МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ «ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА»

Математический факультет

Кафедра алгебры и методики преподавания математики

Допущена к защите
«17» мая 2016 г.
Заведующий кафедрой
Воробьев Н.Т.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

КЛАССЫ ФИТТИНГА С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ РАДИКАЛОВ

Специальность «математика», 1-31 80 03

Кондратьева Екатерина Андреевна

Научный руководитель:
Воробьев Николай Тимофеевич
профессор, доктор физико-математичесих наук

Витебск, 2016

9 (девять)

01.07.16г

Реферат

Магистерская диссертация 36 с., 20 использованных источников.

КЛАСС ФИТТИНГА, КЛАСС ЛОКЕТТА, ЛОКАЛЬНЫЙ КЛАСС ФИТТИНГА, ГИПОТЕЗА ЛОКЕТТА, РАДИКАЛ ГРУППЫ, ПАРЫ ЛОКЕТТА.

Объект исследования – разрешимые классы Фиттинга.

Цель работы – описание пар Локетта для ненаследственных классов Фиттинга.

Методы исследования – применяются методы исследования теории классов конечных групп.

Полученные результаты и их новизна – полученные результаты являются новыми. Доказана следующая теорема:

Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга. Тогда пара ($\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$) является парой Локетта в каждом из следующих случаев:

1) *если* $\mathfrak{H}$ —Λ-класс Фишера и для всех $\lambda\in\Lambda$ таких, что $\pi(\lambda,)\subseteq \mathrm{Char}(\mathfrak{F})$ имеет место включение $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_{\pi(\lambda)}\subseteq \mathfrak{F}\subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}_{\pi(\lambda)}\, \mathfrak{S}_{\pi'(\lambda)}$, где $\mathfrak{X}$ - некоторый класс Фиттинга;

2) если $\mathfrak{H}$ — π-HR-наследственный класс Фиттинга и для всех $\pi\subseteq Char(\mathfrak{F})$ имеет место включение $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_{\pi}\subseteq \mathfrak{F}\subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{S}_{\pi'}$,где $\mathfrak{X}$ - некоторый класс Фиттинга.

Область применения – полученный результат о структуре классов Фиттинга можно использовать при изучении классов Фиттинга, а также при написании курсовых и дипломных проектов, чтении спецкурсов по теории групп для студентов математических специальностей.

Степень внедрения – результаты исследования выполнены в рамках задания по НИР «Развитие локальных методов исследования радикалов и классов Фиттинга и их применение в теории конечных групп» (ГПНИ «Конвергенция-2020»)

Введение

Со второй половины XX века важное место в теории конечных групп стали занимать исследования, связанные с классами групп, т.е. множествами групп, содержащими наряду с группой и все изоморфные ей группы. Благодаря основополагающим работам Гашюца, Фишера, Хартли [1], в которых в терминах формаций и классов Фиттинга было найдено изящное обобщение фундаментальных теорем Силова и Холла, в теории классов конечных разрешимых групп стали формироваться два новых направления - теория формаций и теория классов Фиттинга.

При этом ключевым определяющим объектом в теории классов Фиттинга стало понятие радикала. Это обусловлено, прежде всего тем, что классы Фиттинга определяются следующим образом. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп. Тогда, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно гомоморфных образов и для любой группы G существует наименьшая нормальная подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ группы G такая, что факторгруппа $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}$ называется формацией. Классом Фиттинга называется класс групп $\mathfrak{F}$ такой, что для любой группы G существует наибольшая нормальная подгруппа $G_{\mathfrak{F}}$ группы G, то $\mathfrak{F}$ называют классом Фиттинга. Подгруппу $G_{\mathfrak{F}}$ называют $\mathfrak{F}$-радикалом группы G.

По мере развития структурной теории классов значимость и эффективность применения радикалов была подтверждена рядом содержательных результатов как по изучению строения и классификации классов, так и по исследованию нормального и подгруппового строения самих групп посредством описания радикалов и корадикалов. Это нашло отражение в серии работ Гашюца [1], Л.А. Шеметкова [2], А.Н. Скибы [3], В.Н. Семенчука [4], Н.Т. Воробьева [5] и др., а также в современной монографической и учебной литературе.

