МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ «ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА»

Факультет математики и информационных технологий
Кафедра алгебры и методики преподавания математики

Допущена к защите
«15» мая 2020 г.
Заведующий кафедрой
_______ Н. Т. Воробьев

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

ПРЯМЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ФОРМАЦИЙ

Специальность 1–31 80 03 «Математика»

Стаселько Игнат Игоревич,
магистрант

Научный руководитель:
Воробьев Николай Николаевич,
профессор кафедры, доктор физико-математических наук, доцент

25. 06. 2020

"10" (десять)

Витебск, 2020

Реферат

Магистерская диссертация, 32 с., 39 использованных источников.

КОНЕЧНАЯ ГРУППА, ФОРМАЦИЯ, КЛАСС ГРУПП, ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ КЛАССОВ ГРУПП, n-КРАТНО σ-ЛОКАЛЬНАЯ ФОРМАЦИЯ.

Объект и предмет исследования – объектом исследования являются кратно σ-локальные формации конечных групп, а предметом исследования решеточные свойства, решетки и прямые разложения таких формаций.

Цель работы – исследование свойств решеток n-кратно σ-локальных формаций, а также прямых разложений n-кратно σ-локальных формаций.

Методы исследования – используются методы теории классов конечных групп, а также методы общей теории решеток.

Полученные результаты и их новизна – найдены серии индуктивных решеток формаций, установлено новое свойство прямых разложений кратно σ-локальных формаций

Сфера применения – результаты могут быть использованы при написании курсовых и дипломных проектов, а также при чтении спецкурсов по теории групп и их классов.

Степень внедрения – результаты исследования выполнены в рамках задания по НИР «Методы локализации и теории решеток в исследованиях строения конечных групп и их классов» (ГПНИ «Конвергенция – 2020» № гос. регистр. 20160350) и внедрены при чтении спецкурса «Основы теории групп и их классов» в учебный процесс на кафедре алгебры и методики преподавания математики Учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Основными результатами настоящей работы являются следующие теоремы

Теорема 1 *Решетка всех n-кратно σ-локальных формаций индуктивна.*

Теорема 2 *Пусть* $\mathfrak{F} = \otimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, *для некоторых формаций* $\mathfrak{F}_i$ *таких, что* $\sigma(\mathfrak{F}_i) \cap \sigma(\mathfrak{F}_j) = \emptyset$ *для всех различных* $i, j \in I$. *Тогда формация* $\mathfrak{F}$ *n-кратно* ($n \geq 1$) *σ-локальна в том и только в том случае, когда n-кратно σ-локальна каждая из формаций* $\mathfrak{F}_i$.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Формации – это классы конечных групп, замкнутые относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Понятие формации, как известно, возникло в связи с разработкой общих методов отыскания новых классов сопряженных подгрупп в конечных разрешимых группах. В дальнейшем формации стали рассматриваться и как самостоятельные объекты исследования, что нашло отражение в ряде монографических изданий [28, 29, 34, 35].

Во многих приложениях теории формаций наиболее часто используются формации, замкнутые относительно тех или иных фраттиниевых расширений своих групп. Это прежде всего относится к ω-насыщенным и разрешимо ω-насыщенным формациям, которые были определены А. Баллестером-Болинше и Л.А. Шеметковым [31, 36] (ω – произвольное непустое множество простых чисел).

Формация $\mathfrak{F}$ называется *ω-насыщенной* или *ω-локальной*, если для любого простого числа $p \in \omega$ формация $\mathfrak{F}$ наряду с каждой группой $G/O_p(\Phi(G)) \in \mathfrak{F}$ содержит саму конечную группу G. Если же для любого простого числа $p \in \omega$ формация $\mathfrak{F}$ наряду с каждой группой $G/\Phi(O_p(G)) \in \mathfrak{F}$ содержит саму конечную группу G, то формация $\mathfrak{F}$ называется разрешимо ω-насыщенной [36] или ω-композиционной. Понятно, что всякая ω-насыщенная формация является разрешимо ω-насыщенной, но обратное в общем случае неверно.

