МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА»

Факультет математики и информационных технологий

Кафедра алгебры и методики преподавания математики

Допущена к защите
«25» мая 20__ г.
Заведующий кафедрой
_______ Н.Т.Воробьёв

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

ИНЪЕКТОРЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Специальность 1-31 80 03 «Математика»

Петрова Татьяна Константиновна,
магистрант

Научный руководитель:
Николай Тимофеевич Воробьёв,
заведующий кафедрой алгебры и методики преподавания математики, профессор, доктор физико-математических наук

25.06.2020

"10" (десять)

Витебск, 2020

Реферат

Магистерская диссертация 20 стр., 8 использованных источников.

КЛАСС ФИТТИНГА, МНОЖЕСТВО ФИТТИНГА, НАСЫЩЕННОЕ МНОЖЕСТВО ФИТТИНГА, $\mathcal{F}$-ИНЪЕКТОР, π -РАЗРЕШИМАЯ ГРУППА

Объект исследования – инъекторы конечных групп.

Предмет исследования – свойства инъекторов факторгрупп частично разрешимых групп.

Цель работы – описание $\mathcal{F}$-инъекторов факторгрупп для фиттингового множества группы G, которая в общем случае не разрешима.

Методы исследования – используется терминология и методы абстрактной теории групп. В частности, методы теории классов и множеств Фиттинга.

Элементы новизны – все полученные в работе результаты являются новыми. Описан метод построения $\mathcal{F}$-инъекторов факторгрупп в случае, когда $\mathcal{F}$ – наследственное или π -насыщенное множества Фиттинга частично разрешимой группы.

Сфера применения – работа выполнена в рамках задания ГПНИ «Конвергенция – 2020». Полученные результаты могут быть использованы для изучения свойств $\mathcal{F}$-инъекторов факторгрупп, а также в написании курсовых и дипломных проектов, при чтении спецкурса по теории групп.

Степень внедрения – подтверждается актом о внедрении результатов в учебный процесс кафедры алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова.

Основные результаты работы – следующие теоремы.

Теорема 3.3 Пусть $G \in \mathcal{F} \odot \mathfrak{S}$, *$\mathcal{F}$ – наследственное множество Фиттинга G и $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) множество подгрупп $\mathcal{F}_{G/N}$= {SN/N: S – $\mathcal{F}$-инъектор SN} группы G/N является множеством Фиттинга G/N;

(2) если V – $\mathcal{F}$-инъектор G, то подгруппа VN/N является $\mathcal{F}$-инъектором группы G/N.

Теорема 4.2 *Пусть $\mathcal{F}$ – π-насыщенное множество Фиттинга π-разрешимой группы G и N⊴G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) множество подгрупп $\mathcal{F}_{G/N}$= {SN/N: S – $\mathcal{F}$-инъектор SN} группы G/N является множеством Фиттинга G/N;

(2) если V – $\mathcal{F}$-инъектор G, то подгруппа VN/N является $\mathcal{F}$-инъектором группы G/N.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В работе все рассматриваемые группы конечны. В отличие от теории классов Фиттинга в теории фиттинговых множеств можно описать $\mathcal{F}$-инъекторы факторгрупп в терминах $\mathcal{F}$-инъекторов групп. Андерсеном было определено понятие $\mathcal{F}$-инъектора группы G, как подгруппы этой группы, которая является $\mathcal{F}$-инъектором для некоторого множества Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G. В [1, теорема 3.1] описаны инъекторы факторгрупп в классе всех разрешимых групп. В связи с этим возникает задача описания $\mathcal{F}$-инъекторов факторгрупп для фиттингового множества группы G, которая в общем случае неразрешима. Решение её – является основной целью настоящей работы.

Напомним, что класс групп $\mathcal{F}$ называется *классом Фиттинга* [2, с. 286], если он замкнут относительно нормальных подгрупп и произведения нормальных $\mathcal{F}$-подгрупп.

