

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ «ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА»

Факультет математики и информационных технологий

Кафедра алгебры и методики преподавания математики

Допущена к защите

«15» мая 2020 г.

Заведующий кафедрой

 Н.Т. Воробьев

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

**Решеточные свойства  $\sigma$ -локальных формаций**

Специальность 1-31 80 03 «Математика»

Ходжагулыев Аганазар,  
магистрант

Научный руководитель:  
Воробьев Николай Николаевич,

профессор кафедры алгебры и методики  
преподавания математики, доктор физико-  
математических наук, доцент

25.06.2020

"10" (десять)

Витебск, 2020

# РЕФЕРАТ

Магистерская диссертация 33 с., 26 использованных источников.

**Ключевые слова** – КОНЕЧНАЯ ГРУППА, КЛАСС ГРУПП, ФОРМАЦИЯ, ИНДУКТИВНОЙ РЕШЕТКИ ФОРМАЦИЙ,  $\mathfrak{S}$ -ОТДЕЛИМАЯ РЕШЕТКА, ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ КЛАССОВ ГРУПП,  $n$ -КРАТНО  $\sigma$ -ЛОКАЛЬНАЯ ФОРМАЦИЯ.

**Объект и предмет исследования** – объектом исследования являются  $n$ -кратно  $\sigma$ -локальные формации конечных групп, а предметом исследования является решеточные свойства, решетки и прямые разложения таких формаций.

**Цель работы** – исследование свойств решеток  $n$ -кратно  $\sigma$ -локальных формаций, а также прямых разложений  $n$ -кратно  $\sigma$ -локальных формаций.

**Методы исследования** – используются методы теории классов конечных групп. В частности, методы теории формации и решеток классов конечных групп.

**Полученные результаты и их новизна** – найдены серии индуктивных и отделимых решеток формаций, установлено новое свойство прямых разложений  $n$ -кратно  $\sigma$ -локальных формаций

**Сфера применения** – результаты работы можно применять при решении различных задач, связанных с изучением свойств решеток формаций конечных групп, а также результаты могут быть использованы при чтении спецкурсов по теории групп, написании курсовых и дипломных работ.

**Степень внедрения** – результаты исследования выполнены в рамках задания по НИР «Методы локализации и теории решеток в исследованиях строения конечных групп и их классов» (ГПНИ «Конвергенция – 2020» № гос. регистр. 20160350) и внедрены при чтении спецкурса «Основы теории групп и их классов» в учебный процесс на кафедре алгебры и методики

преподавания математики Учреждения Образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

**Основные результаты работы – следующие теоремы.**

**Теорема 1** Решетка всех  $n$ -кратно  $\sigma$ -локальных формаций  $l_n^\sigma$  индуктивна.

**Теорема 2** Решетка всех  $n$ -кратно  $\sigma$ -локальных формаций  $l_n^\sigma$   $\mathfrak{S}$ -отделима при любом целом неотрицательном  $n$ .

**Теорема 3** Пусть  $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ , для некоторых формаций  $\mathfrak{F}_i$  таких, что  $\sigma(\mathfrak{F}_i) \cap \sigma(\mathfrak{F}_j) = \Phi$  для всех различных  $i, j \in I$ . Тогда формация  $\mathfrak{F}$   $n$ -кратно ( $n \geq 1$ )  $\sigma$ -локальна в том и только в том случае, когда  $n$ -кратно  $\sigma$ -локальна каждая из формаций  $\mathfrak{F}_i$ .

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Определения, обозначения и сокращения .....</b>	<b>5</b>
<b>Введение .....</b>	<b>14</b>
<b>Основная часть .....</b>	<b>16</b>
1 Предварительные сведения.....	16
2 Индуктивность решетки всех $n$ -кратно $\sigma$ -локальных формаций .....	22
3 Отделимость решетки всех $n$ -кратно $\sigma$ -локальных формаций.....	23
4 Прямые разложения $n$ -кратно $\sigma$ -локальных формаций.....	28
<b>Заключение.....</b>	<b>30</b>
<b>Список использованных источников .....</b>	<b>31</b>

## Введение

Ряд известных результатов теории классов конечных групп связан с исследованием решеток классов. Совокупность всех формаций образует полную решетку (по включению). Напомним, что класс конечных групп называется формацией, если он замкнут относительно взятия гомоморфных образов и конечны подпрямых произведений.

