МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ «ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА»

Факультет математики и информационных технологий

Кафедра алгебры и методики преподавания математики

Рубан

Допущена к защите

«14» мая 2018г.

Заведующий кафедрой

Н.Т.Воробьев

# МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

# ПОЛУЛОКАЛЬНЫЕ ФОРМАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Специальность 1-318003 Математика

(Рубан)

Прикотень Виктория Александровна,

Магистрант кафедры алгебры и методики преподавания информатики

Научный руководитель:

Воробьев Николай Тимофеевич, доктор физико-математических наук, профессор

"9" девять

Витебск, 2018

19.06.18

# РЕФЕРАТ

Магистерская диссертация 27 с., 14 источников.

**Объект исследования** – полулокальные формации конечных групп.

**Цель настоящей работы** – нахождение характеризации полулокальных формаций и построение примеров полулокальных формаций при помощи формационных проекторов и холловых подгрупп.

**Методы исследования**: методы теории конечных групп.

**Результаты** – обобщение понятие локальной формации, решается задача характеризации полулокальных функций, найден метод построения полулокальных формаций посредством вложения холловых подгрупп в формационные проекторы.

**Область применения** – результаты работы могут быть использованы при написании курсовых и дипломных работ по алгебре, а также при изучении структуры полулокальных формаций конечных групп.

# СОДЕРЖАНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Классом групп, называется всякое множество, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G. Среди классов групп наиболее известны своими приложениями формации групп, т.е. классы групп замкнутые относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Существуют различные методы построения формации. Среди таких методов выделяют функциональный метод, предложенный Гащюцом [14], который определяет локальные формации. Суть идеи Гащюца состоит в том, что каждому простому числу p сопоставляется некоторая формация (возможно пустая) и по средствам таких отображений и операций пересечения и объединения формаций строятся новые формации, при этом отображение $f: P \to \{\text{формации групп}\}$ называют локальным спутником. В данной магистерской диссертации мы обобщаем понятие локальной формации, определяя полулокальные функции следующим образом. Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел. Отображение $\mathrm{f}: \mathbb{P} \to \{\text{формации групп}\}$ называют локальным спутником.

Множество $\pi = \mathrm{Supp}(\mathrm{f}) = \{p \in \mathbb{P}: \mathrm{f}(p) \neq \emptyset\}$ называют носителем спутника f.

Обозначим символом SLF(f) – формацию $\cap_{p\in\pi} \mathfrak{E}_{p'} \cdot \mathrm{f}(p)$, где $\mathfrak{E}_{p'}$ – класс всех $p'$-групп и $\pi = \mathrm{Supp}(\mathrm{f})$.

Формацию $\mathfrak{F}$ назовем полулокальной, если $\mathfrak{F} = \mathrm{SLF}(\mathrm{f})$ для некоторого локального спутника спутника f.

Множество полулокальных формаций обширно, т. к. в частности любая локальная формация полулокальна. Такими формациями являются многие известные классы групп: формация всех нильпотентных групп, формация всех π-групп, формация всех разрешимых групп и др.

Напомним, определения произведения формаций. Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ – некоторые формации. Если $\mathfrak{F}_1 = \emptyset$ или $\mathfrak{F}_2 = \emptyset$, то положим $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 = \emptyset$. Если $\mathfrak{F}_1 \neq \emptyset$ или $\mathfrak{F}_2 \neq \emptyset$, то обозначим через $\mathfrak{F}_1 \cdot \mathfrak{F}_2$ класс всех тех групп G, для которых $G^{\mathfrak{F}_2} \in \mathfrak{F}_1$. Класс $\mathfrak{F}_1 \cdot \mathfrak{F}_2$ называется произведением формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$.

Возникает задача характеризации полулокальных функций. Эту задачу мы решаем в разделе 6, определяя π-насыщенные функции. При этом формацию $\mathfrak{F}$ назовем $\pi$-насыщенной, если выполняется равенство: $\mathfrak{E}_{\pi'} \cdot \mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Нами установлено, что формация π-насыщсна в точности тогда, когда она полулокальна.

Основные результаты магистерской диссертации сосредоточены в разделе 7, где найден метод построения полулокальных формаций посредством вложения холловых подгрупп в формационные проекторы. Напомним, что если $\mathfrak{F}$ – непустой класс групп. Подгруппа $H \in \mathfrak{F}$ группы G называется $\mathfrak{F}$-проектором G, когда из $H \subseteq U \subseteq G$ и $U/K \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $U = H \cdot K$. Подгруппа H группы G называется холловой подгруппой группы G, если порядок H есть $\pi$-число, а индекс группы G по подгруппе H есть $\pi'$-число. Нами определен класс групп $\mathfrak{F}^{\pi}$ следующим образом: группа $G$ принадлежит классу $\mathfrak{F}^{\pi}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}^{\pi}$-проектор группы содержит ее некоторую холлову $\pi$-подгруппу.

Основным результатом работы является теорема 7.1, где установлено, что если $\emptyset \subseteq \pi \subseteq \mathbb{P}$, то класс групп $\mathfrak{F}^{\pi}$ – полулокальная формация.

В работе рассматривались только конечные π-разрешимые группы, где $\pi = \sigma(\mathfrak{F})$.

Через $\sigma(\mathfrak{F})$ обозначаем множество всех простых различных делителей всех групп из $\mathfrak{F}$. Данное ограничение существенно, т.к. в этом случае в любой группе $G$ существуют $\mathfrak{F}$-проекторы для любой формации $\mathfrak{F}$ с полулокальным спутником по теореме Шеметкова [6].

В терминологии и обозначениях мы будем следовать монографии Шеметкова [6].

Основные результаты работы опубликованы и апробированы на VI Международной научно-практической конференции студентов и магистрантов «Молодость. Интеллект. Инициатива».

Работа выполнена в рамках задания ГПНИ «Конвергенция 2020».

# ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА


1. Cusack, E. The join of two Fitting classes / E. Cusack // Math. Z. – 1979. – Bd. 167.

2. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes // - Berlin-New York : Walter de Gruyter, 1992.

3. Gaschütz W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z. 1963. V. 80. N 4. – P. 300-305.

4. Vorobyev N.T. Algebra i logika [Algebra and Logics], 1979, 18, 2, pp. 137–161.

5. Ведерников В.А. Элементы теории классов групп: учеб. пособие по спецкурсу / В.А. Ведерников // Смоленск: Смоленский гос. пед. ин-т, 1988.

6. Селькин, М. В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М. В. Селькин. – Мн.: Беларуская навука, 1997. – 145 с.

7. Скиба, А. Н. Алгебра формаций / А. Н.Скиба. – Мн.: Беларуская навука, 1997. – 240 с.

8. Каморников С. Ф., Селькин М. В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. — Минск: Беларуская навука, 2003. — 254 с.

9. Каргаполов М.И. Элементы теории групп // М:Наука. 1987.

10. Монахов, В. С. Введение в теорию групп / В. С. Монахов.– Мн.: – М: Наука, 1965. – 524 с.

11. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов: учеб. пособие / В. С. Монахов // Мн.: Выш. шк., 2006.

12. Чунихин С.А. Подгруппы конечных групп // Мн. 1964.

13. Шеметков Л. А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

14. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем. / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – Москва: Наука, 1989. – 256 с.