МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ «ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П.М.МАШЕРОВА»

Факультет математики и информационных технологий

Кафедра алгебры и методики преподавания математики

Допущена к защите

«08» 04 2021г.

Заведующий кафедрой

______ Воробьев Н.Т.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ КЛАССОВ ФИТТИНГА ПОСРЕДСТВОМ ОПЕРАТОРОВ ЛОКЕТТА

Специальность: 1-31 80 03 «Математика и компьютерные науки»

Исаченко Юлия Владимировна

магистрант

Научный руководитель:

Залесская Елена Николаевна

доцент кафедры алгебры и МПМ,

кандидат физико-математических наук,

доцент

27.04.2021

"10" (десять)

Витебск, 2021

РЕФЕРАТ

Магистерская работа 36 с., 19 использованных источников.

КЛАСС ФИТТИНГА, ОПЕРАТОРЫ ЛОКЕТТА, КЛАСС ЛОКЕТТА, ГИПОТЕЗА ЛОКЕТТА, ЛОКАЛЬНЫЙ КЛАСС ФИТТИНГА, ω- ЛОКАЛЬНЫЙ КЛАСС ФИТТИНГА, ФОРМАЦИЯ, РАДИКАЛЬНЫЙ ГОМОМОРФ, РАДИКАЛЬНАЯ ФОРМАЦИЯ, РЕШЕТКА КЛАССОВ ФИТТИНГА.

Объект исследования – классы Фиттинга.

Цель работы – описание новых сюръективных отображений решеток классов Фиттинга.

Методы исследования – применяются методы теории классов конечных групп и методы теории решеток.

Полученные результаты и их новизна – основным результатом является теорема 4.1, в которой определено достаточное условие для того, чтобы отображение решетки секции Локетта, порожденной произвольными классами Фиттинга, в решетку секции Локетта, порожденной произведением ω-локальных классов Фиттинга, было сюръективно. Все полученные результаты являются новыми.

Область применения – полученные результаты можно использовать при изучении классов Фиттинга, а также при написании курсовых и дипломных проектов, чтении спецкурсов по теории групп для студентов математических специальностей.

Степень внедрения – данная работа выполнена в рамках задания по НИР «Методы локализации и теории решеток в исследованиях строения конечных групп и их классов» (ГПНИ «Конвергенция – 2020» № гос.

регистр. 20160350) и внедрена в учебный процесс кафедры алгебры и методики преподавания математики.

Содержание

Введение

Теория групп – один из центральных разделов современной алгебры, в настоящее время активно разрабатываемый в Беларуси.

Возникновение понятия группы стало новым витком в алгебре и началом абстрактной алгебры как таковой. Истоки понятия группы можно найти в нескольких дисциплинах, одна из основных – теория решений алгебраических уравнений в радикалах. В 1771 г. французские математики Ж. Лагранж и А. Вандермонд впервые для необходимости этой теории применили подстановки. Затем, в ряде работ итальянского математика П. Руффини (1799 г. и позднее), посвященных доказательству неразрешимости уравнения пятой степени в радикалах, систематически используется замкнутость множества подстановок относительно их композиции и по существу описаны подгруппы группы всех подстановок пяти символов. Норвежский математик Н. Абель (1824) и французский математик Э. Галуа (1830) показали глубокие связи между свойствами группы подстановок и свойствами уравнений. Галуа принадлежат и конкретные достижения в теории групп, а именно: введение термина «группа» (хотя и без строгого определения), открытие роли нормальных подгрупп в связи с задачей о разрешимости уравнений в радикалах и др.. Трактат французского математика К. Жордана о группе подстановок (1870) сыграл важную роль в систематизации и развитии теории групп.

Идея группы независимо возникла и в геометрии, когда в середине 19 в. на смену единой античной геометрии пришли многочисленные «геометрии» и остро встал вопрос об установлении связей и родства между ними. Выход из сложившейся ситуации был намечен исследованиями по проективной геометрии, посвященными изучению поведения фигур при различных преобразованиях. Постепенно интерес в этих исследованиях перешёл на изучение самих преобразований и поиск их классификации. Таким «изучением геометрического родства» много занимался немецкий математик А. Мёбиус. Появление «Эрлангенской программы» немецкого математика Ф. Клейна (1872) стало заключительным этапом на этом пути. Программа положила в основу классификации геометрий понятие группы преобразований, которое определялось следующим образом: каждая геометрия определена некоторой группой преобразований пространства, и только те свойства фигур принадлежат к данной геометрии, которые инвариантны относительно преобразований соответствующей группы.

Осознание в конце XIX в. принципиального единства теоретико-групповых форм мышления, которые существовали к тому времени независимо в разных областях математики, привело к выработке современного абстрактного понятия группы. Так в 1895 г. Ли определил группу как совокупность преобразований, замкнутую относительно их композиции, которая удовлетворяет некоторым условиям.

