

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ «ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА»

Математический факультет

Кафедра алгебры и методики преподавания математики

Допущена к защите

«14» мая 2015 г.

Заведующий кафедрой

 Н.Т.Воробьев

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ РЕШЕТКИ ФОРМАЦИЙ И КЛАССОВ ФИТТИНГА

Специальность: 1-31 03 03 Прикладная математика (научно-педагогическое направление)

Кузнецова Анна Руслановна,  
5 курс, группа 52

Научный руководитель:  
Воробьев Николай Николаевич,  
профессор кафедры, доктор физико-  
математических наук

10 (десять)  
25.06.2015

Витебск, 2015

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ «ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА»

Математический факультет

Кафедра алгебры и методики  
преподавания математики

ЗАДАНИЕ ПО ПОДГОТОВКЕ РАБОТЫ

«Утверждаю»

Заведующий кафедрой  Н.Т. Воробьев  
(подпись)

Студентке V курса Кузнецовой Анне Руслановне

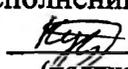
1. Тема работы: Алгебраические решетки формаций и классов Фиттинга  
утверждена приказом по ВГУ от «19» ноября 2014 г. № \_\_\_\_\_.
2. Срок сдачи студенткой законченной работы: 4 мая 2015 г.
3. Перечень подлежащих разработке в дипломной работе вопросов или краткое  
содержание дипломной работы:
  - изучить свойства  $\omega$ -насыщенных формаций и  $\omega$ -локальных классов Фиттинга;
  - установить алгебраичность решетки  $n$ -кратно насыщенных и решетки totally  
насыщенных формаций;
  - установить алгебраичность решетки totally локальных и решетки всех классов  
Фиттинга.
4. Перечень графического материала (с точным указанием обязательных чертежей) или  
программного, или модулей программы  

---
5. Консультанты по работе с указанием относящихся к ним разделов  

---
6. Дата выдачи задания: 2 сентября 2014 г.

Руководитель  Н.Н. Воробьев  
(подпись)

Задание приняла к исполнению 2 сентября 2014 г.

 А.Р. Кузнецова  
(подпись)

## РЕФЕРАТ

Дипломная работа 34 с., 17 использованных источников.

**КЛАСС ФИТТИНГА, ФОРМАЦИЯ, ПОЛНАЯ РЕШЕТКА ФОРМАЦИЙ, ЧАСТИЧНАЯ АЛГЕБРА ФОРМАЦИЙ, ПОЛНАЯ РЕШЕТКА КЛАССОВ ФИТТИНГА, РЕШЕТКА  $\tau$ -ЗАМКНУТЫХ  $n$ -КРАТНО НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ, РЕШЕТКА  $\tau$ -ЗАМКНУТЫХ ТОТАЛЬНО НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ, РЕШЕТКА ВСЕХ РАЗРЕШИМЫХ ТОТАЛЬНО ЛОКАЛЬНЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА, РЕШЕТКА ВСЕХ КЛАССОВ ФИТТИНГА, АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ РЕШЕТКА**

**Объект исследования** – решетка  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно насыщенных формаций, решетка  $\tau$ -замкнутых тотально насыщенных формаций, решетка всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга, решетка всех классов Фиттинга.

**Цель работы** – поиск алгебраических решеток  $n$ -кратно насыщенных формаций и классов Фиттинга.

**Методы исследования** – используются методы теории классов конечных групп и методы общей теории решеток.

**Полученные результаты и их новизна** – найдены серии алгебраических решеток частично насыщенных формаций и классов Фиттинга: решетки всех  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно насыщенных формаций, решетки  $\tau$ -замкнутых тотально насыщенных формаций, решетки всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга, решетки всех классов Фиттинга.

**Сфера применения** – полученные результаты об алгебраичности решетки  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно насыщенных формаций, решетки  $\tau$ -замкнутых тотально насыщенных формаций, решетки всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга могут быть использованы при написании курсовых и дипломных проектов.

