первый интеграл $\ln |y'| - \cos y = C_1$.

Ответ. $\ln |y'| - \cos y = C_1$.

5. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

1. Простейшие дифференциальные уравнения

Определение. Простейшее дифференциальное уравнение имеет вид

$$y^{(n)} = f(x).$$

Для его решения находим сначала производную порядка $n-1$:

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1.$$

Далее, интегрируя последовательно, получаем:

$$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x) dx \right) dx + C_1 x + C_2, \dots$$

и, наконец,

$$y = \underbrace{\int \left(\int \left(\int \dots \left(\int f(x) dx \right) \dots dx \right) dx \right)}_n + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_n.$$

Пример 5. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' = \sin x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

Решение. $y' = \int \sin x dx = -\cos x + C_1,$

$$y = \int (-\cos x + C_1) dx = -\sin x + C_1 x + C_2.$$

Мы нашли общее решение. Подставляем теперь в него начальные данные.

$$0 = -\sin 0 + C_1 \cdot 0 + C_2, \quad 1 = -\cos 0 + C_1.$$

Получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных C_1 и C_2 , из неё находим $C_1=2$, $C_2=0$. Подставляем эти значения в общее решение.

Ответ: $y = -\sin x + 2x$.

II. Дифференциальные уравнения, которые не содержат в явном виде искомую функцию и ее производные до порядка $k-1$ включительно.

Такие уравнения имеют вид

$$F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (8)$$

Обозначим $y^{(k)} = z(x)$. Тогда $y^{(k+1)} = z'(x), \dots, y^{(n)} = z^{(n-k)}(x)$. Мы получаем дифференциальное уравнение $(n-k)$ -го порядка $F(x, z, \dots, z^{(n-k)}) = 0$. Если уравнение (8) было уравнением 2-го порядка, то сделав указанную замену, мы придем к уравнению первого порядка.

Пример 6. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' = \frac{y'}{x+4}.$$

Решение. Обозначаем $y' = z(x)$, тогда $y'' = z'(x)$. Получаем дифференциальное уравнение

$$z' = \frac{z}{x+4} \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x+4}.$$

Решаем его:

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x+4}, \quad \ln|z| = \ln|x+4| + C_0.$$

$$e^{\ln|z|} = e^{\ln|x+4| + C_0}, \quad |z| = |x+4| \cdot e^{C_0}, \quad z = \pm e^{C_0}(x+4).$$

Мы можем обозначить $\pm e^{C_0}$, как новую постоянную C_1 ($C_1 \neq 0$). Итак,

$$z = C_1(x+4).$$

Теперь решаем уравнение

$$y' = C_1(x+4).$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1(x+4), \quad dy = C_1(x+4)dx, \quad y = C_1 \int (x+4)dx,$$

$$y = C_1 \frac{(x+4)^2}{2} + C_2.$$

Величина $C_1/2$ – это тоже постоянная величина, которую снова можно обозначить как C_1 . Заметим, что при делении на z мы теряем решение $y=C$, которое можно включить в формулу общего решения при $C_1=0$.

Ответ: $y = C_1(x+4)^2 + C_2$.

III. Дифференциальные уравнения, которые не содержат в явном виде переменную x .

Такие уравнения имеют вид $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$. В этом случае порядок уравнения можно понизить на единицу подстановкой $y' = z(y)$. Получается, что z – это сложная функция и по правилу дифференцирования сложной функции

$$y'' = (y')' = z'_x = z'_y \cdot y'_x = z'_y \cdot z,$$

$$y''' = (y'')' = (z'_y \cdot z)'_x = (z'_y \cdot z)'_y \cdot y'_x = z_{yy}'' \cdot z^2 + (z'_y)^2 \cdot z.$$

Аналогичные выражения получаем для производных более высокого порядка.

Пример 7. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' = y \cdot y'.$$

Решение. Обозначаем $y' = z(y)$, тогда $y'' = z'_y \cdot z$. Получаем дифференциальное уравнение

$$z'_y \cdot z = y \cdot z. \Leftrightarrow z(z' - y) = 0.$$

Значит, либо $z = 0$, либо $z' - y = 0$.

а) $z = 0$. Получаем $y' = 0$. Значит, $y = C_1$.

б) $z' - y = 0 \Leftrightarrow z' = y$. Получаем решение $z = \int y dy = \frac{y^2}{2} + C_0$.

Далее мы решаем уравнение $y' = \frac{y^2}{2} + C_0$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{2} + C_0, \quad \frac{dy}{\frac{y^2}{2} + C_0} = dx, \quad 2 \cdot \frac{dy}{y^2 + 2C_0} = dx$$

$$x = 2 \int \frac{dy}{y^2 + 2C_0}.$$

Если $C_0 > 0$, то мы можем обозначить $2C_0 = C^2$. Тогда

$$x = 2 \int \frac{dy}{y^2 + C^2} = \frac{2}{C} \operatorname{arctg} \frac{y}{C} + C_2.$$

Если $C_0 < 0$, то мы можем обозначить $2C_0 = -C^2$. Тогда

$$x = 2 \int \frac{dy}{y^2 - C^2} = \frac{1}{C} \ln \left| \frac{y - C}{y + C} \right| + C_2.$$

Мы получили 2 группы решений. Если будут дополнительно заданы начальные условия, то из двух групп надо будет выбрать одну, в зависимости от этих условий.

IV. Уравнение $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, левая часть которого является однородной функцией относительно $y, y', \dots, y^{(n)}$.

В этом случае левая часть уравнения удовлетворяет условию

$$F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)}).$$

Уравнение допускает понижение порядка на единицу при применении подстановки $y' = yz$, где $z = z(x)$ есть новая неизвестная функция. Тогда получаем

$$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z'),$$

$$y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = yz(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z'' + 3zz' + z^3)$$

и т.д. Подставляя в уравнение и вынося за счет однородности за скобки множитель y^m , получаем уравнение, порядок которого на единицу ниже порядка исходного уравнения.

Пример 8. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$yy'' - (y')^2 = 0.$$

Решение. Проверим уравнение на однородность. Подставим вместо y, y', y'' соответственно ty, ty', ty'' . Получаем $tyty'' - (ty')^2 = 0$ или $t^2(yy'' - (y')^2) = 0$. Значит, левая часть является однородной функцией. Совершаем подстановку $y' = yz, y'' = y(z^2 + z')$:

$$y^2(z^2 + z') - y^2z^2 = 0.$$

Отсюда $y = 0$ или $z' = 0$. Второй случай даёт $z = C_1 \Rightarrow y' = C_1 y \Rightarrow y = C_2 e^{C_1 x}$. Это решение включает в себя также и случай $y = 0$.

Ответ. $y = C_2 e^{C_1 x}$.

V. Уравнение, левая часть которого является точной производной

Пусть $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$. В этом случае каждое решение уравнения (1) является решением уравнения

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = C, \quad (9)$$

и, наоборот, каждое решение уравнения (9) является решением уравнения (1). Тем самым порядок уравнения понижается на единицу.

Пример 9. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$yy'' + (y')^2 = 0.$$

Решение. Очевидно, что $yy'' + (y')^2 = (yy')'$. Тогда $yy' = C_1$ и это уравнение можно записать в виде $ydy = C_1 dx$. Общим интегралом является $y^2 = C_1 x + C_2$.

Ответ. $y^2 = C_1 x + C_2$.

Иногда левая часть уравнения (1) становится точной производной некоторого дифференциального выражения только после умножения на некоторый множитель $\mu(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$. При этом могут как появиться лишние решения, обращающие этот множитель в ноль, так и возможна потеря решений, если этот множитель разрывен.

Пример 10. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$yy'' - (y')^2 = 0.$$

Решение. Умножим обе части на $\mu = \frac{1}{y^2}$. Получим

$$\frac{yy'' - (y')^2}{y^2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{y} \right) = 0.$$

Отсюда получаем $\frac{y'}{y} = C_1$ или $\frac{dy}{y} = C_1 dx$. После интегрирования имеем

$$\ln|y| = C_1x + C_2, C_2 \neq 0.$$

Выражаем y : $y = C_2 e^{C_1x}, C_2 \neq 0.$

При умножении на $\mu = \frac{1}{y^2}$ было потеряно решение $y = 0$. Его можно включить в полученное решение, если считать, что может быть $C_2 = 0$.

Ответ. $y = C_2 e^{C_1x}.$

VI. Нахождение решения в параметрическом виде

Иногда бывает удобно перейти к параметрическому представлению уравнения и найти решение в параметрическом виде.

Случай 1. Пусть уравнение

$$F(x, y^{(n)}) = 0 \quad (10)$$

неразрешимо относительно $y^{(n)}$. Предположим, что оно допускает *параметрическое представление*

$$x = \varphi(t), y^{(n)} = \psi(t), \quad (11)$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ таковы, что $F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0$. Так как

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx = \psi(t) \varphi'(t) dt,$$

то

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t) \varphi'(t) dt + C_1 = \psi_1(t, C_1).$$

Поступая аналогично, находим $y^{(n-2)}, \dots, y'$ и $y = \psi_1(t, C_1, \dots, C_n)$. *Общее решение* уравнения (10) в параметрической форме имеет вид

$$x = \varphi(t), y = \psi_1(t, C_1, \dots, C_n).$$

Параметрическое представление уравнения (10) легко получить в случае, когда уравнение (10) разрешимо относительно x , т.е. представимо в виде $x = \varphi(y^{(n)})$. В этом случае можно за параметр t взять $y^{(n)}$. Получаем представление

$$x = \varphi(t), y^{(n)} = t.$$

Пример 11. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\sin y'' + y'' = x.$$

Решение. Положим $y'' = t$, тогда получим $\sin t + t = x$. Выразим y через параметр t . Имеем

$$dy' = y'' dx = t(\cos t + 1) dt.$$

Отсюда

$$y' = \int t(\cos t + 1) dt + C_1 = t \sin t + \cos t + \frac{t^2}{2} + C_1.$$

Далее

$$y = \int \left(t \sin t + \cos t + \frac{t^2}{2} + C_1 \right) dt + C_2 = -t \cos t + 2 \sin t + \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2.$$

Ответ. Общее решение уравнения имеет вид

$$x = \sin t + t, \quad y = -t \cos t + 2 \sin t + \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2.$$

Случай 2. Уравнение вида $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}) = 0$. Если данное уравнение неразрешимо относительно $y^{(n)}$, то оно может допускать параметрическое представление $y^{(n)} = \varphi(t)$, $y^{(n-1)} = \psi(t)$, при этом $F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0$. Используем соотношение $dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx$. Тогда $dx = \frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{\psi'(t) dt}{\varphi(t)}$ и

$$x = \int \frac{\psi'(t) dt}{\varphi(t)} + C_1.$$

Далее, находим последовательно:

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)} dx = \frac{\psi(t) \psi'(t) dt}{\varphi(t)}, \quad y^{(n-2)} = \int \frac{\psi(t) \psi'(t) dt}{\varphi(t)} + C_2,$$

$$dy^{(n-3)} = y^{(n-2)} dx, \dots, \quad dy = y' dx,$$

$$y = \int y' dx + C_n.$$

Случай 3. Уравнение вида $F(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0$. Если данное уравнение неразрешимо относительно $y^{(n)}$, то оно может допускать параметрическое представление $y^{(n)} = \varphi(t)$, $y^{(n-2)} = \psi(t)$, при этом $F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0$. Используем соотношения $dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx$, $dy^{(n-2)} = y^{(n-1)} dx$. Исключая dx , получаем уравнение $y^{(n-1)} dy^{(n-1)} = y^{(n)} dy^{(n-2)}$, или, в силу параметрического представления, $y^{(n-1)} dy^{(n-1)} = \varphi(t) \psi'(t) dt$. Отсюда интегрированием находим $y^{(n-1)}$. Имея параметрическое представление $y^{(n-1)}$ и $y^{(n-2)}$, мы свели задачу к случаю 2.