С выходом книги О. Ю. Шмидта "Абстрактная теория групп" (1916) изучение групп без предположения их конечности и без каких бы то ни было предположений о природе элементов впервые оформилось в самостоятельную область математики.

Во второй половине XX века (в основном, между 1955 и 1983 гг.) была проведена огромная работа по классификации всех конечных простых групп.

Новым витком развития алгебры стало изучения классов групп, т.е. множеств, элементами которых являлись уже не отдельные элементы, а группы.

Классы Фиттинга впервые упоминаются в статье Фишера [1] в 1966 году.

Классы Фиттинга конечных групп впервые рассматриваются в статье Фишера, Гашюца, Хартли [2] в 1967 году.

В первой статье (1966), классы Фиттинга были введены двойственным образом к формациям, классам групп, замкнутым относительно фактор-групп и относительно подпрямого произведения. Классы Фиттинга замкнуты относительно нормальных подгрупп и прямого произведения нормальных $\mathfrak{X}$ –подгрупп.

Двойственность заключалась в том, что определение классов Фиттинга получалось из определения формаций заменой фактор-групп на нормальные подгруппы. В силу двойственности формацию называют корадикальным классом (класс Фиттинга – радикальный класс). Двойственность наблюдается и в теории $\mathfrak{F}$ –проекторов (формации) и $\mathfrak{F}$ –инъекторов (классы Фиттинга). Решение многих задач описания строения классов Фиттинга и их классификации связано с применением операторов Локетта «$*$» и «*» [3]. Каждому непустому классу Фиттинга $\mathfrak{F}$ Локетт [3] сопоставляет класс $\mathfrak{F}^*$, который определяется как наименьший из классов Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$, такой, что для всех групп G и H справедливо равенство $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$, и класс $\mathfrak{F}_*$ как пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*$. Класс Фиттинга называют классом Локетта [3], если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$. Заметим, что семейство классов Локетта обширно: оно содержит наследственные и обобщенно наследственные классы Фиттинга (классы Фишера), а так же классы Фиттинга, замкнутые относительно гомоморфных образов или конечных подпрямых произведений (в частности, формации Фиттинга).

Непустой класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется нормальным, если $\mathfrak{F}$ –радикал $G_{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{F}$ –максимальной подгруппой G для любой группы G.

Как установлено [3], для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ справедливы включения: $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^*$ и $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}^*$, где $\mathfrak{X}$ – некоторый нормальный класс Фиттинга.

В связи с этим, Локеттом была сформулирована следующая проблема, которая в настоящее время известна как

Гипотеза Локетта [3]. Каждый класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ совпадает с пересечением некоторого нормального класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}^*$.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$, удовлетворяющий гипотезе Локетта, будем называть $\mathfrak{L}_{\mathfrak{X}}$-классом. Если же класс $\mathfrak{F}$ не является $\mathfrak{L}_{\mathfrak{X}}$-классом, то мы будем называть его $\overline{\mathfrak{L}_{\mathfrak{X}}}$-классом.

Ввиду результата Дерка и Хоукса X.6.1 [4] естественно следующее обобщение гипотезы Локетта и понятия $\mathfrak{L}_{\mathfrak{X}}$ −класса.

$\mathfrak{L}_{\mathfrak{X}}$-гипотеза. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ – классы Фиттинга, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{X}$, если справедливо равенство

$$\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{X}_*.$$

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ тогда мы будем называть $\mathfrak{L}_{\mathfrak{X}}$-классом. Первоначально гипотеза Локетта была подтверждена Брайсом и Косси [5] для разрешимых локальных наследственных классов Фиттинга. В [5] также установлено, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является в точности -классом, если справедливо равенство $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{S}_*$, где $\mathfrak{S}_*$ – минимальный нормальный класс Фиттинга. В последующем гипотеза нашла подтверждение для следующих семейств классов Фиттинга: разрешимых локальных вида $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$ (Бейдлеман и Хаук [6]), произвольных разрешимых локальных (Н.Т. Воробьев [7]). Кроме того, позднее Галледжи [8] было установлено, что локальные классы Фиттинга произвольных групп также удовлетворяют гипотезе Локетта.

В настоящий момент теория классов Фиттинга насчитывает чуть больше 50 лет, за которые были получены довольно значительные и важные результаты. Данная теория является «молодой», актуальной для современных математиков и хранит в себе ещё много нераскрытых фактов и неизученных вопросов.

Заметим, что множество всех классов Фиттинга и формаций являются полными решетками по включению $\subseteq$.

Однако до настоящего времени, нет достаточной информации о решетках классов Фиттинга. Например, если говорить про решетку разрешимых классов Фиттинга, то нельзя сказать, будет ли она модулярной. Модулярность решетки всех разрешимых нормальных классов Фиттинга доказал Лауш. Брайс и Косси [5] доказали модулярность и атомарность решетки классов Фиттинга из секции Локетта, тем самым расширив результат Лауша.