Уже в 70-е годы в терминах радикалов были определены и исследовались два обширных семейства классов Фиттинга: нормальные классы Фиттинга и классы Локетта [6]. Напомним, что если для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и любой группы G ее $\mathfrak{F}$-радикал содержит ее комутант, то $\mathfrak{F}$ называют нормальным. Примечателен тот факт (на что впервые обратил внимание в известном обзорном докладе по теории классов групп Косси), что при изучении структуры классов определяющую роль играют классы Фиттинга, заданные свойствами прямых произведений радикалов групп. Это обусловлено, прежде всего, тем, что в теории классов Фиттинга решение многих задач описания структуры классов и их классификации связано с применением операторов «*» и «$_{*}$», которые были определены Локеттом [6]. Для любого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}^*$ определяется как наименьший содержащий $\mathfrak{F}$ такой, что для всех групп G и H справедливо равенство $(G\times H)_{\mathfrak{F}^*}=G_{\mathfrak{F}^*}\times H_{\mathfrak{F}^*}$, и $\mathfrak{F}_*$ - пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^*=\mathfrak{F}^*$. В дальнейшем класс

Фиттинга $\mathfrak{F}$ стали и назвать классом Локетта, если $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}^*$.

Универсальность семейства классов Локетта подчеркивает уже тот факт, что оно обширно, так как содержит все классы Фиттинга, либо замкнутые относительно гомоморфных образов, либо конечных подпрямых произведений (в частности, все формации Фиттинга), либо относительно произведений силовских подгрупп на нормальные подгруппы (в частности, все наследственные классы Фиттинга). Глубокий интерес к исследованию структуры классов с помощью операторов Локетта был вызван и тем обстоятельством, что в теории классов Фиттинга известна следующая характеризация Локетта нормальных классов Фиттинга: класс Фиттинга нормален тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}$ - класс всех конечных разрешимых групп. Ввиду этого и свойств операторов Локетта получаем, что если $\mathfrak{X}$ - некоторый нормальный класс Фиттинга, то $\mathfrak{X}_*= \mathfrak{S}_*$ - минимальный нормальный класс Фиттинга. Кроме того, для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ имеет

место равенство $(\mathfrak{F}^*\cap \mathfrak{X}^*)=(\mathfrak{F}^*\cap \mathfrak{S}) = \mathfrak{F}^*$ и поэтому $\mathfrak{F}^*\subseteq \mathfrak{F}^*\cap \mathfrak{X}\subseteq \mathfrak{F}^*$. Заметим также, что $\mathfrak{F}_*\subseteq \mathfrak{F}\subseteq \mathfrak{F}^*$. В связи с этим Локеттом [6] была сформулирована общая проблема о структуре классов Фиттинга, которая в настоящее время известна как гипотеза Локетта.

Список использованных источников

1. Gallego M.P. Fitting pairs from direct limits and the Lockett conjecture // Comm. Algebra/ - 1996/ - Vol.24, №6. – P. 2011-2023.
2. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. - Москва: Наука, 1978. - 272 с.
3. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. - Минск: Беларуская навука, 1997.-240 с.
4. Семенчук, В.Н. О разрешимых минимальных не S-группах /В.Н. Семенчук // Вопросы алгебры. -1987. - N 3. - С. 16-21.
5. Воробьев, Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта/Н.Т. Воробьев // Матем. заметки. - 1988. - N 2. - С. 161-167.
6. Lockett, P. On the theory of Fitting classes / P. Lockett // Math.Z. - 1973. 'Vol.l31.-N3.- P.103-115.
7. Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов. – Гомель: УО «ГГУ им Ф.Скорины». – 2003. – 322.
8. Воробьев, Н.Т. Локальность разрешимых наследственных классов Фиттинга / Н.Т. Воробьев // Матем. заметки. —1992. - Т.51, вып. 3. - С.3-8.
9. Воробьев Н.Т. Локальные произведения классов Фиттинга /Н.Т.Воробьев // Весцi АН БССР. Сер. фiз. матэм. навук. - 1991. - N 6. - С.22-26.
10. Bryce, R. A problem in theory of normal Fitting classes / R. Bryce, J. Cossey // Math. Z.- 1975.- Band 141, N 2.-S. 99 -110.
11. Beidleman J.C., Hauck P. Uberfittingklassen und Lockett-Vermutung // Math. Z. 1979. Bd.167, №2. – S. 161-167.
12. Brison, O. Hall operators for Fitting classes / 0. Brison // Arch. Math. - 1979. -Bd. 33.-S. 1-9.
13. Doerk, K. Finite soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. - Berlin - Newark: Walter de Gruyter, 1992. - 891 p.
14. Воробьев Н.Т. О локальных радикальных классах //Вопросы алгебры. Минск: Изд-во Университетское. 1986. Вып.2. С.41-50.
15. Залесская, Е.Н. Классы Фиттинга с заданными свойствами функций Хартли: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.06 / Е.Н. Залесская. - Витебск, 2004. – 85л.
16. Ведерников, В.А. – Элементы теории классов групп: учеб.пособие / В.А. Ведерников – Смоленск, 1988. – 96с.
17. Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп) // Институт математики РАН. – 1992. - 172с.
18. Воробьев Н.Т. О локальных радикальных классах //Вопросы алгебры. Минск: Изд-во Университетское. 1986. Вып.2. С.41-50.