ЧАСТЬ 4. Линейные ОДУ- n

1. Основные понятия

Определение. Линейное неоднородное ОДУ n -го порядка имеет вид:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x). \quad (1)$$

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется однородным:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \quad (2)$$

Предположим, что все функции $p_1(x), p_2(x), \dots, p_{n-1}(x), p_n(x), f(x)$ непрерывны на интервале (a, b) . Поскольку левая часть уравнения является многочленом, то она удовлетворяет условиям теоремы Пикара из предыдущей главы. Поэтому существует единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (3)$$

где $x_0 \in (a, b)$.

Введем обозначение:

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + p_n(x).$$

Тогда можно рассматривать L , как дифференциальный оператор, сопоставляющий каждой функции y функцию $L(y)$. Легко проверить, что этот оператор является линейным, т.е.

1. $L(cy) = cL(y)$, $c = \text{const}$;
2. $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$.

2. Однородные линейные уравнения

Рассмотрим уравнение (2). Очевидно, что $y \equiv 0$ является решением этого уравнения, причем это решение удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

для любого $x_0 \in (a, b)$. Эти начальные условия называют нулевыми. Поскольку для линейного уравнения в случае непрерывности всех коэффициентов справедлива теорема Пикара, то это решение является единственным решением, удовлетворяющим нулевым начальным условиям.

Свойства решений линейного уравнения.

1. Пусть y_1, y_2 – решения однородного уравнения (2). Тогда функция $y = y_1 + y_2$ также является решением уравнения.

Доказательство. Пусть y_1, y_2 – решения однородного уравнения (2). Тогда $L(y_1) = L(y_2) = 0 \Rightarrow L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = 0 + 0 = 0$, а это и означает, что функция $y = y_1 + y_2$ является решением уравнения.

2. Пусть $y(x)$ – решение однородного уравнения (2). Тогда функция $z=Cy(x)$, где $C \in \mathbf{R}$ также является решением уравнения.

Доказательство. Пусть $y(x)$ – решение однородного уравнения (2). Тогда $L(y)=0$. Пользуясь свойствами линейного оператора, получаем

$$L(z)=L(Cy)=CL(y)=0.$$

Это означает, что Cy тоже является решением однородного уравнения.

3. Линейная независимость решений однородного линейного уравнения

Из свойств 1 и 2 следует, что совокупность всех решений однородного линейного уравнения образует линейное (векторное) пространство. Очевидно, что линейная комбинация

$$C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n \quad (4)$$

решений уравнения (2) $y_1, y_2, \dots, y_n$ тоже является решением этого уравнения при любых значениях постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Допустим, что мы нашли n решений $y_1, y_2, \dots, y_n$ уравнения (2). Их линейная комбинация (4), зависящая от n произвольных постоянных, также является решением уравнения. Возникает вопрос: можно ли утверждать, что функция (4) будет общим решением? Для решения этого вопроса мы напомним некоторые понятия из теории векторных пространств применительно к функциональным пространствам.

Линейная комбинация (4) называется тривиальной, если все коэффициенты $C_1, C_2, \dots, C_n$ равны нулю. Соответственно, она называется нетривиальной, если существует хотя бы один коэффициент, отличный от нуля. Функции

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x) \quad (5)$$

называются линейно зависимыми на интервале (a, b) , если существует их нетривиальная линейная комбинация тождественно равная нулю на этом интервале:

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_ny_n(x) \equiv 0.$$

Составим определитель Вронского (вронскиан):

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Теорема 1. Если функции (5) линейно зависимы на интервале (a, b) , то $W(x) \equiv 0$ этом интервале.

Доказательство. Пусть функции $y_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$) линейно зависимы. Докажем, что для любой точки $x_0 \in (a, b)$ определитель Вронского $W(x)$ обращается в ноль: $W(x) \equiv 0, \forall x_0 \in (a, b)$.

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\ldots+c_ny_n(x)=0.$$
$$\begin{cases} c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \equiv 0, \\ c_1 y'_1(x) + c_2 y'_2(x) + \dots + c_n y'_n(x) \equiv 0, \\ \dots\dots\dots, \\ c_1 y^{(n-1)}_1(x) + c_2 y^{(n-1)}_2(x) + \dots + c_n y^{(n-1)}_n(x) \equiv 0. \end{cases} \quad (6)$$
$$W(x_0) \cdot \mathbf{c} \equiv 0.$$

Теорема 2. Если функции (5) являются линейно независимыми решениями однородного линейного уравнения (2), коэффициенты которого непрерывны на интервале (a, b) , то $W(x)$ не обращается в 0 ни в одной точке этого интервала.

Доказательство. Пусть функции $y_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$) линейно независимы. Докажем, что определитель Вронского $W(x)$ ни в одной точке не обращается в ноль.

Предположим противное: пусть существует точка x_0 , в которой определитель Вронского равен нулю $W(x_0) = 0$. Тогда система (6), в которой вместо x взято x_0 , имеет ненулевое решение $c_i = \alpha_i$, ($i=1, \dots, n$). Составим функцию

$$y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x), \quad (7)$$

которая, в силу свойств 1 и 2 линейного однородного уравнения, является решением уравнения (2). Кроме того, так как α_i , $(i = 1, \dots, n)$ – решение системы (6), то функция $y(x)$ удовлетворяет нулевым начальным условиям, т.е. $y(x_0)=0$, $y'(x_0)=0, \dots, y^{(n-1)}(x_0)=0$. В то же время, нулевым начальным условиям удовлетворяет решение $y(x) \equiv 0$ уравнения (2). В силу теоремы Пикара такое решение единственно, т.е. $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0$, а это означает, что функции $y_i(x)$ $(i = 1, \dots, n)$ линейно зависимы. Получили противоречие. Значит наше предположение, что существует точка x_0 , в которой определитель Вронского равен нулю, неверно. ■

Следствие из теорем 1 и 2. Для того чтобы n решений однородного линейного уравнения n -го порядка с непрерывными коэффициентами были линейно независимы в интервале непрерывности коэффициентов, необходимо и достаточно, чтобы определитель Вронского был отличен от нуля во всех точках этого интервала.

На самом деле достаточно убедиться, что $W(x) \neq 0$ хотя бы в одной точке рассматриваемого интервала, и тогда $W(x) \neq 0$ во всех точках этого интервала.

Упражнение. Решениями уравнения $y''' + y = 0$ являются функции $y = 1, y = \sin x, y = \cos x$. Составьте и вычислите $W(x)$. Являются ли указанные решения линейно независимыми на всей числовой прямой?

Тот факт, что уравнение (2) не может иметь более чем n линейно независимых решений оставляем без доказательства.

4. Фундаментальная система решений.

Структура общего решения однородного линейного уравнения

Определение. Совокупность n линейно независимых решений уравнения (2) называется фундаментальной системой решений этого уравнения.

Теорема 3. Если коэффициенты уравнения (2) непрерывны на интервале (a, b) , то фундаментальная система решений на этом интервале существует.

Доказательство. Покажем, как такая система решений может быть составлена. Согласно теореме Пикара для каждого из следующих наборов начальных условий, заданных в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$, существует, и притом единственное решение:

$$\begin{aligned} y_1: & y_1(x_0) = 1, y_1'(x_0) = 0, y_1''(x_0) = 0, \dots, y_1^{(n-1)}(x_0) = 0; \\ y_2: & y_2(x_0) = 0, y_2'(x_0) = 1, y_2''(x_0) = 0, \dots, y_2^{(n-2)}(x_0) = 0; \\ & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_n: & y_n(x_0) = 0, y_n'(x_0) = 0, y_n''(x_0) = 0, \dots, y_n^{(n-1)}(x_0) = 1. \end{aligned}$$

В точке x_0 выполнено $W(x_0) = 1$. Построенная нами фундаментальная система называется нормированной в точке x_0 . Это одна из возможных фундаментальных систем уравнения (2). ■

Теорема 4 (о структуре общего решения однородного линейного уравнения). Если $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ есть фундаментальная система решений уравнения (2) на интервале (a, b) , то формула

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x), \quad (8)$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ есть произвольные постоянные, задаёт общее решение уравнения (2) определённое на этом интервале.

Доказательство. Воспользуемся определением общего решения. Проверим три условия из определения общего решения (см. часть 3, п.1).

1) $y = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$, где $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$ имеет частные производные до n -го порядка включительно, поскольку функции $y_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$) являются решениями уравнения (2).

[illegible]

3) Рассмотрим функцию

Согласно свойствам однородного линейного уравнения эта функция является решением уравнения (2) при любых значениях произвольных. Значит, третье условие определения выполняется.

5. Неоднородное линейное уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x). \quad (1)$$
$$L(y) = f(x). \quad (1')$$
$$L(y) = f_1(x), L(y) = f_2(x), \dots, L(y) = f_k(x).$$

Теорема 5 (принцип суперпозиции или принцип наложения). Если $y_i(x)$ является решением уравнения $L(y) = f_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, k$), то

является решением уравнения

Доказательство.

$$L(y) = L(y_1(x) + y_2(x) + \dots + y_k(x)) = L(y_1(x)) + L(y_2(x)) + \dots + L(y_k(x)).$$

Поскольку $L(y_i) \equiv f_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, k$), то

$$L(y_1(x) + y_2(x) + \dots + y_k(x)) \equiv f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x). \blacksquare$$

Совместно с уравнением (1) рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \quad (2)$$

Теорема 6. Если $y(x)$ – решение уравнения (2), а $z(x)$ – решение уравнения (1), то функция $Y = y + z$ является решением уравнения (1).

Доказательство. Сделаем подстановку функции $Y = y + z$ в уравнение (1) :

$$L(y+z) = f(x) \Leftrightarrow L(y) + L(z) = f(x).$$

Так как по условию $L(z) \equiv f(x)$, $L(y) \equiv 0$, то $L(y+z) \equiv f(x)$. $\blacksquare$

Если $y = c_1y_1(x) + \dots + c_ny_n(x)$ есть общее решение уравнения (2), то

$$y(x) = c_1y_1(x) + \dots + c_ny_n(x) + z(x) \quad (10)$$

есть решение уравнения (1), зависящее от n произвольных постоянных. Будет ли данное решение общим?