При изучении различных математических объектов важной задачей является нахождение редукции в исследовании этих объектов к родственным объектам, но имеющим более простую структуру. В теории классов конечных групп один их подходов в этом направлении был предложен А.Н. Скибой в работе [25], где введено понятие прямого разложения класса в смысле следующего определения.

Совокупность $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ непустых классов групп $\mathfrak{F}_i$ называется *ортогональной* (А.Н. Скиба [21]), если:

1) либо $|I| = 1$, либо $|I| > 1$ и

2) $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ для любых двух различных $i, j \in I$, $i \neq j$.

Отметим, что всякая ортогональная система формаций (классов Фиттинга) является ортогональной системой элементов решетки всех формаций (решетки всех классов Фиттинга соответственно) в обычном смысле [14] (см. также [1]).

Следуя [21], для произвольной ортогональной системы классов $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ через $\otimes_{i \in I}\mathfrak{F}_i$ (в частности, пишем $\mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{F}_t$, если $I = \{1, 2, \ldots, t\}$) мы обозначаем совокупность всех групп изоморфных группам вида $A_1 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторых $i_1, \ldots, i_t \in I$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс групп. Говорят, что $\mathfrak{F}$ является *прямым произведением* классов $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ если совокупность $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ является ортогональной системой классов и $\mathfrak{F} = \otimes_{i \in I}\mathfrak{F}_i$.

Пусть L – решетка классов групп и $\mathfrak{F} \in L$. Класс $\mathfrak{F}$ называется *прямо разложимым* в решетке L [10], если $\mathfrak{F}$ является прямым произведением некоторых неединичных классов $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\} \subseteq L$. В противном случае $\mathfrak{F}$ называется *прямо неразложимым* в решетке L.

Конструкция прямого разложения классов групп оказалась весьма полезной в вопросах классификации формаций (глава 5 монографии [21]), и в дальнейшем она успешно применялась при исследовании классов Фиттинга [10, 12, 13].

Отметим замечательные работы [5, 30], где на основе условия ортогональности классов групп было дано решение известной проблемы Кегеля-

Шеметкова об описании всех насыщенных наследственных формаций, для которых множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует решетку в каждой конечной группе.

Одним из основых результатов о прямых разложениях формаций является следующая теорема, доказанная в монографии [21]:
$\otimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ является n-кратно насыщенной формацией тогда и только тогда, когда все $\mathfrak{F}_i$ – n-кратно насыщенные формации.

В дальнейшем аналог этого результата был получен для n-кратно локальных классов Фиттинга [12] и для n-кратно ω-локальных классов Фиттинга [10]. Вместе с тем, как показано в работе [2], аналогичный результат для n-кратно композиционных формаций и n-кратно ω-композиционных формаций неверен (см. также работу [3]).

Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$. Пусть f – произвольная функция вида

$$f : \sigma \to \{\text{формации групп}\} \qquad (1)$$

называемая *формационной σ-функцией.* Следуя [32, 33] функции f сопоставляют класс групп

$$LF_\sigma(f) = (G \mid G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } G/O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G)).$$

Если для некоторой формационной σ-функции f вида (1) имеет место $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, то $\mathfrak{F}$ называется *σ-локальной формацией* с *σ-локальным заданием* f (см. [32, 33]).

В связи с этим возникает задача нахождения условий, при которых вышеназванный результат справедлив в классе σ-локальных формаций.

И наконец, теория прямых разложений классов групп тесно связана с теорией стоуновых решеток классов групп. Здесь одной из важных задач является задача построения и исследования стоуновых решеток функторно замкнутых n-кратно насыщенных формаций посредством прямых разложений формаций.

Остановимся на обзоре содержания данной работы по разделам.

Первый раздел носит вспомогательный характер. В нем приводится ряд известных результатов, необходимых нам в дальнейшем.

Второй раздел носит обзорный характер. В нем приведен результат статьи [33] об алгебраичности и модулярности решетки всех n-кратно σ-локальных формаций.

В третьем разделе доказана теорема об индуктивности решетки всех n-кратно σ-локальных формаций.

