

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ «ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА»

Математический факультет  
Кафедра алгебры и методики преподавания математики

Допущена к защите

«18» мая 2016 г.

Заведующий кафедрой

 Н.Т. Воробьев

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ  
РЕШЕТКИ НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Специальность: 1-31 80 03 Математика

Кузнецова Анна Руслановна,  
магистрант

Научный руководитель:  
Воробьев Николай Николаевич,  
профессор кафедры алгебры и методики  
преподавания математики,  
доктор физико-математических наук,  
доцент

10 (десять)

01.07.16г

Витебск, 2016

## Реферат

Магистерская диссертация 30 с., 20 использованных источников.

**ФОРМАЦИЯ, ПОЛНАЯ РЕШЕТКА ФОРМАЦИЙ, РЕШЕТКА  $\tau$ -ЗАМКНУТЫХ  $n$ -КРАТНО НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ, ИНДУКТИВНАЯ РЕШЕТКА ФОРМАЦИЙ, ОТДЕЛИМАЯ РЕШЕТКА ФОРМАЦИЙ.**

**Объект исследования** – решетка всех  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно насыщенных формаций; решетка всех насыщенных формаций, заключенных между  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$  и  $\mathfrak{F}$ .

**Цель работы** – поиск индуктивных и отделимых решеток насыщенных формаций.

**Методы исследования** – используются методы теории классов конечных групп и методы общей теории решеток.

**Полученные результаты и их новизна** – найдены серии индуктивных и отделимых решеток формаций: решетка всех  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно насыщенных формаций и решетка всех насыщенных формаций, заключенных между  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$  и  $\mathfrak{F}$ .

**Сфера применения** – полученные результаты об индуктивности и отделимости решетки всех  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно насыщенных формаций и решетки всех насыщенных формаций, заключенных между  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$  и  $\mathfrak{F}$  могут быть использованы при написании курсовых и дипломных проектов.

**Степень внедрения** – результаты исследования выполнены в рамках задания по НИР «Методы локализации и теории решеток в исследованиях строения конечных групп и их классов» (ГПНИ «Конвергенция – 2020», № гос. регистр. 20160350) и внедрены в учебный процесс на кафедре алгебры и методики преподавания математики УО «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Основными результатами настоящей работы являются следующие теоремы

**Теорема 1.** *Решетка  $\mathfrak{F} / {}_i\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$  индуктивна.*

**Теорема 2.** *Решетка  $\mathfrak{F} / {}_i\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$   $\mathfrak{B}$ -отделима.*

## Содержание

Реферат .....	2
Определения, обозначения и сокращения .....	4
Введение .....	14
Основная часть.....	16
1 Предварительные сведения .....	16
2 Индуктивность решетки всех $\tau$ -замкнутых $n$ -кратно насыщенных формаций ...	18
3 Индуктивность решетки $\mathfrak{F} / \mathfrak{I} \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ .....	20
4 $\mathfrak{G}$ -отделимость решетки всех $\tau$ -замкнутых $n$ -кратно насыщенных формаций.....	22
5 $\mathfrak{G}$ -отделимость решетки $\mathfrak{F} / \mathfrak{I} \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ .....	25
Заключение.....	28
Список использованных источников .....	29

## Введение

Ряд известных результатов теории классов конечных групп связан с исследованием решеток классов. Совокупность всех формаций образует полную решетку (по включению). Напомним, что класс конечных групп называется формацией, если он замкнут относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений.

В работе А.Н. Скибы [8] впервые было замечено, что привлечение решеточных конструкций весьма полезно при изучении самих формаций. При этом существенную роль играет тот установленный им факт, что решетка всех (насыщенных) формаций модулярна. Этот результат получил развитие в различных направлениях. Одним из таких направлений является поиск серий индуктивных решеток насыщенных формаций. В частности, в монографии А.Н. Скибы «Алгебра формаций» [4] была доказана индуктивность решетки всех  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно насыщенных формаций. В работе [9] установлена индуктивность решетки всех  $\tau$ -замкнутых тотально насыщенных формаций. Последний результат нашел приложение в работах В.Г. Сафонова [10,11] при доказательстве модулярности и дистрибутивности решетки всех тотально насыщенных формаций. Впоследствии Н.Н. Воробьевым и А.А. Царевым [12,13] и, независимо, П.А. Жизневским [16] была установлена индуктивность решетки всех  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционных формаций. Этот результат позволил доказать модулярность такой решетки [11,14], а также сыграл ключевую роль в исследовании тождеств решеток таких формаций [15]. Отметим, что в неявном виде свойство индуктивности применялось также С. Райфершейд в работе [16, Proposition 3.3] при доказательстве дистрибутивности решетки разрешимых тотально насыщенных формаций.

Другим важным направлением теории решеток формаций является поиск серий отделимых решеток насыщенных формаций. А.Н. Скибой была доказана отделимость решетки всех  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно насыщенных формаций [4]. В работе [17] было доказано, что решетка разрешимых тотально локальных классов

Фиттинга является  $\mathfrak{S}$ -отделимой, что позволило установить дистрибутивность такой решетки. Впоследствии Н.Н. Воробьевым [18] была доказана отделимость решетки разрешимых totally  $\omega$ -локальных классов Локетта.