Теорема 7 (о структуре общего решения неоднородного уравнения). Общее решение неоднородного линейного уравнения (1) есть сумма произвольного частного решения этого уравнения и общего решения однородного линейного уравнения (2).

Доказательство. Будем называть уравнение (2) однородным уравнением, соответствующим уравнению (1).

Воспользуемся определением общего решения. Первое и третье условия определения следуют из понятия решения уравнения и теоремы 5. Проверим второе условие определения. Возьмем любые начальные условия вида $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ и подставим их в функцию $y(x)$. Получим систему

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) + \dots + c_ny_n(x_0) + z(x_0) = y_0, \\ c_1y'_1(x_0) + c_2y'_2(x_0) + \dots + c_ny'_n(x_0) + z'(x_0) = y'_0, \\ \dots, \\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_ny_n^{(n-1)}(x_0) + z^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

Перепишем эту систему в следующем виде:

Это неоднородная линейная система алгебраических уравнений, главным определителем которой является определитель Вронского для системы решений $y_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$). Так как это фундаментальная система решений однородного уравнения, то $W(x)$ не обращается в ноль ни в одной точке. Значит, система (11) имеет ненулевые решения $\mathbf{c}^0 \neq 0$ для любых начальных условий. ■

$$y_{\text{OH}} = y_{\text{OO}} + y_{\text{qH}}. \quad (12)$$
$$y'' + y = 0.$$
$$v_{00} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$
$$y_{OH} = x + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$
$$\bar{y}(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \dots + C_n(x)y_n(x), \quad (13)$$

В дальнейшем, для наглядности, будем рассматривать уравнения 3-го порядка и, для краткости, не будем писать аргумент x , но надо помнить, что коэффициенты в уравнении (1) и C_i – это функции. Итак, имеем уравнение

$$y''' + p_1 y'' + p_2 y' + p_3 y = f(x). \quad (1')$$

Пусть y_1, y_2, y_3 – фундаментальная система решений однородного уравнения

$$y''' + p_1 y'' + p_2 y' + p_3 y = 0. \quad (2'')$$

Ищем частное решение уравнения (2'') в виде

$$\bar{y}(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3. \quad (13')$$

Находим производную:

$$\bar{y}'(x) = C_1 y_1' + C_2 y_2' + C_3 y_3' + \{C_1' y_1 + C_2' y_2 + C_3' y_3\}.$$

Приравняем выражение в фигурных скобках к нулю:

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 + C_3' y_3 = 0. \quad (14)$$

Найдем вторую производную:

$$\bar{y}''(x) = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_3 y_3'' + \{C_1' y_1' + C_2' y_2' + C_3'(x) y_3'\}.$$

Снова приравняем выражение в фигурных скобках к нулю:

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' + C_3'(x) y_3' = 0 \quad (15)$$

и вычислим третью производную:

$$\bar{y}'''(x) = C_1 y_1''' + C_2 y_2''' + C_3 y_3''' + \{C_1' y_1'' + C_2' y_2'' + C_3'(x) y_3''\}$$

Подставим теперь все эти производные и выражение (13') в уравнение (1'):

$$C_1 y_1''' + C_2 y_2''' + C_3 y_3''' + \{C_1' y_1'' + C_2' y_2'' + C_3'(x) y_3''\} + \\ + p_1(C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_3 y_3'') + p_2(C_1 y_1' + C_2 y_2' + C_3 y_3') + p_3(C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3) = f(x).$$

Сгруппируем коэффициенты при одинаковых C_i :

$$C_1(y_1''' + p_1 y_1'' + p_2 y_1' + p_3 y_1) + C_2(y_2''' + p_1 y_2'' + p_2 y_2' + p_3 y_2) + \\ + C_3(y_3''' + p_1 y_3'' + p_2 y_3' + p_3 y_3) + \{C_1' y_1'' + C_2' y_2'' + C_3'(x) y_3''\} = f(x).$$

Все выражения в скобках равны нулю, поскольку y_1, y_2, y_3 есть решения уравнения (2''). Для того, чтобы функция $\bar{y}(x)$ была решением неоднородного уравнения, должно выполняться равенство

$$C_1' y_1'' + C_2' y_2'' + C_3'(x) y_3'' = f(x).$$

Учитывая равенства (14) и (15), получаем систему линейных уравнений для нахождения неизвестных функций $C_1'(x), C_2'(x), C_3'(x)$:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + C_3' y_3 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + C_3'(x) y_3' = 0, \\ C_1' y_1'' + C_2' y_2'' + C_3'(x) y_3'' = f(x). \end{cases}$$

Напомним, что функции y_1, y_2, y_3 у нас уже найдены и они линейно независимы. Поэтому эта система имеет единственное решение

$$C_1'(x) = \varphi_1(x), C_2'(x) = \varphi_2(x), C_3'(x) = \varphi_3(x).$$

Отсюда находим

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x) dx + C_1^*, C_2(x) = \int \varphi_2(x) dx + C_2^*, C_3(x) = \int \varphi_3(x) dx + C_3^*.$$

Если подставить эти функции в (13'), то мы получим общее решение $\bar{y}(x)$ уравнения (1'). Если эти величины C_1^*, C_2^*, C_3^* взять равными нулю, то мы получим частное решение уравнения (1').

$$\begin{aligned} y &= \left(\int \varphi_1(x) dx + C_1^* \right) y_1 + \left(\int \varphi_2(x) dx + C_2^* \right) y_2 + \left(\int \varphi_3(x) dx + C_3^* \right) y_3 = \\ &= \left(\int \varphi_1(x) dx \right) y_1 + \left(\int \varphi_2(x) dx \right) y_2 + \left(\int \varphi_3(x) dx \right) y_3 + \{ C_1^* y_1 + C_2^* y_2 + C_3^* y_3 \} \end{aligned}$$

Выражение в фигурных скобках есть общее решение однородного уравнения (2''), а остальное есть частное решение неоднородного уравнения (1').

7. Понятие о комплексном решении однородного линейного уравнения

Пусть даны две действительные функции $u(x)$ и $v(x)$, определенные в интервале (a, b) . Функцию

$$y(x) = u(x) + iv(x) \quad (i = \sqrt{-1})$$

будем называть *комплексной (комплекснозначной) функцией от действительной переменной x , определенной в интервале (a, b)* . При этом функции $u(x)$ и $v(x)$ называются *действительной и мнимой частями комплексной функции $y(x)$* .

Свойства комплекснозначной функции

1. Две комплексные величины равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части.

Если $y_1(x) = u_1(x) + iv_1(x)$, $y_2(x) = u_2(x) + iv_2(x)$, то

$$y_1(x) \equiv y_2(x) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(x) = u_2(x), \\ v_1(x) = v_2(x). \end{cases}$$

2. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на интервале (a, b) , то и функция $y(x)$ также дифференцируема на этом интервале и

$$y'(x) = u'(x) + iv'(x).$$

Если действительная и мнимая части комплексной функции имеют производную n -го порядка, тогда *производная n -го порядка* этой функции определяется так:

$$y^{(n)}(x) = u^{(n)}(x) + iv^{(n)}(x).$$

3. Пусть $\lambda = \alpha + \beta i$, тогда $e^{\lambda x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)$.

4. $(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$.

Доказательство.

$$(e^{\lambda x})' = (e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x))' = (e^{\alpha x})'(\cos \beta x + i \sin \beta x) + e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)' = (*)$$

Воспользуемся свойством 2 комплексной функции:

$$(*) = \alpha e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) + e^{\alpha x}(-\beta \sin \beta x + i \beta \cos \beta x) = \\ = (\alpha + \beta i) e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) = \lambda e^{\lambda x}.$$

Следствие. $(e^{\lambda x})^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$.

5. Функция $y(x) = u(x) + iv(x)$ является решением однородного уравнения (2) тогда и только тогда, когда обе функции $u(x)$ и $v(x)$ являются решениями этого уравнения.

Доказательство. Функция $y(x) = u(x) + iv(x)$ является комплексным решением уравнения $L(y) = 0$ на интервале (a, b) , т.е. она обращает это уравнение в тождество:

$$L(u(x) + iv(x)) \equiv 0,$$

справедливое при всех значениях x из интервала (a, b) . Тождество равносильно следующему тождеству:

$$L(u(x)) + iL(v(x)) \equiv 0,$$

откуда вытекает, что

$$L(u(x)) \equiv 0, \quad L(v(x)) \equiv 0 \quad (a < x < b),$$

а это означает, что функции $u(x)$ и $v(x)$ являются решениями однородного уравнения $L(y) = 0$. ■

Таким образом, действительная и мнимая части комплексного решения однородного линейного уравнения являются действительными решениями этого уравнения, так что знание одного комплексного решения дает возможность найти два действительных решения.

8. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y'' + py' + qy = 0. \quad (16)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде $y = e^{\lambda x}$. Тогда $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Совершаем эту подстановку в (16) и выносим общий множитель $e^{\lambda x}$ за скобки:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + qe^{\lambda x} = 0, \quad e^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0.$$

Поскольку $e^{\lambda x} > 0$, то должно выполняться

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \quad (17)$$

Это квадратное уравнение. Оно называется **характеристическим уравнением** для дифференциального уравнения (16), а его корни называют **характеристическими числами**. Структура фундаментальной системы решений, а вместе с ней и общего решения уравнения (16) зависит от вида корней характеристического уравнения (17).

I случай. Уравнение (17) имеет два различных действительных корня λ_1 и λ_2 . Тогда мы имеем два решения однородного уравнения $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ и $y_2 = e^{\lambda_2 x}$. Эти решения линейно независимы, так как

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0.$$

Тогда их сумма с произвольными постоянными коэффициентами даёт общее решение:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Пример 1. Вернемся к примеру 1 из параграфа 1 главы 3. Добавим к нему начальные условия: в начале движения расстояние от центра равно 14 см., скорость $v=0$.

Найти закон движения.

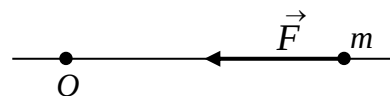


рис.1

Решение. Пусть $s=s(t)$ – расстояние от точки до центра. Тогда скорость $v=s'(t)$.

Результирующая сила (рис. 7.3) $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, где $\vec{F}_1$ направлена по движению и $F_1=10s$, а $\vec{F}_2$ направлена против движения, поэтому $F_2=-3v=-3s'$.

Закон движения $ma=F$, где $a=v' -$ ускорение. Значит,

$$s'' = 10s - 3s' \Leftrightarrow s'' + 3s' - 10s = 0.$$

Получили однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Составляем для него характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$. Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -5$. Общее решение дифференциального уравнения:

$$s = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-5t}.$$

Для того чтобы найти постоянные C_1 и C_2 , используем начальные данные: $s(0)=14$, $v(0)=0$. Но сначала надо найти скорость:

$$v = s' = 2C_1 e^{2x} - 5C_2 e^{-5x}.$$

Учитывая, что $e^0 = 1$, получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 14 = C_1 + C_2, \\ 0 = 2C_1 - 5C_2. \end{cases} \Rightarrow C_1 = 10, C_2 = 4.$$

Ответ: $y = 10e^{2t} + 4e^{-5t}$.