**Степень внедрения** – результаты исследования выполнены в рамках задания «Развитие локальных методов исследования радикалов и классов Фиттинга и их применение в теории конечных групп» (Конвергенция 1.1.03.5), входящего в Государственную программу научных исследований на 2011-2015 годы «Междисциплинарные научные исследования, новые зарождающиеся технологии как основа устойчивого инновационного развития» (ГПНИ «Конвергенция»). Подпрограмма «Разработка и исследование математических методов и их применение для решения

актуальных проблем естествознания, техники, экономики и социальных наук» («Математические методы», номер госрегистрации в БелИСА - 20111880).

Основным результатом настоящей работы является следующая

**Теорема 1 [17].** *Всякая частичная алгебра формаций является алгебраической решеткой.*

Кроме того доказаны следующие теоремы:

**Теорема 2 [6].** *Решетка  $l_n^\tau$  является алгебраической.*

**Теорема 3 [4].** *Решетка всех  $\tau$ -замкнутых тотально насыщенных формаций  $l_\infty^\tau$  является алгебраической.*

**Теорема 4 [8].** *Решетка всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга алгебраична.*

**Теорема 5 [10].** *Решетка всех классов Фиттинга алгебраична.*

## СОДЕРЖАНИЕ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ .....	5
ВВЕДЕНИЕ .....	16
ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ.....	18
1 ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ .....	18
2 АЛГЕБРАИЧНОСТЬ РЕШЕТКИ ВСЕХ $\tau$ -ЗАМКНУТЫХ $n$ -КРАТНО НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ.....	20
3 АЛГЕБРАИЧНОСТЬ РЕШЕТКИ $\tau$ -ЗАМКНУТЫХ ТОТАЛЬНО НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ.....	23
4 АЛГЕБРАИЧНОСТЬ РЕШЕТКИ ВСЕХ РАЗРЕШИМЫХ ТОТАЛЬНО ЛОКАЛЬНЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА .....	28
5 АЛГЕБРАИЧНОСТЬ РЕШЕТКИ ВСЕХ КЛАССОВ ФИТТИНГА.....	30
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	32
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	33

## ВВЕДЕНИЕ

Ряд известных результатов теории классов конечных групп связан с исследованием решеток классов. Совокупность всех формаций, а также совокупность всех классов Фиттинга образует полную решетку (по включению). Напомним, что класс конечных групп называется формацией, если он замкнут относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Класс Фиттинга определяется дуально.

В работе А.Н. Скибы [7] впервые было замечено, что привлечение решеточных конструкций весьма полезно при изучении самих формаций. При этом существенную роль играет тот установленный им факт, что решетка всех (насыщенных) формаций модулярна. Этот результат получил развитие в различных направлениях. Одно из таких актуальных направлений связано с поиском серий алгебраических решеток формаций и классов Фиттинга. В частности, в монографии А.Н. Скибы «Алгебра формаций» [6] была доказана алгебраичность решетки всех  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно насыщенных формаций; Н.Н. Воробьевым и А.Н. Скибой [8] было показано, что алгебраической является решетка всех разрешимых totally насыщенных классов Фиттинга; И.П. Шабалиной [9] доказана алгебраичность решетки всех  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно  $\omega$ -насыщенных формаций; О.В. Камозиной [10] установлена алгебраичность решетки всех классов Фиттинга; В.Г. Сафонов, отвечая на вопрос 4.4 вышеупомянутой монографии А.Н. Скибы [6], показал, что решетка всех  $\tau$ -замкнутых totally насыщенных формаций алгебраична.

Основным результатом настоящей дипломной работы является следующее утверждение: всякая частичная алгебра формаций является алгебраической решеткой. Отметим, что результаты А.Н. Скибы [6] и В.Г. Сафонова [4] вытекают в качестве следствий из основного результата. Остановимся на обзоре содержания дипломной работы по разделам.

