МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ «ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА»

Факультет математики и информационных технологий

Кафедра алгебры и методики преподавания математики

Допущена к защите
«11» мая 2017 г.
Заведующий кафедрой
Н.Т. Воробьев

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

РЕШЕТКИ КРАТНО ЛОКАЛЬНЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

Специальность: 1-31 80 03 «Математика»

Титова Анастасия Игоревна,
магистрант

Научный руководитель:
Воробьев Николай Николаевич
профессор кафедры алгебры и методики преподавания математики, доктор физико-математических наук, доцент

10 (десять)
27.06.17

Витебск, 2017

Реферат

Магистерская диссертация 48 с., 29 использованных источников.

КЛАСС ФИТТИНГА, ПОЛНАЯ РЕШЕТКА, СТОУНОВА РЕШЕТКА, ИНДУКТИВНАЯ РЕШЕТКА, $\mathfrak{S}$-ОТДЕЛИМАЯ РЕШЕТКА, АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ РЕШЕТКА, ДИСТРИБУТИВНАЯ РЕШЕТКА.

Объект исследования – кратно локальные классы Фиттинга конечных групп.

Предмет исследования – решетки кратно локальных классов Фиттинга конечных групп.

Цель диссертации – описать свойства стоуновости, индуктивности, $\mathfrak{S}$-отделимости, алгебраичности и дистрибутивности решеток кратно локальных классов Фиттинга.

Методы исследования – используются методы исследования теории классов Фиттинга конечных групп, а также методы общей теории решеток.

Полученные результаты и их новизна – результаты второй главы являются новыми.

Сфера применения – полученные результаты о решетках кратно локальных классов Фиттинга могут быть использованы при написании курсовых и дипломных проектов, а также магистерских и кандидатских диссертаций.

Степень внедрения – результаты исследования выполнены в рамках задания по НИР «Методы локализации и теории решеток в исследованиях строения конечных групп и их классов» (ГПНИ «Конвергенция – 2020» № гос. регистр. 20160350) и внедрены в учебный процесс на кафедре алгебры и методики преподавания математики УО «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1. *Класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *ω-локален и* $L_{\omega}^{1}(\mathfrak{F})$ *– стоунова решетка*;
2. *Класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *– n-кратно ω-локален и* $L_{\omega}^{n}(\mathfrak{F})$ *– стоунова решетка*;
3. *Класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *– тотально ω-локален и* $L_{\omega}^{\infty}(\mathfrak{F})$ *– стоунова решетка*;
4. *Класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *ω-локален и* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.

Теорема 2 [9, Теорема 3.4.1]. *Всякая частичная алгебра классов Фиттинга, содержащая все классы Локетта, является индуктивной решеткой.*

Теорема 3 [9, следствие 3.4.11]. *Решетка всех тотально локальных классов Фиттинга* $\mathfrak{S}$*-отделима.*

Теорема 4 [9, теорема 3.4.12]. *Решетка всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга алгебраична, дистрибутивна и каждый ее элемент отличный от* (1) *и* $\mathfrak{S}$ *не дополняем в ней.*

Содержание

Введение

Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной [29], если существует такая функция $f\colon \mathbb{P} \to \{$формация групп$\}$, что группа $G \in \mathfrak{F}$ в том и только в том случае, если $G/F_p(G) \in f(p)$ для каждого простого p делящего порядок $|G|$ группы G, и в этом случае пишут $\mathfrak{F} = LF(f)$. Аналогично, класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется локальным [3, 4], если существует такая функция $f\colon \mathbb{P} \to \{$класс Фиттинга$\}$, что $G \in \mathfrak{F}$ в том и только в том случае, если $F^p(G) \in f(p)$ для каждого простого p делящего порядок $|G|$ группы G, где $F^p(G) = (G^{\mathfrak{G}_{p'}})^{\mathfrak{N}_p}$ (т.е. $F^p(G)$ – $\mathfrak{N}_p$-корадикал $\mathfrak{G}_{p'}$-корадикала группы G). Следуя [25] в этом случае пишут $\mathfrak{F} = LR(f)$.