II случай. Уравнение (17) имеет два различных комплексных корня λ_1 и λ_2 . Тогда мы имеем два линейно независимых решения $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ и $y_2 = e^{\lambda_2 x}$, где $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, но эти решения являются комплекснозначными. Вспомним формулу Эйлера, согласно которой решение можно записать в виде:

$$y = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x).$$

По свойству 5 комплекснозначной функции действительная и мнимая части этой функции тоже являются решениями уравнения, т.е. у нас есть два действительных решения $y_1 = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$. Покажем, что они линейно независимы. Для этого вычислим определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos \beta x & e^{\alpha x} \sin \beta x \\ \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta e^{\alpha x} \sin \beta x & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \alpha e^{\alpha x} \sin \beta x + \beta e^{\alpha x} \cos \beta x \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2\alpha x} (\alpha \sin \beta x \cos \beta x + \beta \cos^2 \beta x - \alpha \sin \beta x \cos \beta x + \beta \sin^2 \beta x) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0.$$

Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$. Дискриминант $D = 2^2 - 4 \cdot 5 = -16$, $\sqrt{D} = \pm 4i$, корни: $\lambda_1 = 1 + 2i$, $\lambda_2 = 1 - 2i$.

Ответ: $y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

III случай. Уравнение (17) имеет один действительный двукратный корень λ . В этом случае у нас есть только одно решение $e^{\lambda x}$. Покажем, что в этом случае решением будет также функция $x e^{\lambda x}$.

Подставим $y = x e^{\lambda x}$ в уравнение (16). В левой части после простых преобразований получим

$$x e^{\lambda x} (x(\lambda^2 + p\lambda + q) + (2\lambda + p)).$$

Первая из скобок равна нулю, так как λ – корень характеристического уравнения. Вторая скобка равна нулю, поскольку этот корень двукратный, т.е. по теореме Виета $2\lambda = -p$. Следовательно, левая часть равна нулю и тем самым, $y = x e^{\lambda x}$ является решением уравнения (16).

Покажем, что решения $e^{\lambda x}$ и $x e^{\lambda x}$ линейно независимы. Вычислим вронскиан

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda x} & x e^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & \lambda x e^{\lambda x} + e^{\lambda x} \end{vmatrix} = e^{2\lambda x} \neq 0.$$

Значит, решения линейно независимы и общее решение имеет вид

$$y = e^{\lambda x} (C_1 x + C_2).$$

Пример 3. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$. Дискриминант $D = 0$, корни: $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$.

Ответ: $y = e^{3x} (C_1 x + C_2)$.

9. Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим теперь линейное неоднородное уравнение, коэффициенты которого являются постоянными:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x). \quad (1)$$

Как мы уже выяснили, его интегрирование сводится к интегрированию соответствующего однородного линейного уравнения:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0. \quad (2)$$

Напомним, что левую часть уравнения (1) мы обозначили, как линейный оператор $L(y)$. Оказывается, что уравнение (2) всегда интегрируемо в элементарных функциях. Решение этого уравнения, аналогично, как и для случая $n=2$, будем искать в виде $y = e^{\lambda x}$, где λ – произвольное постоянное число (может быть, комплексное). Тогда $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$, ..., $y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$. Сделаем подстановку в (2) и вынесем общий множитель $e^{\lambda x}$ за скобки:

$$L(e^{\lambda x}) = 0 \Leftrightarrow e^{\lambda x} P(\lambda) = 0,$$

где

$$P(\lambda) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n.$$

Поскольку $e^{\lambda x} > 0$, то должно выполняться

$$P(\lambda) = 0. \quad (18)$$

Таким образом, функция $y = e^{\lambda x}$ будет решением уравнения (2), если и только если число λ является корнем алгебраического уравнения (18). Оно называется **характеристическим уравнением** для дифференциального уравнения (2), а его корни называются **характеристическими числами**.

I случай. Пусть все корни уравнения (18) действительные и различные: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Тогда мы имеем n решений уравнения (2):

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}. \quad (19)$$

Эти решения определены на всей числовой прямой и линейно независимы, так как вронскиан $W(x) \neq 0$. Поэтому решения (19) образуют фундаментальную систему решений для уравнения (2). Их сумма с произвольными постоянными коэффициентами даёт общее решение:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

II случай. Пусть все корни уравнения (18) различны, но среди них есть комплексные. Напомним, что если коэффициенты уравнения действительные числа, то в этом случае все комплексные корни являются парными: если $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ является решением, то и $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ тоже является решением уравнения. В предыдущем пункте показано, что каждой паре сопряженных корней уравнения соответствуют два линейно независимых

решения действительных решения. В формуле общего решения каждой паре сопряженных комплексных корней будет соответствовать слагаемое вида

$$e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

III случай. Пусть среди корней уравнения (18) есть кратные и пусть корень λ_1 действительный и имеет кратность k . Можно доказать, что в этом случае функции

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = x e^{\lambda_1 x}, y_3 = x^2 e^{\lambda_1 x}, \dots, y_k = x^{k-1} e^{\lambda_1 x}$$

являются решениями уравнения и эти функции линейно независимы. Поэтому корню λ_1 в формуле общего решения соответствует их линейная комбинация, т.е. группа слагаемых вида:

$$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} + C_3 x^2 e^{\lambda_1 x} + \dots + C_k x^{k-1} e^{\lambda_1 x} = e^{\lambda_1 x} (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_k x^{k-1}).$$

IV случай. Если корень $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ комплексный кратности k , то корнем уравнения с действительными коэффициентами будет и число $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, причем его кратность тоже будет равна k . Этой паре комплексно сопряженных корней кратности k будет соответствовать $2k$ действительных частных решения, которые получаются, как и в **случае II**, разделением действительных и мнимых частей:

$$\begin{aligned} e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x, \\ e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x, x e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x. \end{aligned} \quad (20)$$

В формуле общего решения будет группа слагаемых вида:

$$e^{\alpha x} ((C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x + (C_{k+1} + C_{k+2} x + \dots + C_{2k} x^{k-1}) \sin \beta x).$$

После того, как мы нашли решения, которые соответствуют различным (не кратным) действительным и комплексным корням, кратным действительным и комплексным корням, мы берём сумму всех этих решений с произвольными коэффициентами и получаем общее решение однородного линейного уравнения (2).

Пример 4. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами: $y^{IV} - 16y = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение и находим его корни:

$$\begin{aligned} \lambda^4 - 16 = 0; (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda^2 + 4) = 0; \\ \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 2i, \lambda_4 = -2i. \end{aligned}$$

Корни характеристического уравнения простые. Значит, фундаментальная система решений имеет вид:

$$y_1 = e^{2x}, y_2 = e^{-2x}, y_3 = e^{0 \cdot x} \cos 2x = \cos 2x, y_4 = e^{0 \cdot x} \sin 2x = \sin 2x.$$

Общее решение исходного уравнения:

$$y_{00} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x.$$

10. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x). \quad (1)$$

и совместно с ним однородное уравнение

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0. \quad (2)$$

Если известно общее решение однородного уравнения, то частное решение неоднородного уравнения можно найти, пользуясь методом вариации произвольных постоянных (см. параграф 6). Это метод, безусловно, работает и для уравнений с постоянными коэффициентами. Однако применение метода Лагранжа часто приводит к громоздким вычислениям. При решении линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами во многих случаях легко можно подобрать частное решение и задача сводится к интегрированию однородного уравнения. Это всегда можно сделать, когда правая часть представляет из себя квазиполином вида

$$e^{ax} [R_m(x) \cos bx + R_s(x) \sin bx],$$

где $R_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0$ — многочлен m -ой степени, а $R_s(x)$ — многочлен s -ой степени. Рассмотрим различные частные случаи квазиполинома.

1 случай. Пусть правая часть уравнения (1) есть многочлен m -ой степени: $f(x) = R_m(x)$.

1 а). Пусть число $\nu = 0$ не является корнем характеристического многочлена. Тогда ищем частное решение $y_{\text{чн}}$ в виде

$$y_{\text{чн}} = Q_m(x),$$

где $Q_m(x)$ есть многочлен степени m с неопределенными коэффициентами: $Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$. Для того, чтобы найти его коэффициенты, мы подставляем это решение в уравнение (1) и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях получившегося равенства.

1 б). Пусть число $\nu = 0$ является корнем характеристического многочлена кратности k . Тогда ищем частное решение $y_{\text{чн}}$ в виде

$$y_{\text{чн}} = x^k Q_m(x),$$

где $Q_m(x)$ есть многочлен степени m с неопределенными коэффициентами.

2 случай. Пусть правая часть уравнения (1) есть произведение многочлена на показательную функцию: $f(x) = R_m(x) e^{ax}$, где степень многочлена $R_m(x)$ равна m .

2 а). Пусть число $\nu = a$ не является корнем характеристического многочлена. Тогда ищем частное решение $y_{\text{чн}}$ в виде

$$y_{\text{чн}} = Q_m(x) e^{ax},$$

где $Q_m(x)$ есть многочлен степени m с неопределенными коэффициентами.

2 б) Пусть число $\nu = a$ является корнем характеристического многочлена кратности k . Тогда ищем частное решение $y_{\text{чн}}$ в виде

$$y_{\text{чн}} = x^k Q_m(x) e^{ax},$$

где $Q_m(x)$ есть многочлен степени m с неопределенными коэффициентами.

3 случай. Пусть правая часть уравнения (1) имеет вид:

$$f(x) = e^{ax} R_m(x) \cos bx \quad \text{или} \quad f(x) = e^{ax} R_m(x) \sin bx,$$

где $R_m(x)$ – многочлен, старшая степень которого равна m , а a и b – действительные числа.

3 а). Если число $\nu = a + bi$ не является корнем характеристического многочлена, то частное решение ищем в виде

$$y_{\text{чн}} = e^{ax} [Q_m(x) \cos bx + P_m(x) \sin bx],$$

где $Q_m(x)$ и $P_m(x)$ – многочлены степени m с неопределенными коэффициентами. Для того чтобы найти коэффициенты, мы подставляем решение в уравнение (1) и приравниваем коэффициенты при $\cos bx$ и при $\sin bx$. Получим равенство двух многочленов, а затем приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x .

3 б) Если число $\nu = a + bi$ является корнем характеристического многочлена кратности k , то частное решение ищем в виде

$$y_{\text{чн}} = x^k e^{ax} [Q_m(x) \cos bx + P_m(x) \sin bx],$$

где $Q_m(x)$ и $P_m(x)$ – многочлены степени m с неопределенными коэффициентами.