Первый раздел носит вспомогательный характер. В нем приводится ряд известных результатов, необходимых нам в дальнейшем.

Во втором разделе доказана алгебраичность решетки всех  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно насыщенных формаций.

В третьем разделе показано, что решетка всех  $\tau$ -замкнутых totally насыщенных формаций алгебраична. А также установлен основной результат об алгебраичности решетки частичной алгебры формаций.

В четвертом разделе доказана алгебраичность решетки всех разрешимых totally локальных классов Фиттинга.

В пятом разделе доказана алгебраичность решетки всех классов Фиттинга.

Результаты исследования выполнены в рамках задания «Развитие локальных методов исследования радикалов и классов Фиттинга и их применение в теории конечных групп» (Конвергенция 1.1.03.5), входящего в Государственную программу научных исследований на 2011-2015 годы «Междисциплинарные научные исследования, новые зарождающиеся технологии как основа устойчивого инновационного развития» (ГПНИ «Конвергенция»). Подпрограмма «Разработка и исследование математических методов и их применение для решения актуальных проблем естествознания, техники, экономики и социальных наук» («Математические методы», номер госрегистрации в БелИСА - 20111880).

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Каргаполов, М.И. Основы теории групп / М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков – М.: Наука, 1978. – 263 с.
- 2 Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Мн.: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
- 3 Салий, В.Н. Решетки с единственными дополнениями / В.Н. Салий – М.: Наука, 1984. – 128 с.
- 4 Сафонов, В.Г. Об алгебраичности решетки всех  $\tau$ -закнутых тотально насыщенных формаций // Алгебра и логика – 2006. – Т.45, №5. – С. 620 – 626.
- 5 Скиба, А.Н. Кратно  $\omega$ -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Математические труды. – 1999. – Т.2, №2. – С. 114 – 147.
- 6 Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Мн.: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
- 7 Скиба, А.Н. О локальных формациях длины 5 / А.Н. Скиба // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. – Мн.: Наука и техника, 1986. – С. 149 – 156.
- 8 Воробьев, Н.Н. О дистрибутивности решетки разрешимых тотально локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба // Матем. заметки. – 2000. – Т.67, вып. 5. – С. 662 – 673.
- 9 Шабалина, И.П. Алгебраичность решетки  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно  $\omega$ -локальных формаций // Известия Гом. гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. – 2002. – №5(14). – С. 59 – 67.
- 10 Камозина, О.В. Алгебраические решетки кратно  $\Omega$ -расслоенных классов Фиттинга / О.В. Камозина // Дискретная математика. – 2006. – Т.18, вып. 2. – С. 139 – 145.
- 11 Камозина, О.В. О неоднопорожденных кратно  $\omega$ -веерных классах Фиттинга конечных групп / О.В. Камозина // Матем. заметки. – 2006. – Т.79, вып. 3. – С. 396 – 408.
- 12 Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 256 с.
- 13 Сафонов, В.Г. Характеризация разрешимых однопорожденных формаций конечных групп // Сиб. матем. ж. – 2006.
- 14 Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков – М.: Наука, 1978. – 272 с.
- 15 Мальцев, А.И. Алгебраические системы / А.И. Мальцев – М.: Наука, 1970. – 392 с.

16 Воробьев, Н.Н. Об индуктивных решетках формаций и классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев // Докл. НАН Беларуси. – 2000. – Т.44, № 3. – С. 21 – 24.

17 Воробьев, Н.Н. Об алгебраических решетках формаций конечных групп / Н.Н. Воробьев, А.Р. Кузнецова // Международная научная конференция «Дискретная математика, алгебра и их приложения» (ДИМА-2015), Минск, 14 – 18 сентября 2015 г. / Институт математики НАН Беларуси, Белорусский государственный университет; оргкомитет: М.А. Журавков, В.И. Янчевский [и др.]. – Мн., 2015. – С. 165.