В работе А.Н. Скибы [14] впервые было замечено, что привлечение решеточных конструкций весьма полезно при изучении самих формаций. При этом существенную роль играет тот установленный им факт, что решетка всех (локальных) формаций модулярно. Этот результат получил развитие в различных направлениях. Одним из таких направлений является поиск серий индуктивных решеток локальных формаций. В частности, в монографии А.Н. Скибы “Алгебра формаций” [13] была доказана индуктивность решетки всех  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно локальных формаций. В работе [4] установлена индуктивность решетки всех  $\tau$ -замкнутых totally локальных формаций. Последний результат нашел приложение в работах В.Г. Сафонова [23,24] при доказательстве модулярности и дистрибутивности решетки всех totally локальных формаций. В последствии Н.Н. Воробьевым и А.А. Царевым [5,25] и, независимо, П.А. Жизневским [10] была установлена индуктивность решетки  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционных формаций. Этот результат позволил доказать модулярность такой решетки [24,10], а также сыграл ключевую роль в исследовании тождеств решеток таких формаций [3]. Отметим, что в неявном виде свойство индуктивности применялось также С. Райфершейд в работе [21, Proposition 3.3] при доказательстве дистрибутивности решетки разрешимых totally локальных формаций.

Другим важным направлением теории решеток формаций является поиск серий отделимых решеток локальных формаций. А.Н. Скибой была доказана отделимость решетки всех  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно локальных формаций [13]. В

работе [6] было доказано, что решетка разрешимых totally локальных классов Фитинга является  $\mathfrak{S}$ -отделимой, что позволило установить дистрибутивность такой решетки. В последствии Н.Н. Воробьевым [7] была доказана отделимость решетки разрешимых totally  $\omega$ -локальных классов Локетта.

В данной магистерской диссертации рассмотрено доказательство свойств решеток  $n$ -кратно  $\sigma$ -локальных формаций и прямое разложение  $n$ -кратно  $\sigma$ -локальных формаций.

Остановимся на обзоре содержания данной работы по разделам. Первый раздел носит вспомогательный характер. В нём приводится ряд известных результатов, необходимых нам в дальнейшем.

Во втором разделе доказано, что решетка всех  $n$ -кратно  $\sigma$ -локальных формаций  $l_n^\sigma$  индуктивна.

В третьем разделе установлено, что решетка всех  $n$ -кратно  $\sigma$ -локальных формаций  $l_n^\sigma$   $\mathfrak{S}$ -отделима при любом целом неотрицательном  $n$ .

В четвертом разделе описано прямое разложение  $n$ -кратно  $\sigma$ -локальных формаций.

Все результаты настоящей магистерской диссертации соответствуют заданию «Методы локализации и теории решеток в исследованиях строения конечных групп и их классов» (ГПНИ «Конвергенция - 2020» № гос. регистр.20160350).