Пусть $\mathcal{F}$ – класс Фиттинга. Произведение всех нормальных $\mathcal{F}$-подгрупп группы G называется *$\mathcal{F}$-радикалом* G и обозначается через $G_{\mathcal{F}}$. [3, С. 288]

Определение 0.1 [4, VIII, (2.1)]. Непустое множество $\mathcal{F}$ подгрупп группы G называется *множеством Фиттинга* группы G, если выполняются следующие условия:

(1) если $T \trianglelefteq\trianglelefteq S$ и $S \in \mathcal{F}$, то $T \in \mathcal{F}$;

(2) если $S, T \in \mathcal{F}$ и $S, T \trianglelefteq ST$, то $ST \in \mathcal{F}$;

(3) если $S \in \mathcal{F}$ и $x \in G$, то $S^x \in \mathcal{F}$.

В работе [5, с. 2] было определено понятие произведения множества Фиттинга и класса Фиттинга. Доказано, что множество подгрупп $\mathcal{F} \odot \mathfrak{X} = \{H \leq G | H/H_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}\}$ является множеством Фиттинга группы G, если $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга G и $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга.

В частности, в случае, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп, произведение $\mathcal{F} \odot \mathfrak{S}$ – множество всех подгрупп группы G, факторгруппы которых по их $\mathcal{F}$-радикалам разрешимы.

Первый раздел имеет вспомогательный характер. В нём приводятся известные определения и леммы, которые в дальнейшем используются для доказательства основных результатов.

Во втором разделе описываются некоторые свойства $\mathcal{F}$-инъекторов.

В третьем – описываются $\mathcal{F}$-инъекторы факторгрупп для наследственного множества Фиттинга частично разрешимой группы. Доказано:

Пусть $G \in \mathcal{F} \odot \mathfrak{S}$, $\mathcal{F}$ – наследственное множество Фиттинга G и $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) множество подгрупп $\mathcal{F}_{G/N} = \{SN/N$: S – $\mathcal{F}$-инъектор $SN\}$ группы G/N является множеством Фиттинга G/N;

(2) если V – $\mathcal{F}$-инъектор G, то подгруппа VN/N является $\mathcal{F}$-инъектором группы G/N.

Заключительный раздел посвящён описанию $\mathcal{F}$-инъекторов факторгрупп π-насыщенного множества Фиттинга π-разрешимой группы G. Доказано:

Пусть $\mathcal{F}$ – π-насыщенное множество Фиттинга π-разрешимой группы G и $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) множество подгрупп $\mathcal{F}_{G/N} = \{SN/N$: S – $\mathcal{F}$-инъектор $SN\}$ группы G/N является множеством Фиттинга G/N;

(2) если V – $\mathcal{F}$-инъектор G, то подгруппа VN/N является $\mathcal{F}$-инъектором группы G/N.

Работа выполнена в рамках задания ГПНИ «Конвергенция 2020». Основные результаты опубликованы в работах [9-11] и апробированы на следующих конференциях:

– на V Международной конференции студентов, магистрантов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь XXI века: образование, наука, инновации» (12 декабря 2018 г.);

– на XXV Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов «Наука – образованию, производству, экономике» (Витебск, 20 февраля 2020 г.).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Anderson, W. Injectors in finite solvable groups, J. Algebra/ W. Anderson, 1975. – Vol. 36, №3 (19). – 333-338 p.
2. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов: учеб. пособие / В. С. Монахов. – Минск: Высшая школа, 2006. – 207 с.
3. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L. Esquerro. – Amsterdam: Springer, 2006. – 306 p.
4. Doerk K. Finite soluble groups/ K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-N.Y.: Walter de Cruyter, 1992. – 891 p.
5. Vorob'ev N. T. , Nanying Yang, W. Guo. On F- injectors of Fitting set of a Finite groups// Com. in Algebra, 2018, Vol 46, №1. – 217-229 p.
6. Сементовский, В.Г. Инъекторы конечных групп / В.Г. Сементовский // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. – Минск: Наука и техника, 1984. – 166-170 с.
7. Bryce R. A., Cossey J. A problem in theory of normal Fitting classes, Math. Z. / R. A. Bryce, J. Cossey, 1975. – Vol. 141, Heft 2. – 99-110 p.
8. Шеметков, Л. А. Формация конечных групп / Л. А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.