Рассматривая наиболее известные конкретные классы Фиттинга, можно заметить, что большинство из них могут быть определены посредством функций, все непустые значения которых сами являются локальными классами Фиттинга. Это обстоятельство привело к следующей естественной конструкции [26]: согласно определению каждый класс Фиттинга 0-кратно локален, а для $n \geq 1$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется n-кратно локальным, если $\mathfrak{F} = LR(f)$, где все непустые значения функции f являются $(n-1)$-кратно локальными классами Фиттинга. Класс Фиттинга называется тотально локальным, если он n-кратно локален для всех натуральных n. Кратно насыщенные и тотально насыщенные формации определяются аналогично. Нетрудно заметить, что класс всех разрешимых тотально насыщенных формаций совпадает с классом всех так называемых примитивных насыщенных формаций введенным Хоуксом в работе [14] (см. также монографию Дерка и Хоукса [2, глава VII]). Более того, концепция n-кратно насыщенного класса восходит к работе Дерка [1]. Теория кратно локальных классов представляет самостоятельный интерес и, кроме того, является полезным инструментом при изучении многих вопросов теории классов и широкого спектра ее приложений (см. например, [13, 14, 16, 22, 23] и книги [9, 10, 29]). Являясь придельным случаем, тотально локальные классы обладают и рядом специфических свойств. В частности, отметим, что для каждого целого неотрицательного n решетки всех n-кратно насыщенных формаций, всех

n-кратно насыщенных наследственных формаций, n-кратно насыщенных нормально наследственных формаций и т.д. модулярны, но все из них не являются дистрибутивными, даже в классе всех разрешимых групп $\mathfrak{S}$ (см. [29, глава II] и [10, глава IV]). Кроме того, как показано в работе [15] (см. также [10, 29]) для любых двух целых неотрицательных n и m системы тождеств решетки всех n-кратно насыщенных и решетки всех m-кратно насыщенных формаций совпадают. С другой стороны, решетка всех разрешимых тотально насыщенных формаций дистрибутивна [29]. В классе всех конечных групп $\mathfrak{G}$ В.Г. Сафоновым установлено, что решетка всех тотально насыщенных формаций модулярна [6] и дистрибутивна [11]. Вместе с тем Н.Н. Воробьевым были описаны n-кратно локальные классы Фиттинга со стоуновой решеткой n-кратно локальных подклассов Фиттинга [9]. Целью настоящей магистерской диссертации является описание свойств стоуновости, индуктивности, $\mathfrak{S}$-отделимости, дистрибутивности и алгебраичности решеток кратно локальных классов Фиттинга.

Остановимся на обзоре содержания магистерской диссертации по главам.

Первая глава носит вспомогательный характер. В ней приводится ряд известных результатов, необходимых нам в дальнейшем.

Во второй главе представлены описания n-кратно ω-локальных классов Фиттинга со стоуновой решеткой n-кратно ω-локальных подклассов Фиттинга, а также тотально ω-локальных классов Фиттинга со стоуновой решеткой тотально ω-локальных подклассов Фиттинга. Отметим, что результаты данной главы являются новыми.

В третьей главе рассмотрены индуктивные решетки и доказана $\mathfrak{S}$-отделимость решетки всех тотально локальных классов Фиттинга.

В четвертой главе доказана дистрибутивность и алгебраичность решеток всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга.

Результаты исследования выполнены в рамках задания по НИР «Методы локализации и теории решеток в исследованиях строения конечных групп и их классов» (ГПНИ «Конвергенция – 2020» № гос. регистр. 20160350) и внедрены в учебный процесс на кафедре алгебры и методики преподавания математики УО «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Список использованных источников

