МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ «ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА»

Факультет математики и информационных технологий

Кафедра алгебры и методики преподавания математики

Допущен к защите
«8» апреля 2021 г.
Заведующий кафедрой
Н.Т. Воробьёв

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

РЕШЕТОЧНЫЕ СВОЙСТВА σ-ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЙ

Специальность 1–31 80 03 «Математика и компьютерные науки»

Степанов Владимир Александрович,
магистрант

Научный руководитель:
Воробьев Николай Николаевич,
профессор кафедры, доктор физико-математических наук, доцент

27.04.2021

"10" (десять)

Витебск, 2021

РЕФЕРАТ

Магистерская диссертация, 40 с., 35 использованных источников.

σ-ЛОКАЛЬНАЯ ФОРМАЦИЯ, n-КРАТНО σ-ЛОКАЛЬНАЯ ФОРМАЦИЯ, РЕШЕТКА ВСЕХ n-КРАТНО σ-ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЙ, σ-ЛОКАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ ФОРМАЦИИ, ПРОИЗВЕДЕНИЕ n-КРАТНО σ-ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЙ.

Объект и предмет исследования – кратно σ-локальные формации конечных групп, порожденные σ-локальных формаций, а предметом исследования – решеточные свойства, решетки и произведения таких формаций.

Цель работы – установить свойства порожденных σ-локальных формаций в терминах радикалов групп, исследование свойств решеток n-кратно σ-локальных формаций.

Методы исследования – используются методы теории классов конечных групп. В частности, методы теории формации и решеток классов конечных групп.

Полученные результаты и их новизна – найдено новое свойство порожденных σ-локальных формаций, которое используется для изучения решеток таких формаций.

Сфера применения – результаты работы можно применять при решении различных задач, связанных с изучением свойств решеток формаций конечных групп, а также результаты могут быть использованы при чтении спецкурсов по теории классов конечных групп, написании курсовых и дипломных работ.

Степень внедрения – результаты исследования выполнены в рамках задания по НИР «Методы локализации и теории решеток в исследованиях строения конечных групп и их классов» (ГПНИ «Конвергенция – 2020» № гос. регистр. 20160350) и внедрены при чтении спецкурса «Основы теории групп и их классов» в учебный процесс на кафедре алгебры и методики преподавания математики Учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Основными результатами настоящей работы являются следующие теоремы

Теорема 1 *Пусть* $\mathfrak{M}$ *– полуформация и* $A \in l^{\sigma}\mathrm{form}\mathfrak{M}$. *Тогда если* $O_{\sigma_i}(A) = 1$ и $\sigma_i \in \sigma$, *то* $A \in l^{\sigma}\mathrm{form}\mathfrak{M}_1$, *где* $\mathfrak{M}_1 = \{G/O_{\sigma_i}(G) \mid G \in \mathfrak{M}\}$.

Теорема 2 *Полугруппа* S_n^{σ} *образует частично упорядоченное множество относительно теоретико-множественного включения множеств. Более того,* $< S_n^{\sigma}, \subseteq >$ *является полной алгебраической, модулярной решеткой, в которой* $\bigcap_{j \in J}\mathfrak{F}_j$ *– точная нижняя грань и* $l_n^{\sigma}\mathrm{form}(\bigcup_{j \in J}\mathfrak{F}_j)$ *– точная верхняя грань множества* $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\} \subseteq S_n^{\sigma}$ *в полугруппе* S_n^{σ}.

Теорема 3 *Пусть* $\mathfrak{M} = LF_{\sigma}(m)$, *где* m *является внутренним* σ*-локальным заданием формации* $\mathfrak{M}$, $\Pi = \sigma(\mathfrak{M})$ *и пусть* $\mathfrak{H}$ *– непустая формация. Предположим, что либо*

1) $\mathfrak{H} = LF_{\sigma}(h)$, *где* h *является внутренним* σ*-локальным заданием формации* $\mathfrak{H}$, *либо*

2) $\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}$ *для всех* $\sigma_i \in \sigma \setminus \Pi$.

Тогда $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H} = LF_{\sigma}(f)$, *где*

$$f(\sigma_i) = \begin{cases} m(\sigma_i) \circ \mathfrak{H}, & \text{\textit{если} } \sigma_i \in \Pi, \\ h(\sigma_i), & \text{\textit{если} } \sigma_i \in \sigma \setminus \Pi \text{ в случае 1)}, \\ \mathfrak{H}, & \text{\textit{если} } \sigma_i \in \sigma \setminus \Pi \text{ в случае 2)}. \end{cases}$$

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Ряд известных результатов теории классов конечных групп связан с исследованием решеток классов. Совокупность всех формаций образует полную решетку (по включению). Напомним, что класс конечных групп называется формацией, если он замкнут относительно взятия гомоморфных образов и конечны подпрямых произведений.