4 случай. Пусть правая часть уравнения (1) имеет вид:

$$f(x) = e^{ax} [R_m(x) \cos bx + T_p(x) \sin bx],$$

где $R_m(x)$ и $T_p(x)$ – многочлены, старшая степень которых равна m и p соответственно, а a и b – действительные числа.

4 а). Если число $\nu = a + bi$ не является корнем характеристического многочлена, то частное решение ищем в виде

$$y_{\text{чн}} = e^{ax} [Q_s(x) \cos bx + P_s(x) \sin bx],$$

где $Q_s(x)$ и $P_s(x)$ – многочлены степени $s = \max\{m, p\}$ с неопределенными коэффициентами.

4 б). Если число $\nu = a + bi$ является корнем характеристического многочлена кратности k , то частное решение ищем в виде

$$y_{\text{чн}} = x^k e^{ax} [Q_s(x) \cos bx + P_s(x) \sin bx],$$

где $Q_s(x)$ и $P_s(x)$ – многочлены степени $s = \max\{m, p\}$ с неопределенными коэффициентами.

Таким образом, чтобы решить неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами и правой частью в виде квазиполинома, нужно:

1. Выписать однородное уравнение, составить по нему характеристическое и найти корни характеристического уравнения с учетом их кратностей.

2. Выписать правую часть уравнения (1) и выбрать один из 4-х случаев, который имеет правая часть.

3. По правой части уравнения составить число v .

4. Проверить является ли число v корнем характеристического уравнения и если является, то какова его кратность. Соответственно этому выбрать подслучай а) или б).

5. Записать вид частного решения.

6. Подставить частное решение в неоднородное уравнение и найти неопределенные коэффициенты.

7. Записать общее решение неоднородного уравнения, пользуясь теоремой 7.

Замечание. Если правая часть неоднородного уравнения представляет из себя сумму квазиполиномов, то нужно воспользоваться теоремой 5.

Пример 5. Найти частное решение линейного уравнения

$$y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}.$$

Решение. Рассмотрим однородное уравнение $y'' - 5y' + 4y = 0$. Будем искать его решение в виде $y = e^{\lambda x}$. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$ и найдем его корни. Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$.

Выпишем правую часть уравнения: $f(x) = 4x^2 e^{2x}$. Правая часть соответствует случаю 2.

Запишем по правой части число $v = 2$. Оно не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения. Имеем случай 2 а). Поэтому ищем частное решение в виде

$$y_{\text{чп}} = (ax^2 + bx + c)e^{2x}.$$

Тогда

$$y'_{\text{чп}} = (2ax + b)e^{2x} + 2(ax^2 + bx + c)e^{2x} = (2ax^2 + (2b + 2a)x + b + 2c)e^{2x};$$

$$\begin{aligned} y''_{\text{чп}} &= (4ax + 2b + 2a)e^{2x} + 2(2ax^2 + (2b + 2a)x + b + 2c)e^{2x} = \\ &= (4ax^2 + (4b + 8a)x + 2a + 4b + 4c)e^{2x}. \end{aligned}$$

Подставляем в уравнение и сразу сокращаем обе части на e^{2x} , поскольку эта величина строго положительна:

$$4ax^2 + (4b + 8a)x + 2a + 4b + 4c - 5(2ax^2 + (2b + 2a)x + b + 2c) + 4(ax^2 + bx + c) = 4x^2$$

Собираем в левой части равенства коэффициенты при одинаковых степенях x , и приравниваем коэффициент при x^2 к 4, а остальные – к 0. Получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2a = 4, \\ -2b - 2a = 0, \\ 2a - b - 2c = 0. \end{cases}$$

Отсюда $a = -2$, $b = 2$, $c = -3$.

Ответ: $y_{\text{чн}} = (-2x^2 + 2x - 3)e^{2x}$.

Пример 6. Найти общее решение уравнения

$$y'' - y = e^x \cos^2 x.$$

Решение. Ищем общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - y = 0$. Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Поэтому общее решение: $y_{00} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

Прежде чем искать частное решение уравнения неоднородного уравнения, преобразуем правую часть, с тем, чтобы понизить степень:

$$y'' - y = \frac{1}{2} e^x (1 + \cos 2x).$$

Пользуемся теоремой 5 (принципом суперпозиции) и ищем по отдельности частные решения уравнений

$$y'' - y = \frac{1}{2} e^x \quad \text{и} \quad y'' - y = \frac{1}{2} e^x \cos 2x.$$

Для первого уравнения $f_1(x) = \frac{1}{2} e^x$, $\nu = 1$ является корнем характеристического многочлена кратности 1. Имеем случай 2 б). Поэтому ищем решение в виде $y_{\text{чн}}^1 = A x e^x$.

Находим $(y_{\text{чн}}^1)' = A(x+1)e^x$, $(y_{\text{чн}}^1)'' = A(x+2)e^x$. Подставляем в уравнение: $A(x+2)e^x - A x e^x = \frac{1}{2} e^x \Leftrightarrow 2A e^x = \frac{1}{2} e^x$.

Отсюда $A = \frac{1}{4}$, $y_{\text{чн}}^1 = \frac{1}{4} x e^x$.

Для нахождения частного решения второго уравнения, составляем число $\nu = a + bi$. Получаем $\nu = 1 + 2i$. Это число не является корнем характеристического многочлена. Имеем случай 3а). Ищем частное решение в виде

$$y_{\text{чн}}^2 = e^x [A \cos 2x + B \sin 2x].$$

Тогда

$$\begin{aligned} (y_{\text{чн}}^2)' &= e^x [(A+2B)\cos 2x + (B-2A)\sin 2x], \\ (y_{\text{чн}}^2)'' &= e^x [(-3A+4B)\cos 2x - (3B+4A)\sin 2x]. \end{aligned}$$

Подставляем в уравнение, и после деления на e^x получим:

$$(-4A + 4B)\cos 2x - (4A + 4B)\sin 2x = \frac{1}{2}\cos 2x.$$

Имеем систему:

$$\begin{cases} -4A + 4B = \frac{1}{2}, \\ -(4A + 4B) = 0. \end{cases}$$

Отсюда $A = -\frac{1}{16}$, $B = \frac{1}{16}$; $y_{\text{чп}} = \frac{1}{16}e^x[-\cos 2x + \sin 2x]$.

Частное решение первоначального уравнения:

$$y_{\text{чп}} = \frac{1}{4}xe^x + \frac{1}{16}e^x[-\cos 2x + \sin 2x].$$

Общее решение уравнения :

$$y_{\text{он}} = \frac{1}{4}xe^x + \frac{1}{16}e^x[-\cos 2x + \sin 2x] + C_1e^x + C_2e^{-x}.$$

11. Линейные уравнения Эйлера

Пусть у нас есть линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами. Общих методов интегрирования уравнений такого вида нет. Иногда удается с помощью замены переменных преобразовать такое уравнение в линейное уравнение с постоянными коэффициентами. В этом случае с помощью обратной замены можно найти решение уравнения с переменными коэффициентами. В частности, таким уравнением является **уравнение Эйлера**:

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + a_2 x^{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0, \quad (21)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ — постоянные числа. Если разрешить это уравнение относительно $y^{(n)}$, то можно заметить, что $x = 0$ является особой точкой, но для каждого из интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ выполняются все условия теоремы существования и единственности. Построим решение для положительных x . Для отрицательных переменных поступают аналогично, заменяя всюду x на $-x$.

Введем новую переменную по формуле $t = \ln x$, тогда $x = e^t$. Вычислим выражения последовательных производных y по x через производные y по t . Имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{x} = \frac{dy}{dt} e^{-t}.$$

Можно заметить, что $\frac{d}{dx} = \frac{d}{dt} e^{-t}$. Тогда

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} e^{-t} \right) e^{-t} = \left(\frac{d^2 y}{dt^2} e^{-t} - \frac{dy}{dt} \right) e^{-2t}.$$

Выражения для первой и второй производных по x содержат множители e^{-t} и e^{-2t} , а также линейные функции от $\frac{dy}{dt}$ и $\frac{d^2y}{dt^2}$. Допустим, что k -ая производная будет иметь вид:

$$\frac{d^k y}{dx^k} = \left(\frac{d^k y}{dt^k} + p_{k-1} \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}} + \dots + p_1 \frac{dy}{dt} \right) e^{-kt},$$

где $p_{k-1}, \dots, p_1$ — некоторые постоянные. Тогда $(k+1)$ -ая производная будет иметь вид:

$$\frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} = \left(\frac{d^{k+1} y}{dt^{k+1}} + (p_{k-1} - k) \frac{d^k y}{dt^k} + \dots - k p_1 \frac{dy}{dt} \right) e^{-(k+1)t},$$

т.е. снова множитель $e^{-(k+1)t}$, а в скобке — линейная комбинация производных от первого до $(k+1)$ -ого порядка с постоянными коэффициентами. Следовательно, это свойство доказано для любого натурального k . Подставляя полученные выражения в уравнение (21), замечаем, что множители $x^k = e^{kt}$ взаимно уничтожаются с множителями e^{-kt} и получаем уравнение с постоянными коэффициентами.

Пример 7. Найти общее решение уравнения $x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0$.

Решение. Сделаем замену переменной $x = e^t$. Получаем $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} e^{-t}$,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{d^2 y}{dt^2} e^{-t} - \frac{dy}{dt} \right) e^{-2t}. \text{ Подставив в уравнение, имеем: } y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ имеет один корень $\lambda = 3$ кратности 2. Общее решение этого уравнения: $y = e^{3t}(C_1 + C_2 t)$. Делаем обратную замену переменной: $y = x^3(C_1 + C_2 \ln x)$.

Ответ: $y = x^3(C_1 + C_2 \ln x)$.

Замечание. К уравнению с постоянными коэффициентами заменой $ax + b = e^t$ приводится уравнение

$$(ax + b)^n y^{(n)} + a_1(ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + a_2(ax + b)^{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(ax + b)y' + a_n y = 0.$$

12. Применение линейных дифференциальных уравнений при изучении колебательных процессов

Предположим, что материальная точка массы m движется по оси Ox под воздействием силы F , зависящей от времени t , положения точки $x(t)$ и скорости $x'(t)$. Ускорение этой точки есть $x''(t)$. Тогда по второму закону Ньютона

$$x''(t) = f(t, x, x'). \quad (22)$$

где $f(t, x, x') = \frac{1}{m} F(t, x, x')$. Тем самым, движение описывается дифференциальным уравнением второго порядка. Всякое решение этого уравнения соответствует некоторому движению. Основной задачей интегрирования уравнения (22) является нахождение всех движений, определяемых этим

уравнением, и изучение их свойств. Рассмотрим один часто встречающийся в приложениях случай такого движения, а именно случай колебательных явлений.

I. Уравнение колебаний

Пусть материальная точка массы $m > 0$ движется по оси Ox под воздействием:

1) восстанавливающей силы $F_1 = -ax$ ($a > 0$), направленной против смещения x ;

2) силы сопротивления внешней среды $F_2 = -bv = -b\dot{x}$ ($b \geq 0$), которая пропорциональна скорости;

3) $F_3 = F(t)$ – внешней возмущающей силы, направленной по оси Ox .