Следуя [4], для пары классов Фиттинга $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ определим отображение

$$\mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}^* \tag{1}$$

из $Locksec(\mathfrak{H})$ в $Locksec(\mathfrak{F})$. Для $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{E}$, где $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{E}$ – класс всех конечных разрешимых и класс всех конечных групп соответственно, отображение (1) является сюръективным (см. [4, X, 6.1]); другими словами, секция Локетта $\mathfrak{S}$ определяется секцией Локетта $\mathfrak{E}$. В работе [3] Локетт поставил проблему: верно ли, что отображение (1) сюръективно всегда, когда $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}$? Впоследствии эта проблема стала известна как «гипотеза Локетта» [3].

В 1996 году Галледжи [8] было построено сюръективное отображение решетки $Locksec(\mathfrak{E})$ в решетку секции Локетта, порожденной произвольными локальными классами Фиттинга.

Е.Н. Залесской и Н.Н. Воробьевым [15] в 2009 году было определено достаточное условие для того, чтобы отображение решетки секции Локетта, порожденной произвольным классом Фиттинга, в решетку секции Локетта, порожденной ω-локальным классом Фиттинга, было сюръективно.

Таким образом, проблема описания новых сюръктивных отображений решеток классов Фиттинга, остается по-прежнему актуальной.

Целью моей работы является описание новых сюръктивных отображений решеток классов Фиттинга.

Задачи данной работы:

- Изучить операторы Локетта и их свойства;
- Исследовать классы Фиттинга посредством заданных свойств операторов Локетта;
- Найти новые классы Фиттинга, удовлетворяющие обобщенной гипотезе Локетта.

План изложения материала следующий:

- в разделе 1 приводятся основные понятия и в качестве лемм некоторые вспомогательные утверждения, которые мы используем;
- в разделе 2 рассматриваем основные свойства классов Фиттинга;
- в разделе 3 рассматриваются основные свойства операторов Локетта;
- в разделе 4 доказан основной результат работы.

Список использованных источников

1. Fischer, B. Klassen konjugirter Untergruppen in endlichen auflosbaren Gruppen / B. Fischer. – Universitat Frankfurt: Habilitationsschrift, 1966.

2. Fischer, B. Injektoren endlicherauflosbarer Gruppen / B. Fischer, W.Gaschutz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd.102, №5 – S.337-339.

3. Locket, P. The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ / P. Locket // Math. Z. – 1974. – Vol.137, №2. – P. 131-136.

4. Doerk, K. Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes. – New York, Berlin: Waltor de Gryeter, 1992. – 891p.

5. Bryce, R.A. A problem in Theory of normal Fittinf classes / R.A . Bryce, J. Cossey // Math. Z. – 1975. – Vol.141, №2. – P.99-110.

6. Beidleman, J.C. Uberfittingklassen und Lockett-Vermutung / J.C Beidleman, P. Hauck // Math. Z. – 1979. – Bd.167, №2. – S. 161-167.

7. Воробьев, Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н. Т. Воробьев // Матем. заметки. – 1988. – Т.43, №2. – С. 161-168.

8. Gallego, M.P. Fitting pairs from direct limits and the Lockett conjecture / M. P. Gallego // Comm. Algebra – 1996. – Vol.24, №6. – P. 2011-2023.

9. Залесская, Е.Н. Классы Фиттинга с заданными свойствами функций Хартли / Е.Н. Залесская – Гомель, 2003. – 45 с.

10. Ведерников, В.А. Элементы теории классов групп: учеб.пособие / В.А. Ведерников – Смоленск, 1988. – 96с.

11. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов: учеб.пособие / В.С. Монахов – Мн.: Выш. шк., 2006. – 207 с.

12. Blessenohl, D. Uber normal Schunk und Fittingklassen / D. Blessenohl, W. Gaschutz // Math. Z. – 1970. – Bd.148, № 1. – S. 1-8.

13. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков – М.: Наука. – 1978. – 278 с.

14. Скиба, А.Н. Кратно w-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А. Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Математические труды. – 1999. – Т. 2, №2. – С. 114-147.

15. Залесская, Е.Н. О решетках частично локальных классов Фиттинга / Е. Н. Залесская, Н. Н. Воробьев // Сиб. матем. журн. – 2009. – Т. 50, №6. – 1319–1327

16. Воробьев, Н.Т. О проблемах структуры классов Фиттинга / Н.Т. Воробьев, Е.Н. Залесская, Н.Н. Воробьев // Веснік ВДУ. – 2007. - №2 (44). – С. 105-108.

17. Ведерников В.А., Сорокина М.М. ω-веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Матем. заметки. 2002. Т.71, вып. 1. С. 43-60.

18. Воробьев Н. Т. О наибольшей приведенной функции Хартли // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2000. № 1. С. 8–13.

19. Скиба, А. Н. Решётки и универсальные алгебры / А. Н. Скиба. – Гомель, 2002. – 250 с.