В настоящей диссертации найдены новые широкие серии индуктивных и отделимых решеток насыщенных формаций. Остановимся на обзоре содержания данной работы по разделам.

Первый раздел носит вспомогательный характер. В нем приводится ряд известных результатов, необходимых нам в дальнейшем.

Второй и четвертый разделы носят обзорный характер. В них приведены известные результаты А.Н. Скибы об индуктивности и отделимости решетки всех  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно насыщенных формаций.

В третьем разделе показано, что решетка всех насыщенных формаций, заключенных между  $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N}$  и  $\mathfrak{S}$ , где  $\mathfrak{N}$  – класс всех нильпотентных групп, является индуктивной. В пятом разделе доказано, что решетка  $\mathfrak{S} / \mathfrak{S} \cap \mathfrak{N}$  является  $\mathfrak{S}$ -отделимой. Результаты данных разделов опубликованы в двух научных работах.

Результаты исследования выполнены в рамках задания по НИР «Методы локализации и теории решеток в исследованиях строения конечных групп и их классов» (ГПНИ «Конвергенция – 2020», № гос. регистр. 20160350) и внедрены в учебный процесс на кафедре алгебры и методики преподавания математики УО «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

## Список использованных источников

1. Каргаполов, М.И. Основы теории групп / М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков – М.: Наука, 1978. – 263 с.
2. Гретцер, Г. Общая теория решеток / Г. Гретцер. – М.: Мир, 1982. – 456 с.
3. Салий, В.Н. Решетки с единственными дополнениями / В.Н. Салий – М.: Наука, 1984. – 128 с.
4. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Мн.: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
5. Скиба, А.Н. Кратно  $\omega$ -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Математические труды. – 1999. – Т.2, № 2. – С. 114–147.
6. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Мн.: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
7. Воробьев, Н. Н. Алгебра классов конечных групп / Н.Н. Воробьев. – Витебск: ВГУ имени П. М. Машерова, 2012. – 322 с.
8. Скиба, А.Н. О локальных формациях длины 5 / А.Н. Скиба // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. – Мн.: Наука и техника, 1986. – С. 149–156.
9. Воробьев, Н.Н. Об индуктивных решетках формаций и классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев // Докл. НАН Беларуси. – 2000. – Т. 44, № 3. – С. 21–24.
10. Safonov, V.G. On modularity of the lattice of totally saturated formations of finite groups / V.G. Safonov // Comm. Algebra. – 2007. – Vol. 35, № 11. – P. 3495–3502.
11. Safonov, V.G. On a question of the theory of totally saturated formations of finite groups / V. G. Safonov // Algebra Colloquium. – 2008. – Vol. 15, № 1. – P. 119–128.
12. Воробьев, Н.Н. О модулярности решетки  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.А. Царев // Украинский матем. журн. – 2010. – Т. 62, № 4. – С. 453–463.

13. Vorob'ev, N.N. On a question of the theory of partially composition formations / N.N. Vorob'ev, A.A. Tsarev // Algebra Colloquium. – 2014. – Vol. 21, № 3. – P. 437–447.
14. Жизневский, П.А. О модулярности и индуктивности решетки всех  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционных формаций конечных групп / П.А. Жизневский // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2010. – № 1 (58). – С. 185–191.
15. Воробьев, Н.Н. Тождества решеток частично композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба, А.А. Царев // Сибирский матем. журнал. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1011–1024.
16. Reifferscheid, S. A note on subgroup-closed Fitting classes of finite soluble groups / S. Reifferscheid // J. Group Theory. – 2003. – Vol. 6, № 3. – P. 331–345.
17. Воробьев, Н.Н. О дистрибутивности решетки разрешимых totally локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба // Матем. заметки. – 2000. – Т. 67, вып. 5. – С. 662–673.
18. Воробьев, Н.Н. Отделимые решетки totally локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев // Докл. НАН Беларуси. – 2007. – Т. 51, № 4. – С. 25–28.
19. Воробьев, Н.Н. Об индуктивных решетках насыщенных формаций / Н.Н. Воробьев, А.Р. Кузнецова // Международная конференция «Алгебра и Логика: Теория и Приложения», Красноярск, 24–29 июля 2016 г. / Сибирский федеральный университет, Институт вычислительного моделирования, Институт математики СО РАН; оргкомитет: Я.Н. Нужин, А.О. Лихачева. – Красноярск, 2016. – С. 45.
20. Воробьев, Н.Н. Об отделимых решетках насыщенных формаций / Н.Н. Воробьев, А.Р. Кузнецова // Международная конференция «XII Белорусская математическая конференция БМК-2016», Минск, 5–10 сентября 2016 г. / Белорусский государственный университет, Институт математики Национальной Академии наук Беларуси; оргкомитет: А.Л. Гладков, Е.Н. Залеская [и др.]. – Мн., 2016. – С. 56.