По второму закону Ньютона:

$$F = F_1 + F_2 + F_3,$$

где $F = ma = m\ddot{x}$.

Подставим в последнее равенство значения сил. Получим дифференциальное уравнение

$$m\ddot{x} = -ax - b\dot{x} + F(t).$$

Приведем это уравнение к стандартному виду, разделив обе части на $m \neq 0$:

$$\ddot{x} + \frac{a}{m}x + \frac{b}{m}\dot{x} = \frac{F(t)}{m}.$$

Обозначим $\frac{b}{m} = 2p$, $p \geq 0$; $\frac{a}{m} = k^2 > 0$; $\frac{F(t)}{m} = f(t)$. Тогда получим уравнение

$$\ddot{x} + 2p\dot{x} + k^2x = f(t). \quad (23)$$

Уравнение (23) – линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Уравнение (23) называют **уравнением колебаний**.

Пример 8. Движение точки массы m , закрепленной на пружине, по горизонтальной прямой под действием силы Гука, которая пропорциональна отклонению точки от положения равновесия и направлена в сторону, противоположную отклонению.

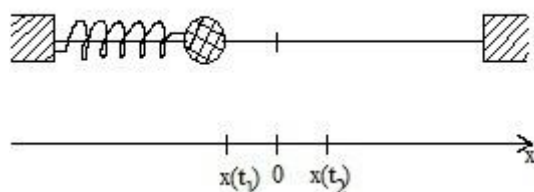


Рисунок 1 – Движение шарика на пружине

Можно показать, что при отсутствии сопротивления среды и отсутствии возмущающей силы движение точки будет описываться уравнением

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0,$$

где k – коэффициент упругости пружины.

Пример 9. Движение математического маятника. Математический маятник представляет из себя материальную точку массы m , подвешенную на нити длиной l . После отклонения точки в вертикальной плоскости, она под действием силы тяжести движется по окружности радиуса l . Величина l называется длиной маятника. Если обозначить через $\varphi(t)$ угол отклонения нити от положения равновесия, то можно показать, что при отсутствии силы сопротивления среды движение будет описываться уравнением

$$l \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + g\varphi = 0,$$

где g – ускорение свободного падения.

II. Свободные колебания

Рассмотрим случай, когда $f(t) \equiv 0$. Тогда уравнение (23) примет вид

$$\ddot{x} + 2p\dot{x} + k^2x = 0. \quad (24)$$

Это линейное однородное уравнение второго порядка. Его называют **уравнением свободных колебаний**. Уравнение (23) называют **уравнением вынужденных колебаний**. По методу Эйлера частное решение ищем в виде $x = e^{\lambda x}$. Подставляем в (24) и получим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2p\lambda + k^2 = 0.$$

Его корни: $\lambda_1 = -p + \sqrt{p^2 - k^2}$, $\lambda_2 = -p - \sqrt{p^2 - k^2}$. Для подкоренного выражения возможны следующие три случая:

- 1) $p > k$, тогда $p^2 - k^2 > 0$;
- 2) $p = k$, тогда $p^2 - k^2 = 0$;
- 3) $p < k$, тогда $p^2 - k^2 < 0$.

Случай 1. Пусть $p > k$. Тогда корни λ_1, λ_2 – вещественные. При этом $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0$, т.к. $p > k$, но $-p \pm \sqrt{p^2 - k^2} < 0$. Общее решение уравнения (24) имеет вид

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Исследуем поведение амплитуды x при $t \rightarrow \infty$, учитывая, что $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}) = C_1 \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_1 t} + C_2 \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_2 t} = 0 + 0 = 0.$$

Геометрическое поведение амплитуды построено на рисунке 2. При условии $p > k$ колебаний нет и материальная точка стремится в положение равновесия $x = 0$.

Случай 2. Пусть $p = k$. Тогда уравнение имеет один двукратный корень $\lambda = -p$. Общее решение имеет вид $x(t) = c_1 e^{-pt} + tc_2 e^{-pt}$.

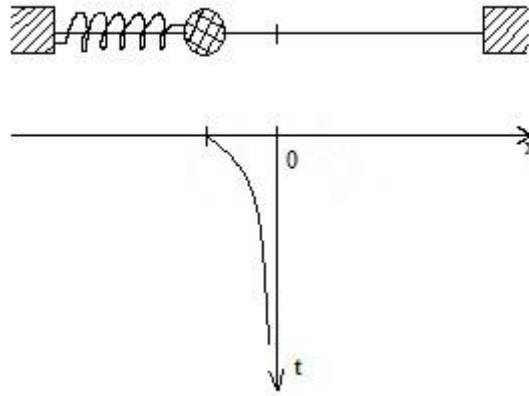


Рисунок 2 – Поведение амплитуды при отсутствии колебаний

Рассмотрим поведение амплитуды $x(t)$ при $t \rightarrow \infty$, учитывая, что $-p < 0$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (C_1 e^{-pt} + C_2 t e^{-pt}) = C_1 \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt} + C_2 \lim_{t \rightarrow \infty} t e^{-pt} = 0 + 0 = 0.$$

Геометрическое поведение амплитуды приведено на рисунке 3.

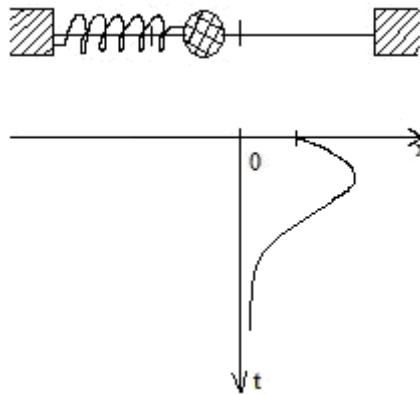


Рисунок 3 – Поведение амплитуды при кратном корне

При условии $p = k$ тоже колебания отсутствуют точка стремится в положение равновесия $x = 0$.

Случай 3. Пусть $p < k$. Обозначим $\omega^2 = k^2 - p^2$. Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = -p + \omega i$, $\lambda_2 = -p - \omega i$. Тогда фундаментальная система решений имеет вид

$$x_1 = e^{-pt} \cos \omega t, \quad x_2 = e^{-pt} \sin \omega t,$$

а общее решение уравнения записывается в виде

$$x(t) = c_1 e^{-pt} \cos \omega t + c_2 e^{-pt} \sin \omega t.$$

Для удобства исследования преобразуем правую часть

$$x(t) = e^{-pt} \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \cos \omega t + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \sin \omega t \right).$$

Существует угол φ такой, что $\sin \varphi = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$, $\cos \varphi = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$. Обозначим $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$. Тогда

$$x(t) = Ae^{-pt}(\sin \varphi \cdot \cos \omega t + \cos \varphi \cdot \sin \omega t) = Ae^{-pt} \sin(\omega t + \varphi).$$

Итак, общее решение примет вид

$$x(t) = Ae^{-pt} \sin(\omega t + \varphi).$$

Величину Ae^{-pt} называют амплитудой колебаний. Очевидно, что с течением времени амплитуда уменьшается и стремится к нулю. ω – частота колебаний, φ – начальная фаза, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ – период колебаний. В этом случае имеем дело с **затухающими гармоническими колебаниями**.

График амплитуды $x(t)$ приведен на рисунке 4.

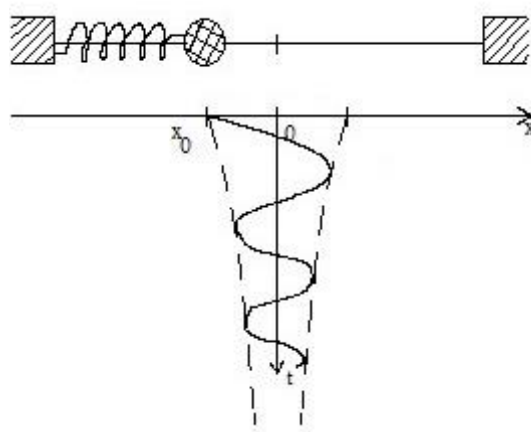


Рисунок 4 – Затухающие гармонические колебания

III. Свободные колебания в случае отсутствия сопротивления среды

Предположим, что в физической модели свободных колебаний отсутствует сопротивление среды. Тогда уравнение (23) упрощается так: $p = 0$, $f(t) \equiv 0$, и получаем линейное однородное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \quad (25)$$

Решим уравнение (25). Для этого воспользуемся методом Эйлера. Возьмем $x = e^{\lambda t}$ и подставим в уравнение. Получим характеристическое уравнение $\lambda^2 + k^2 = 0$. Его корни $\lambda_1 = ki$, $\lambda_2 = -ki$. Общее решение уравнения (25):

$$x(t) = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt.$$

Преобразуем правую часть аналогично проделанному в пункте 2:

$$x(t) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \cos kt + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \sin kt \right).$$

Обозначим $\sin \varphi = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$, $\cos \varphi = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$, $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$. Тогда общее решение:

$$x(t) = A \sin(\varphi + kt).$$

Можно заметить, что точка при отсутствии сопротивления среды и внешней силы совершает бесконечные гармонические колебания, причем эти колебания являются незатухающими. Величину A называют амплитудой колебаний, k – собственная частота колебаний. Движение в данном случае называют **чисто гармоническим колебанием**. График колебаний изображен на рисунке 5

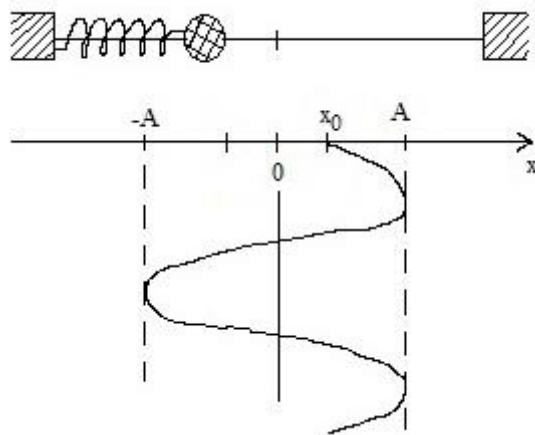


Рисунок 5 – График математической модели чисто гармонических колебаний

IV. Случай колебаний в среде без сопротивления при наличии периодической внешней силы, когда собственная частота колебаний k не совпадает с частотой ω внешней силы

Пусть сопротивление среды отсутствует, а внешняя сила является периодической и равна $f(t) = M \sin \omega t$. Получим уравнение следующего вида

$$\ddot{x} + k^2 x = M \sin \omega t. \quad (26)$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$x_{\text{он}}(t) = x_{\text{оо}}(t) + x_{\text{чн}}(t),$$

Общее решение однородного уравнения мы нашли в предыдущем пункте

$$x_{\text{оо}}(t) = A \sin(\varphi + kt).$$

Значит нужно найти частное решение неоднородного уравнения $x_{\text{чн}}(t)$.

Число k называется **собственной частотой колебаний**, а число ω – **частотой внешних колебаний**.