1. D'Arcy, P. Locally defined Fitting classes / P. D'Arcy // J. Austral Math. Soc., 20 (1). – 1975. – P. 25–32.
2. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York – Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p. – (De Gruyter Expo. Math., vol. 4).
3. Doerk, K. Zwei Klassen von Formationen endlicher auflösbarer Gruppen, deren Halbverband gessättigter Unterformationen genau ein maximales Element besitzt / K. Doerk // Arch. Math. – 1970. – Vol. 21, № 3. – P. 240–244.
4. Hartley, H. On Fischer's dualization of formation theory / H. Hartley // Proc. London Math. Soc., 3 (2). – 1969. – P. 193–207.
5. Hawkes, T.O. Sceletal classes of soluble groups / T.O. Hawkes // Arch. Math. – 22 (6). – 1997. – P. 577–589.
6. Safonov, V.G. On a question of the theory of totally saturated formations of finite groups / V.G. Safonov // Algebra Colloquium. – 2008. – Vol. 15, № 1. – P. 119–128.
7. Safonov, V.G. On modularity of the lattice of totally saturated formations of finite groups / V.G. Safonov // Comm. Algebra. – 2007. – Vol. 35, № 11. – P. 3495–3502.
8. Skiba, A.N. On Stone sublattices of the lattice of totally local Fitting classes / A.N. Skiba, N.N. Vorob'ev // Algebra and Discrete Mathematics. – 2007. – № 4. – P. 138–146.
9. Воробьев, Н.Н. Алгебра классов конечных групп : монография / Н.Н. Воробьев. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2012. – 322 с.
10. Воробьев, Н.Н. О булевых решетках n-кратно локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба // Сибирский матем. журн. – 1999. – Т. 40, № 3. – С. 523–530.
11. Воробьев, Н.Н. О кратно локальных формациях со стоуновой решеткой подформаций / Н.Н. Воробьев // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-матэм. навук. – 2008. – № 3. – С. 23–27.

12. Воробьев, Н.Н. О стоуновых решетках n-кратно ω-локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев, А.И. Титова // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. – 2017. (в печати)

13. Воробьев, Н.Т. О предположении Хоукса для радикальных классов / Н.Т. Воробьев // Сибирский матем. журн. – 1996. – Т. 37, № 6. – С. 1296–1302.

14. Воробьев, Н.Т. Развитие локального метода Хартли в теории конечных разрешимых групп : дис. … д-ра физ.-мат. наук : 01.01.06 / Н.Т. Воробьев – Витебск, 1996. – 202 л.

15. Го, Вэньбинь. Два замечания о тождествах решеток ω-локальных и ω-композиционных формаций конечных групп / Вэньбинь Го, А.Н. Скиба // Известия вузов. Математика. – 2002. – № 5 (408). – С. 14–22.

16. Каморников, С.Ф. О двух задачах из «Коуровской тетради» / С.Ф. Каморников // Матем. заметки. – 1994. – Т. 55, вып. 6. – С. 59–63.

17. Кертис, Ч. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр / Ч. Кертис, И. Райнер. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1969. – 668 с.

18. Куликов, Л.Я. Алгебра и теория чисел: Учеб. пособие для педагогических институтов / Л.Я. Куликов. – М. : Высш. школа, 1979. – 559 с.

19. Курош, А.Г. Лекции по обшей алгебре / А.Г. Курош. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1973. – 400 с.

20. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов : Учебное пособие / В.С. Монахов. – Гомель : УО “ГГУ им. Ф. Скорины”, 2003. – 322 с.

21. Салий, В.Н. Решетки с единственными дополнениями / В.Н. Салий – М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1984. – 128 с. – (Соврем. Алгебра).

22. Семенчук, В.Н. Описание разрешимых минимальных не $\mathfrak{F}$-групп для произвольной тотально локальной формации $\mathfrak{F}$ / В.Н. Семенчук // Матем. заметки. – 1988. – Т. 43, вып. 4. – С. 452–459.

23. Семенчук, В.Н. Разрешимые тотально локальные формации / В.Н. Семенчук // Сибирский матем. журн. – 1995. – Т. 36, № 4. – С. 869–872.

24. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларусская навука, 1997. – 240 с.

25. Скиба, А.Н. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Математические труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.

26. Скиба, А.Н. О локальных формациях длины 5 / А.Н. Скиба // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп : труды Гомельского семинара / Ин-т математики АН БССР ; под ред. М.И. Салука. – Минск : Наука и техника, 1986. – С. 135–149.

27. Титова, А.И. О стоуновых решетках n-кратно ω-локальных классов Фиттинга / А.И. Титова // V Международной научно-практической конф. студентов и магистрантов Молодость. Интеллект. Инициатива: тез. докладов, Витебск, 21 апреля 2017 г. / Витеб. гос. Ун-т; редкол. : И.М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова, 2017. – С. 52–53.

28. Шеметков, Л.А. Классические факторизации групп и колец / Л.А. Шеметков. – Гомель. – 1979.

29. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1989. – 256 с. – (Соврем. Алгебра).