В работе А.Н. Скибы [20] впервые было замечено, что привлечение решеточных конструкций весьма полезно при изучении самих формаций. При этом существенную роль играет тот установленный им факт, что решетка всех (локальных) формаций модулярна. Этот результат получил развитие в различных направлениях. Одним из таких направлений является поиск серий модулярных и алгебраических решеток локальных формаций. В частности, в монографии [22] установлена модулярность решетки всех n-кратно локальных формаций. Баллестер-Боллинше и Л.А. Шеметков [24] доказали, что решетка всех n-кратно формаций модулярна. В монографии [2] показано, что решетка всех τ-замкнутых локальных формаций модулярна, но не дистрибутивна для любого подгруппового функтора τ. В то же время решетка всех тотально локальных формаций дистрибутивна [22]. А.Н. Скиба и Шеметков [17] доказали модулярность решетки всех n-кратно ω-локальных формаций и n-кратно ω-композиционных формаций. Модулярность решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-локальных формаций и решетки всех τ-замкнутых ω-композиционных формаций была установлена И.П. Шабалиной. В.Г. Сафонов [32] доказал модулярность и затем дистрибутивность решетки всех тотально локальных формаций. П.А. Жизневским (2010) и, независимо, Н.Н. Воробьевым, А.А. Царевым (2010) была доказана модулярность решетки всех τ-замкнутых ω-композиционных формаций. При обозрении большинства приведенных серии результатов о модулярности решеток формаций особую роль играет изучение свойств порожденных частично локальных формаций.

В данной магистерской диссертации рассмотрено доказательство свойств модулярности и алгебраичности решетки всех n-кратно σ-локальных формаций

Остановимся на обзоре содержания данной работы по разделам.

Первый раздел носит вспомогательный характер. В нем приводится ряд известных результатов, необходимых нам в дальнейшем.

Во втором разделе найдено новое свойство порожденных σ-локальных формаций.

В третьем разделе доказано, что решетка всех n-кратно σ-локальных формаций модулярна и алгебраична.

В четвёртом разделе доказана теорема о произведениях σ-локальных формаций.

Результаты исследования выполнены в рамках задания по НИР «Методы локализации и теории решеток в исследованиях строения конечных групп и их классов» (ГПНИ «Конвергенция – 2020» № гос. регистр. 20160350) и внедрены при чтении спецкурса «Основы теории групп и их классов» в учебный процесс на кафедре алгебры и методики преподавания математики Учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Список использованных источников

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов: Учебное пособие / В.С. Монахов. – Мн.: Выш. шк., 2006. – 207 с.
2. Скиба, А.Н. Алгебра формаций. / А.Н. Скиба. – Минск: Беларускаянавука, 1997. – 240 с.
3. Артамонов, В.А. Общая алгебра. Т. 2 / В.А. Артамонов, В.Н. Салий, Л.А. Скорняков [и др.] // под общ.ред. Л.А. Скорнякова. М.: Наука, 1991. – 280 с.
4. Воробьев, Н.Н. Алгебра классов конечных групп: монография / Н.Н. Воробьев. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2012. – 322 с.
5. Салий, В.Н. Решетки с единственными дополнениями / В.Н. Салий. – Москва: Наука, 1984. – 128 с.: ил. – (Современная алгебра).
6. Гретцер, Г. Общая теория решеток / Г. Гретцер. – М.: Мир, 1982. – 456 с.
7. Близнец, И.В. О прямых разложениях композиционных формаций / И.В. Близнец, Н.Н. Воробьев // Вопросы алгебры. – 1998. –Вып. 12. – С. 106–112.
8. Близнец, И.В. Разложимые n-кратно ω-композиционные формации / И.В. Близнец, А.Н. Скиба // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2011. – № 4 (67). – С. 45–48.
9. Васильев, А.Ф. О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и другие примыкающие алгебраические структуры: сб. ст. / Ин-т математики АН Украины ; отв. ред. Н.С. Черников. – Киев, 1993. – С. 27–54.
10. Куликов, Л.Я. Алгебра и теория чисел: Учеб. пособие для педагогических институтов. / Л.Я. Куликов – М.: Высш. школа, 1979. – 559 с.
11. Ляпин, Е.С. Полугруппы / Е.С. Ляпин. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 592 с.