Пусть $k \neq \omega$. Частное решение будем находить по виду правой части. Для этого рассмотрим функцию f в стандартном виде:

$$f(t) = M \sin \omega t = e^{0t} (0 \cdot \cos \omega t + M \sin \omega t).$$

Составим число $v = a + bi = 0 + \omega i$. Так как $k \neq \omega$, то это число не совпадает с корнями характеристического уравнения. M – это многочлен нулевой степени, тогда частное решение будет

$$x_{\text{чн}}(t) = x^0 e^{0t} (a \cos \omega t + b \sin \omega t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t.$$

Для того, чтобы найти неизвестные параметры a и b , нужно решение $x_{\text{чн}}(t)$ подставить в исходное уравнение (26). Для этого найдем первую производную

$$x'_{\text{чн}}(t) = \omega(-a \sin \omega t + b \cos \omega t).$$

и вторую производную

$$x''_{\text{чн}}(t) = \omega^2(-a \cos \omega t - b \sin \omega t).$$

Подставляем в (26):

$$a(k^2 - \omega^2) \cos \omega t + b(k^2 - \omega^2) \sin \omega t = M \sin \omega t.$$

Приравниваем коэффициенты при $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$:

$$\cos \omega t: a(k^2 - \omega^2) = 0,$$

$$\sin \omega t: b(k^2 - \omega^2) \sin \omega t = M.$$

Так как $k \neq \omega$, то $k^2 - \omega^2 \neq 0$, следовательно $a = 0$, а $b = \frac{M}{k^2 - \omega^2}$. Таким обра-

зом, $x_{\text{чн}}(t) = \frac{M}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t$. Общее решение имеет вид:

$$x_{\text{он}}(t) = A \sin(\varphi + kt) + \frac{M}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t.$$

Формула общего решения показывает, что колебания происходят по сложной траектории, состоящей из суммы двух гармоник. Основная гармоника – первое слагаемое, на которое накладывается «слабая» гармоника (слагаемое два). Искривление происходит за счет второго слагаемого. Материальная точка совершает сложные незатухающие колебания.

V. Случай колебаний в среде без сопротивления при наличии периодической внешней силы, когда собственная частота колебаний k совпадает с частотой ω внешней силы

Пусть выполняется равенство $k = \omega$, тогда уравнение колебаний можно переписать в виде

$$\ddot{x} + k^2 x = M \sin kt.$$

Однородное уравнение

$$\ddot{x} + k^2 x = 0.$$

Общее решение однородного уравнения

$$x_{\text{оо}}(t) = A \sin(\varphi + kt).$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения. Правая часть уравнения имеет вид

$$f(t) = M \sin kt = e^{0t} (0 \cdot \cos kt + M \sin kt).$$

Составим число $\nu = a + bi = 0 + ki$. Это число совпадает с корнем характеристического уравнения. Кратность этого корня равна 1. M – это множитель нулевой степени, тогда частное решение будет

$$x_{\text{чн}}(t) = t^1 e^{0t} (a \cos \omega t + b \sin \omega t) = t(a \cos \omega t + b \sin \omega t).$$

Для того, чтобы найти неизвестные параметры a и b , нужно найти первую и вторую производные:

$$x'_{\text{чн}}(t) = a \cos kt - akt \sin kt + b \sin kt + bkt \cos kt,$$

$$x''_{\text{чн}}(t) = -ak \sin kt - ak \sin kt - akt^2 \cos kt + bk \cos kt + bk \cos kt - bk^2 \sin kt,$$

Подставим полученные выражения в уравнение. После преобразований получим

$$-2ak \sin kt + 2bk \cos kt = M \sin kt.$$

Сравним коэффициенты при $\cos kt$ и $\sin kt$:

$$\sin kt: -2ak = M, \cos kt: 2bk = 0.$$

Выразим $a = -\frac{M}{2k}$, $b = 0$. Тогда $x_{\text{чн}}(t) = -\frac{M}{2k} t \cos kt$ и общее решение уравнения имеет вид

$$x_{\text{он}}(t) = A \sin(\varphi + kt) - \frac{M}{2k} t \cos kt.$$

Общее решение показывает, что слагаемое $A \sin(\varphi + kt)$ ограничено, а слагаемое $-\frac{M}{2k} t \cos kt$ является колеблющейся функцией, причем значение амплитуды неограниченно растет за счет увеличивающегося параметра t . Изобразим все на рисунке 6.

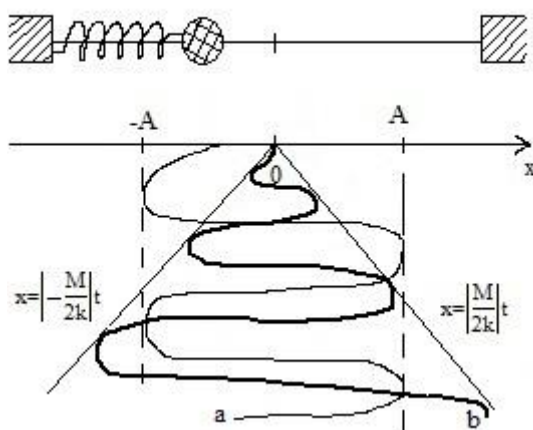


Рисунок 6 – Явление резонанса. a – график первого слагаемого, b – график второго слагаемого

Наибольшее значение амплитуды неограниченно растет и выходит за физическую границу слева и справа.

Этот процесс называется **явлением резонанса**. С явлением резонанса мы встречаемся в повседневной жизни: включая радиоприемник или телевизор, во время поездки на транспорте, слушая музыку и т.д. В одном случае он вреден и приводит к нежелательным последствиям, даже к катастрофам, в другом – полезен и потому мы используем его в своих целях.

Приведем примеры вредных последствий резонанса. Так в 1905 году в Петербурге разрушился Египетский мост. Произошло это во время про-

хождения по мосту эскадрона Конногвардейского полка. Частота силового воздействия солдат оказалась близкой к частоте одного из собственных колебаний моста, возникла усиленная вибрация и мост рухнул.

7 ноября 1940 года вследствие ветра произошла самая крупная катастрофа – авария Такомского моста, имевшего третий в мире по величине пролет (854 м).

В 1907 году 2 марта в главном зале Таврического дворца должно было состояться заседание Государственной думы. Утром того же дня для проветривания зала на чердаке был включен электровентилятор, который вызвал усиливающиеся вибрации и обвал потолка.

Резонанс не только вреден, но и полезен. Явление резонанса используется в различных областях науки, техники, медицины. Так, например, акустический резонанс применяется для усиления слуха, в радиоаппаратуре используется электрический резонанс. В медицине широкое распространение имеет вибротерапия, положительные эффекты которой основаны на явлении биомеханического резонанса.

ЧАСТЬ 5. Системы ОДУ

1. Нормальные системы ОДУ

Определение. Система ОДУ первого порядка разрешенных относительно производной называется нормальной системой. Она имеет вид:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots \dots \dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – это неизвестные функции. Будем записывать систему ещё так:

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1')$$

Если ввести векторы $\bar{y}(y_1, y_2, \dots, y_n)$, $\bar{f}(f_1, f_2, \dots, f_n)$, то можно записать систему в векторной форме:

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \bar{f}(x, \bar{y}). \quad (1'')$$

Если правая часть в (1'') (т.е. все правые части в (1)) не зависит от x , то такая система называется автономной. Она имеет вид в векторной форме:

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \bar{f}(\bar{y}). \quad (2'')$$

Решением системы (1) на интервале (a, b) называется упорядоченный набор функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ определенных и непрерывно дифференцируемых на интервале (a, b) , и таких что при подстановке их в систему (1) все уравнения превращаются в верные тождества при $x \in (a, b)$.

2. Механическое истолкование системы ОДУ

В приложениях часто независимую переменную обозначают через t , и систему записывают в виде

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = X_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ \dots \dots \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = X_n(t, x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Независимая переменная t означает время, искомые функции $x_1(t), \dots, x_n(t)$ – координаты точки n -мерного пространства. Это пространство называется **фазовым**.

Для системы двух уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = X(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Y(t, x, y). \end{cases}$$

роль фазового пространства играет плоскость Oxy , которая называется **фазовой**.

Всякое решение $x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$ системы представляет собой некоторый закон движения точки $M(x_1(t), \dots, x_n(t))$ в фазовом пространстве и называется **движением**. Путь, описываемый точкой в фазовом пространстве, называется **траекторией** этого движения.

Таким образом, траектория движения – это проекция движения из пространства $(t, x_1, \dots, x_n)$ в фазовое пространство $(x_1, \dots, x_n)$.

Если существует точка $(x_1^0, \dots, x_n^0)$, такая, что при всех $t \leq t_0$ выполнено $X_k(t, x_1^0, \dots, x_n^0) = 0$, то система определяет движение $x_1 = x_1^0, \dots, x_n = x_n^0$. Такое движение называется **состоянием покоя**. Траекторию этого движения называют **точкой равновесия**.

3. Задача Коши

Задача Коши ставится следующим образом: среди всех решений системы (1) найти решение $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $y_1 = y_1^0, y_2 = y_2^0, \dots, y_n = y_n^0$, при $x = x_0$.

Если система записана в виде $\frac{dy}{dx} = \bar{f}(x, \bar{y})$, то стоит задача найти решение $\bar{y} = \bar{y}(x)$, удовлетворяющее условию $\bar{y}(x) = \bar{y}^0$ при $x = x_0$.

Механический смысл: решить задачу Коши означает, что среди всех движений, определяемых системой $\frac{dx_k}{dt} = X_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, $k = 1, 2, \dots, n$, найти движение $x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$, удовлетворяющее начальным условиям $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, \dots, x_n = x_n^0$ при $t = t_0$, т.е. найти такое движение, при котором движущаяся точка занимает заданное положение $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ в фазовом пространстве в заданный момент времени $t = t_0$.

4. Теорема существования и единственности (ТСЕ)

Теорема Пикара. Если правые части системы (1) определены в области $R: |x - x_0| \leq a, |y_k - y_k^0| \leq b, k = 1, 2, \dots, n$, и удовлетворяют в ней двум условиям:

1) правые части непрерывны, (а следовательно, ограничены в области: $|f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)| \leq M, M > 0$);

2) существуют и ограничены частные производные: $\left| \frac{\partial f_k}{\partial y_l} \right| \leq K$,

то система (1) имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y_1 = y_1^0, y_2 = y_2^0, \dots, y_n = y_n^0$, при $x = x_0$, заведомо определенное на интервале $|x - x_0| \leq h$, где $h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$.

5. Общее решение системы

Определение. Общим решением системы (1) называется совокупность n функций $y_k = \varphi_k(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, $k = 1, 2, \dots, n$, такая что

- 1) она непрерывно дифференцируема в области задания системы;
- 2) для любых начальных данных $y_1 = y_1^0, y_2 = y_2^0, \dots, y_n = y_n^0$, при $x = x_0$ система

$$\begin{cases} y_1^0 = \varphi_1(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ y_2^0 = \varphi_2(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ \dots\dots\dots \\ y_n^0 = \varphi_n(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n), \end{cases} \quad (3)$$

разрешима относительно неизвестных $C_1, C_2, \dots, C_n$;

3) совокупность функций является решением системы (1) при любом фиксированном наборе постоянных, найденных из системы (3), когда точка $(x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ пробегает область задания системы.