## Список использованных источников

1. Артамонов, В.А. Общая алгебра. Т. 2 / В.А. Артамонов, В.Н. Салий, Л.А. Скорняков [и др.] // под общ. ред. Л.А. Скорнякова. М.: Наука, 1991. – 280 с.
2. Воробьев, Н.Н. Алгебра классов конечных групп: монография / Н.Н. Воробьев. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2012. – 322 с.
3. Воробьев, Н.Н. Тождества решеток частично композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба, А.А. Царев // Сибирский матем. журнал – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1011–1024.
4. Воробьев, Н.Н. Об индуктивных решетках формаций и классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев // Докл. НАН Беларуси. – 2000. – Т. 44, № 3. – С. 21–24.
5. Воробьев, Н.Н. О модулярности решетки  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.А. Царев // Украинский матем. журн. – 2000. – Т. 62, № 4. – С. 453–463.
6. Воробьев, Н.Н. О дистрибутивности решетки разрешимых totally локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба // Матем. заметки. – 2000. – Т. 67, вып. 5. – С. 662–673.
7. Воробьев, Н.Н. Отделимые решетки totally локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев // Докл. НАН Беларуси. – 2007. – Т. 51, № 4. – С. 25–28.
8. Воробьев, Н.Н. О прямых разложениях кратно  $\sigma$ -локальных формаций / Н.Н. Воробьев, И.И. Стаселько, А. Ходжагулыев // Веснік Віцебскага дзярж. ун-та. – 2020 (в печати).
9. Гретцер, Г. Общая теория решеток / Г. Гретцер. – М.: Мир, 1982. – 456 с.
10. Жизневский, П.А. О модулярности и индуктивности решетки всех  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционных формаций конечных групп / П.А.

Жизневский // Известия Гомельского гос. ун-та. им. Ф. Скорины. – 2010. № 1 (58). – Р. 185–191.

11. Куликов, Л.Я. Алгебра и теория чисел: Учеб. пособие для педагогических институтов. / Л.Я. Куликов – М.: Высш. школа, 1979. – 559 с.

12. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов: Учебное пособие / В.С. Монахов. – Мн.: Выш. шк., 2006. – 207 с.

13. Скиба, А.Н. Алгебра формаций. / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.

14. Скиба, А.Н. О локальных формациях длины 5 / А.Н. Скиба // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. Мн.: Наука и техника, 1986. – С. 149–156.

15. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука. Гл. ред. физ-матем. лит., 1978. – 272 с. – (Соврем. алгебра).

16. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука. Гл. ред. физ-матем. лит., 1989. – 256 с. – (Соврем. алгебра).

17. Chi, Z. On one application of the theory of  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations of finite groups / Z. Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2018. – № 2 (35). – P. 85–88.

18. Chi, Z. On  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations of finite groups / Z. Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2019. – Vol. 47, № 3. – P. 957–968.

19. Doerk K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York: Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p. – (De Gruyter Expo. Math., vol. 4).

20. Guo, Wenbin. The Theory of Classes of Groups / Wenbin Guo. – Beijing–New York–Dordrecht–Boston–London: Science Press / Kluwer Academic Publishers, 2000. – 261 p. – (Mathematics and Its Applications; vol. 505).

21. Reifferscheid, S. A note on sob-closed Fitting classes of finite soluble groups / S. Reifferscheid // J. Group Theory. – 2003. – Vol. 6, № 3. – P. 331–345.

22. Shemetkov, L.A. Frattini extensions of finite groups and formations / L.A. Shemetkov // Comm. Algebra. – 1997. – Vol. 25, № 3. – P. 955–964.



23. Safonov, V.G. On modularity of the lattice of totally saturated formations of finite group / V.G. Safonov // *Comm. Algebra.* – 2007. – Vol. 35, № 11. – P. 3495–3502.
24. Safonov, V.G. On a question of the theory of totally saturated formations of finite group / V.G. Safonov // *Algebra Colloquium.* – 2008. – Vol. 15, № 1. – P. 119–128.
25. Vorob'ev, N.N. On a question of the theory of partially composition formations / N.N. Vorob'ev, A.A. Tsarev // *Algebra Colloquium.* – 2014. – Vol. 21, № 3. – P. 437–447.
26. Vorob'ev, N.N. On Inductance property of the lattice of multiply  $\sigma$ -local formations / N.N. Vorob'ev, I.I. Staselka, A. Hojagulyyev // *Мальцевские чтения: тез. докл. Междунар. конф., Новосибирск, 19–23 августа 2019 г. – Новосибирск, 2019. – С. 152.*