12. Воробьев, Н.Н. О прямых произведениях классов конечных групп / Н.Н. Воробьев // Труды ин-та математики и механики УрО РАН. – 2012. – Т. 18, № 3. – С. 67–74.

13. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука. Гл. ред. физ-матем. лит., 1978. – 272 с. – (Соврем.алгебра).

14. Воробьев, Н.Н. О булевых решетках n-кратно локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба // Сибирский матем. журн. – 1999. – Т. 40, № 3. – С. 523–530.

15. Воробьев, Н.Н. О булевых решетках n-кратно ω-локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры – 18. – 2002. – № 5 (14). – С. 43–46.

16. Сафонов, В.Г. О кратно локальных формациях конечных групп с ограниченным нильпотентным дефектом / В.Г. Сафонов // Вопросы алгебры. – Гомель: изд-во Гомельского гос. ун-та, 1996. – Вып. 9. – С. 161–175.

17. Скиба, А.Н. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т.2, № 2. – С. 114–147.

18. Скиба, А.Н. О формациях с заданными системами подформаций / А.Н. Скиба // Подгрупповое строение конечных групп : труды Гомельского семинара / Ин-т математики АН БССР ; под ред. В.С. Монахова. – Минск, 1981. – С. 155–180.

19. Скиба, А.Н. О локальных формациях с дополняемыми локальными подформациями / А.Н. Скиба // Известия вузов. Сер. Математика. – 1994. – № 10 (389). – С. 75–80.

20. Скиба, А.Н. О локальных формациях длины 5 / А.Н. Скиба // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. Мн.: Наука и техника, 1986. – С. 149–156.

21. Скиба, А.Н. О дополняемых подформациях / А.Н. Скиба // Вопросы алгебры. – Гомель: изд-во Гомельского гос. ун-та, 1996. – Вып. 9. – С. 114–118.

22. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1989. – 256 с. – (Соврем. алгебра).
23. Ballester-Bolinches, A. On the lattice of $\mathfrak{F}$-subnormal groups / A. Ballester-Bolinches, K. Doerk, M.D. Pérez-Ramos // J. Algebra. – 1992. – Vol. 148, № 1. – P. 42–52.
24. Ballester-Bolinches, A. On lattices of p-local formations of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.A. Shemetkov // Math. Nachr. – 1997. – Vol. 186. – P. 57–65.
25. Чи, Ч. О $\sum_t^\sigma$ –замкнутых классах конечных групп / Ч. Чи, А.Н. Скиба // Укр. мат. журн. – 2018. – Т. 70, № 12. – С. 1707–1716; English: Chi, Z. On $\sum_t^\sigma$ –closed classes of finite groups / Z. Chi, A.N. Skiba // Ukr. Math. J. – 2019. – Vol. 70, No.12. – P. 1966–1977.
26. Chi, Z. On one application of the theory of n-multiply σ-local formations of finite groups / Z. Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2018. – № 2 (35). – P. 85–88.
27. Chi, Z. On n-multiply σ-local formations of finite groups / Z. Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2019. – Vol. 47, № 3. – P. 957–968.
28. Doerk K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter& Co., 1992. – 891 p. – (De Gruyter Expo. Math., vol. 4).
29. Shemetkov, L.A. Frattini extensions of finite groups and formations / L.A. Shemetkov // Comm. Algebra. – 1997. – Vol. 25, № 3. – P. 955–964.
30. Guo, Wenbin. The Theory of Classes of Groups / WenbinGuo. – Beijing–New York–Dordrecht–Boston–London : Science Press / Kluwer Academic Publishers, 2000. – 261 p. – (Mathematics and Its Applications ; vol. 505).
31. Skiba, A.N. Multiply $\mathfrak{L}$-composition formations of finite groups. / A.N. Skiba, L.A. Shemetkov // Ukrainian Math. J. – 52(6) – P. 898–913.

32. Safonov, V.G. On modularity of the lattice of totally saturated formations of finite group / V.G. Safonov // Comm. Algebra. – 2007. – Vol. 35, № 11. – P. 3495–3502.

33. Ведерников, В.А. Элементы теории классов групп: Учебное пособие по спецкурсу / В.А. Ведерников.- Смоленск: Смоленский гос. пед. ин-т, 1988.- 95 с.

34. Шеврин Л. Н. Как возникают группы при изучении полугрупп // Соросовский образовательный журнал. –1997.– № 11. – С. 114 – 119.

35. Кострикин, А. И. Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры: Учеб. для вузов. / Кострикин А. И. - 2-е изд., исправл. - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 272 с.