Пример 1. Показать, что функции

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t; y = C_1 \sin t - C_2 \cos t.$$

есть общее решение системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y, \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases}$$

в области $-\infty \leq t \leq +\infty, -\infty \leq x \leq +\infty, -\infty \leq y \leq +\infty$.

Решение. 1. Непосредственной проверкой убеждаемся, что эти функции являются решениями системы.

2. Система $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$; разрешима относительно C_1 и C_2 :

$$y = C_1 \sin t - C_2 \cos t$$

$$C_1 = x \cos t + y \sin t;$$

$$C_2 = x \sin t - y \cos t.$$

Значит, данные функции есть общее решение системы.

Траектории системы – окружности $x^2 + y^2 = C_1^2 + C_2^2$. ▲

Решение называется **частным**, если через каждую его точку не проходит никакое другое решение системы, т.е. в каждой точке выполняются условия ТСЕ.

Решение называется **особым**, если в каждой его точке нарушена единственность решения задачи Коши. В окрестности каждой точки особого решения должно быть нарушено какое-то из условий теоремы Пикара.

6. Связь между системой дифференциальных уравнений и уравнением n -го порядка

Пусть дано уравнение n -го порядка. Для упрощения выкладок возьмем уравнение второго порядка:

$$y'' = f(x, y, y') \quad (4).$$

Обозначим искомую функцию y через y_1 , y' через y_2 . Тогда можно записать систему

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2). \end{cases}$$

Эта система называется *нормальной системой дифференциальных уравнений, равносильной уравнению (4)*. Если мы найдем решение уравнения, то тем самым мы найдем и решение системы и наоборот.

Пусть теперь дана система

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2). \end{cases} \quad (5)$$

где f_i – дифференцируемые функции.

Продифференцируем первое уравнение по x , считая y_1 и y_2 функциями от x и заменим y_1' и y_2' их значениями из системы (5). Получим $y_1'' = \Phi(x, y_1, y_2)$. Составим систему из первого уравнения системы (5) и полученного уравнения. Найдем из нее y_2 и подставим в уравнение $y_1'' = \Phi(x, y_1, y_2)$. Получим $y_1'' = f(x, y_1, y_1')$. Это уравнение называют *уравнением 2-ого порядка, равносильным системе (5)*.

Пример 2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y, \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases}$$

Решение. Продифференцируем первое уравнение: $\frac{d^2x}{dt^2} = -y'$. Подставим в полученное уравнение выражение для y' : $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$. Его общим решением будет $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$.

Ответ. $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$; $y = C_1 \sin t - C_2 \cos t$.

7. Общие методы интегрирования систем дифференциальных уравнений

Последовательное интегрирование. Если система дифференциальных уравнений состоит из n уравнений первого порядка, каждое из которых содержит одну неизвестную функцию, т.е. имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_2), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ \frac{dz}{dt} = f_n(x, y_n). \end{cases}$$

то ее интегрирование сводится к интегрированию каждого из уравнений в отдельности.

Пример 3. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x, \\ \frac{dy}{dt} = 2y. \end{cases}$$

Решение. Оба уравнения системы являются уравнениями с разделяющимися переменными, проинтегрировав которые имеем $x = C_1 e^{-t}$, $y = C_2 e^{2t}$. Это и есть общее решение системы. ■

В случае, когда система имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \frac{dz}{dt} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

ее интегрируют последовательно. Вначале интегрируют первое уравнение, его решение подставляют во второе и интегрируют получившееся уравнение и т.д.

Пример 4. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2tx, \\ \frac{dy}{dt} = xy e^{t^2}. \end{cases}$$

Решение. Первое уравнение системы является уравнением с разделяющимися переменными, проинтегрировав которое имеем $x = C_1 e^{-t^2}$.

Подставляем найденное значение x во второе уравнение: $dy/dt = C_1 y$.
Отсюда $y = C_2 e^{C_1 t}$.

$$\text{Ответ. } \begin{cases} x = C_1 e^{-t^2}, \\ y = C_2 e^{C_1 t}. \end{cases}$$

Метод исключения. Нормальную систему дифференциальных уравнений приводят к одному уравнению n -ого порядка методом, рассмотренным в п.6, или к нескольким уравнениям.

Интегрируемые комбинации. Одним из основных методов интегрирования систем (1) является **метод интегрируемых комбинаций**. Сущность этого метода в том, что с помощью арифметических операций из уравнений данной системы образуют так называемые **интегрируемые комбинации**, т.е. легко интегрируемые уравнения относительно новой неизвестной функции.

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - z, \\ \frac{dy}{dt} = x + y + t, \\ \frac{dz}{dt} = x + z + t. \end{cases}$$

Решение. Вычтем почленно из второго уравнения третье, получим $\frac{d}{dt}(y - z) = y - z$. Тогда $y - z = C_1 e^t$. Подставив это в первое уравнение, найдем $x = C_1 e^t + C_2$. Подставим найденное для x выражение во второе уравнение. Получаем

$$\frac{dy}{dt} = y + C_1 e^t + C_2 + t.$$

Это линейное уравнение. Решая его, получим

$$y = (C_1 t + C_3) e^t - 1 - t - C_2.$$

Тогда

$$z = y - C_1 e^t = (C_1 t + C_3 - C_1) e^t - 1 - C_2.$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 e^t + C_2, \\ y = (C_1 t + C_3) e^t - 1 - t - C_2, \\ z = (C_1 t + C_3 - C_1) e^t - 1 - C_2. \end{cases}$$

8. Автономная система линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями $x = x(t)$, $y = y(t)$:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases} \quad (6)$$

Её характерная особенность заключается в том, что она не содержит в явном виде независимую переменную t . Такая система дифференциальных уравнений называется автономной. Система (6) не содержит никаких ограничений на возможные значения x и y , и поэтому она определена на всей плоскости.

Теорема. Система (6) имеет единственное решение $(x(t), y(t))$, удовлетворяющее начальным данным $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$.

Будем искать решение системы (6) в виде $x = \alpha e^{kt}$, $y = \beta e^{kt}$, где k , α , β – постоянные, которые надо правильно подобрать. Тогда $x' = k\alpha e^{kt}$, $y' = k\beta e^{kt}$. Подставляем это в систему:

$$\begin{cases} k\alpha e^{kt} = a_{11}\alpha e^{kt} + a_{12}\beta e^{kt}, \\ k\beta e^{kt} = a_{21}\alpha e^{kt} + a_{22}\beta e^{kt}. \end{cases}$$

Поскольку $e^{kt} > 0$, то можем каждое из уравнений разделить на это выражение. Получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных α и β :

$$\begin{cases} a_{11}\alpha + a_{12}\beta = k\alpha, \\ a_{21}\alpha + a_{22}\beta = k\beta. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_{11}-k)\alpha + a_{12}\beta = 0, \\ a_{21}\alpha + (a_{22}-k)\beta = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Матрица этой системы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}-k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-k \end{pmatrix}$$

Согласно правилу Крамера, эта система имеет единственное решение, если $\det \mathbf{A} \neq 0$. Тогда это решение, очевидно, будет $(0, 0)$. Значит, ненулевое решение существует только когда $\det \mathbf{A} = 0$. Мы получаем уравнение, которое называется характеристическим уравнением для системы (6):

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow k^2 - (a_{11}+a_{22})k + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0. \quad (8)$$

Это квадратное уравнение относительно неизвестного k . Мы ограничимся только случаем, когда уравнение (8) имеет два различных действительных корня k_1 и k_2 . Мы подставляем k_1 в систему (7) и находим первое решение (α_1, β_1) ; затем подставляем k_2 в систему (7) и находим второе решение (α_2, β_2) . Тем самым мы получаем два различных решения автономной системы дифференциальных уравнений (6):

$$\text{для } k_1: x = \alpha_1 e^{k_1 t}, y = \beta_1 e^{k_1 t}; \quad (9)$$

$$\text{для } k_2: x = \alpha_2 e^{k_2 t}, y = \beta_2 e^{k_2 t}. \quad (10)$$

Общее решение системы (6) является комбинацией решений (9) и (10) с произвольными постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} x = C_1 \alpha_1 e^{k_1 t} + C_2 \alpha_2 e^{k_2 t}, \\ y = C_1 \beta_1 e^{k_1 t} + C_2 \beta_2 e^{k_2 t}. \end{cases}$$

Пример 6. Найти решение автономной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 2y, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=5, y(0)=3$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение и находим его корни:

$$\begin{vmatrix} 2-k & 1 \\ 1 & 2-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-k)^2 - 1 = 0;$$

$$2-k=1 \quad \text{или} \quad 2-k=-1, \quad k_1=3, \quad k_2=1.$$

Ищем α и β соответствующие каждому из значений k_1, k_2 :

$$k_1=3 \quad \begin{cases} (2-3)\alpha + \beta = 0, \\ \alpha + (2-3)\beta = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta = 0, \\ \alpha - \beta = 0. \end{cases} \quad \alpha=1, \beta=1.$$

$$k_2=1 \quad \begin{cases} (2-1)\alpha + \beta = 0, \\ \alpha + (2-1)\beta = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0, \\ \alpha + \beta = 0. \end{cases} \quad \alpha=1, \beta=-1.$$

Заметим, что в каждом из случаев α и β находятся неоднозначно. Общее решение имеет вид:

$$\begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^t, \\ y = C_1 e^{3t} - C_2 e^t. \end{cases}$$

Подставляем сюда начальные данные (напомним, что $e^0=1$) и находим значения постоянных C_1 и C_2 :

$$\begin{cases} 5 = C_1 + C_2, \\ 3 = C_1 - C_2. \end{cases} \quad C_1=4, \quad C_2=1.$$

Ответ:
$$\begin{cases} x = 4e^{3t} + e^t, \\ y = 4e^{3t} - e^t. \end{cases}$$

Литература

1. Карташев А. П., Рождественский Б. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. – М.: Наука, 1980.
2. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Минск: Вышэйшая школа, 1974.
3. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1970.
4. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1974.
5. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985.
6. Подоксёнов М. Н., Сури́н Т. Л. Дифференциальные уравнения первого порядка. – Витебск, 2020. – URL: <https://rep.vsu.by/handle/123456789/26091>.

Учебное издание

ПОДОКСЁНОВ Михаил Николаевич

СУРИН Татьяна Леонидовна

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ**

Методические рекомендации

Технический редактор

Г.В. Разбоева

Компьютерный дизайн

Л.Р. Жигунова

Подписано в печать 2021. Формат 60x84 ¹/₁₆. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 3,02. Уч.-изд. л. 2,99. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/255 от 31.03.2014.

Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.