В четвертом разделе найдено новое свойство прямых разложениях n-кратно σ-локальных формаций.

Результаты исследования выполнены в рамках задания по НИР «Методы локализации и теории решеток в исследованиях строения конечных групп и их классов» (ГПНИ «Конвергенция – 2020» № гос. регистр. 20160350) и внедрены при чтении спецкурса «Основы теории групп и их классов» в учебный процесс на кафедре алгебры и методики преподавания математики Учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Список использованных источников

1. Артамонов, В.А. Общая алгебра. Т. 2 / В.А. Артамонов, В.Н. Салий, Л.А. Скорняков [и др.] // под общ. ред. Л.А. Скорнякова. М.: Наука, 1991. – 280 с.
2. Близнец, И.В. О прямых разложениях композиционных формаций / И.В. Близнец, Н.Н. Воробьев // Вопросы алгебры. – 1998. – Вып. 12. – С. 106–112.
3. Близнец, И.В. Разложимые n-кратно ω-композиционные формации / И.В. Близнец, А.Н. Скиба // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2011. – № 4 (67). – С. 45–48.
4. Ван дер Варден, Б.Л. Алгебра / Б.Л. ван дер Варден. – М.: Мир, 1975. – 649 с.
5. Васильев, А.Ф. О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и другие примыкающие алгебраические структуры : сб. ст. / Ин-т математики АН Украины ; отв. ред. Н.С. Черников. – Киев, 1993. – С. 27–54.
6. Ведерников, В.А. Вполне факторизуемые формации конечных групп / В.А. Ведерников // Вопр. алгебры. – Минск : изд-во „Университетское", 1990. – Вып. 5. – С. 28–34.
7. Виленкин, Н.Я. Популярная комбинаторика / Н.Я. Виленкин. – М.: Наука, 1975. – 208 с.
8. Воробьев, Н.Н. Алгебра классов конечных групп: монография / Н.Н. Воробьев. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2012. – 322 с.
9. Воробьев, Н.Н. О подрешетках решетки частично композиционных формаций конечных групп / Н.Н. Воробьев, И.И. Стаселько // XII школа-конференция по теории групп, посвященная 65-летию А.А. Махнева : тезисы докл., Геленджик, 13-20 мая 2018 г. / Кубанский гос. ун-т ; Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН ; программный комитет : А.С. Кондратьев [и др.]. – Геленджик, 2018. – С. 51.

10. Воробьев, Н.Н. О прямых произведениях классов конечных групп / Н.Н. Воробьев // Труды ин-та математики и механики УрО РАН. – 2012. – Т. 18, № 3. – С. 67–74.
11. Воробьев, Н.Н. О прямых разложениях кратно σ-локальных формаций / Н.Н. Воробьев, И.И. Стаселько, А. Ходжагулыев // Веснік Віцебскага дзярж. ун-та. – 2020 (в печати).
12. Воробьев, Н.Н. О булевых решетках n-кратно локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба // Сибирский матем. журн. – 1999. – Т. 40, № 3. – С. 523–530.
13. Воробьев, Н.Н. О булевых решетках n-кратно ω-локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры–18. – 2002. – № 5 (14). – С. 43–46.
14. Гретцер, Г. Общая теория решеток / Г. Гретцер. – М. : Мир, 1982. – 456 с.
15. Жевнова, Н.Г. p-насыщенные формации с дополняемыми p-насыщенными подформациями / Н.Г. Жевнова, А.Н. Скиба // Известия вузов. Математика. – 1997. – № 5 (420). – С. 23–29.
16. Игошин, В. И. Математическая логика и теория алгоритмов: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.И. Игошин. – 2-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2008. – 448 с.
17. Куликов, Л.Я. Алгебра и теория чисел: Учеб. пособие для педагогических институтов. / Л.Я. Куликов – М.: Высш. школа, 1979. – 559 с.
18. Ляпин, Е.С. Полугруппы / Е.С. Ляпин. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 592 с.
19. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов: Учебное пособие / В.С. Монахов. – Мн.: Выш. шк., 2006. – 207 с.
20. Сафонов, В.Г. О кратно локальных формациях конечных групп с ограниченным нильпотентным дефектом / В.Г. Сафонов // Вопросы алгебры. – Гомель : изд-во Гомельского гос. ун-та, 1996. – Вып. 9. – С. 161–175.
21. Скиба, А.Н. Алгебра формаций. / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.

22. Скиба, А.Н. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т.2, № 2. – С. 114–147.
23. Скиба, А.Н. О формациях с заданными системами подформаций / А.Н. Скиба // Подгрупповое строение конечных групп : труды Гомельского семинара / Ин-т математики АН БССР ; под ред. В.С. Монахова. – Минск, 1981. – С. 155–180.
24. Скиба, А.Н. О локальных формациях с дополняемыми локальными подформациями / А.Н. Скиба // Известия вузов. Сер. Математика. – 1994. – № 10 (389). – С. 75–80.
25. Скиба, А.Н. О дополняемых подформациях / А.Н. Скиба // Вопросы алгебры. – Гомель: изд-во Гомельского гос. ун-та, 1996. – Вып. 9. – С. 114–118.
26. Стаселько, И.И. Об алгебраичности решетки σ-локальных фиттинговых множеств / И.И. Стаселько // XIII Машеровские чтения : материалы междунар. науч.-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 18 октября 2019. / Витеб. гос. ун-т ; редкол.: И. М. Прищепа (гл. ред.) [и др.] – Витебск : ВГУ имени П. М. Машерова, 2019. – С. 38.
27. Федорчук, В.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб. пособие. / В.В. Федорчук. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 328 с.
28. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука. Гл. ред. физ-матем. лит., 1978. – 272 с. – (Соврем. алгебра).
29. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1989. – 256 с. – (Соврем. алгебра).
30. Ballester-Bolinches, A. On the lattice of $\mathfrak{F}$-subnormal groups / A. Ballester-Bolinches, K. Doerk, M.D. Pérez-Ramos // J. Algebra. – 1992. – Vol. 148, № 1. – P. 42–52.

31. Ballester-Bolinches, A. On lattices of p-local formations of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.A. Shemetkov // Math. Nachr. – 1997. – Vol. 186. – P. 57–65.
32. Chi, Z. On one application of the theory of n-multiply σ-local formations of finite groups / Z. Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2018. – № 2 (35). – P. 85–88.
33. Chi, Z. On n-multiply σ-local formations of finite groups / Z. Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2019. – Vol. 47, № 3. – P. 957–968.
34. Doerk K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p. – (De Gruyter Expo. Math., vol. 4).
35. Guo, Wenbin. The Theory of Classes of Groups / Wenbin Guo. – Beijing–New York–Dordrecht–Boston–London : Science Press / Kluwer Academic Publishers, 2000. – 261 p. – (Mathematics and Its Applications ; vol. 505).
36. Shemetkov, L.A. Frattini extensions of finite groups and formations / L.A. Shemetkov // Comm. Algebra. – 1997. – Vol. 25, № 3. – P. 955–964.
37. Skiba, A.N. Multiply $\mathfrak{L}$-composition formations of finite groups. / A.N. Skiba, L.A. Shemetkov // Ukrainian Math. J. – 52(6) – P. 898–913.
38. Staselka, I. Computer Algebra System GAP in the Theory of Schunck Classes / I. Staselka // The youth of the 21st century: education, science, innovations: Proceedings of V International Conference for Students, Postgraduates and Young Scientists, Vitebsk, December 12, 2018 Vitebsk State P.M. Masherov University ; Editorial Board: I.M. Prishchepa (Editor in Chief) [and others]. – Vitebsk : Vitebsk State P.M. Masherov University, 2018. – P. 23–24.
39. Vorob'ev, N.N. On Inductance property of the lattice of multiply σ-local formations / N.N. Vorob'ev, I.I. Staselka, A. Hojagulyyev // Мальцевские чтения : тез. докл. Междунар. конф., Новосибирск, 19–23 августа 2019 г. – Новосибирск, 2019. – С. 152.