МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА»

Факультет математики и информационных технологий

Кафедра алгебры и методики преподавания математики

Допущен к защите
«18» мая 2020г.
Заведующий кафедрой
________ Н.Т. Воробьев

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

ОБ АЛГЕБРЕ КЛАССОВ ФИШЕРА

Специальность 1-31 80 03 «Математика»

(Войткевич)

Исаченко Анна Станиславовна,
магистрант

Научный руководитель:
Воробьев Николай Тимофеевич,
заведующий кафедрой алгебры и методики преподавания математики,
доктор физико-математических наук,
профессор

25.06.2020
"10" (десять)

Витебск, 2020

РЕФЕРАТ

Магистерская диссертация 27 с., 11 использованных источников.

КЛАСС ФИТТИНГА, МНОЖЕСТВО ФИТТИНГА КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ G, КЛАСС ФИШЕРА, МНОЖЕСТВО ФИШЕРА КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ G, ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВА ФИШЕРА КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ G И КЛАССА ФИШЕРА, σ-ЛОКАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО ФИТТИНГА КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ G.

Объекты исследования – множества Фишера конечной группы G и классы Фишера.

Предмет исследования – свойства произведений и локальности множеств Фишера конечной группы G и классов Фишера.

Цель работы – исследование свойств произведений и локальности множеств Фишера конечной группы G и классов Фишера, доказательство аналога известного результата Локетта о произведениях классов Фишера для множеств Фишера G.

Методы исследования – методы теории конечных групп и их классов, в частности, методы теории классов Фишера.

Элементы новизны – все полученные результаты являются новыми: получен аналог известного результата Локетта для множеств Фишера конечной группы G; доказано, что произведение множества Фишера G и класса Фишера – множество Фишера G, каждое σ-локальное множество Фиттинга G является множеством Фишера G, а также доказан критерий формаций Фишера в случае ее σ-локальности.

Полученные результаты и их актуальность – полученные новые результаты вносят определенный вклад в развитие структурной теории классов и множеств Фишера, что позволит в дальнейшем описать строение классов сопряженных канонических подгрупп конечных групп.

Сфера применения – работа выполнена в рамках задания ГПНИ «Конвергенция – 2020» (№ гос. регистрации 20160350). Полученные результаты могут быть использованы при написании курсовых и дипломных работ, а также при изучении спецкурса «Основы теории групп» и курса «Основы теории групп и их классов» для студентов математических специальностей.

Степень внедрения – подтверждается актом о внедрении результатов в учебный процесс кафедры алгебры и методики преподавания математики факультета математики и информационных технологий ВГУ имени П.М. Машерова.

Основные результаты работы – следующие теоремы:

Теорема 2.1 *Если $\mathcal{F}$ – множество Фишера группы G и $\mathfrak{X}$ – класс Фишера, то произведение $\mathcal{F}\odot\mathfrak{X}$ является множеством Фишера группы G.*

Теорема 3.3 *Любое σ-локальное множество Фиттинга группы G является множеством Фишера G.*

Теорема 4.6 *Пусть $\mathfrak{F}$ – σ-локальная формация. Если f - σ-локальный спутник $\mathfrak{F}$ такой, что $f(\sigma_i)$ являются классами Фишера для всех $\sigma_i \in \sigma(G)$, то $\mathfrak{F}$ – σ-локальная формация Фишера.*

Теорема 4.7 *Если $\mathfrak{F}$ – σ-локальная формация Фишера, то f - σ-локальный спутник $\mathfrak{F}$ такой, что $f(\sigma_i)$ являются классами Фишера для всех $\sigma_i \in \sigma(G)$.*

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга* [1], если выполняются следующие два условия:

(1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$, то $N \in \mathfrak{F}$;

(2) если $N_1, N_2 \trianglelefteq G$ и $N_1, N_2 \in \mathfrak{F}$, то $N_1 N_2 \in \mathfrak{F}$.

Из (2) следует, что для любой группы G существует единственная максимальная нормальная подгруппа, принадлежащая $\mathfrak{F}$. Ее называют $\mathfrak{F}$ -радикал G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$.

Во многих случаях описание структуры классов Фиттинга и канонических подгрупп связано с применением понятия произведения классов Фиттинга (см., например, главы IX и X [1]). *Произведением класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и класса групп $\mathfrak{H}$* называется класс групп: $\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{H} = (G: G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга, то их произведение $\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{H}$ является классом Фиттинга [1, IX, (1.12), (a)].

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фишера* [2] если выполняются следующие условия:

(1) $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга;

(2) если $G \in \mathfrak{F}$ и $K \trianglelefteq G, K \leq H \leq G$ и $H/K - p$-группа для некоторого простого числа p, то $H \in \mathfrak{F}$.

В теории классов Фиттинга конечных разрешимых групп известен результат Локетта [3] о том, что произведение классов Фишера является классом Фишера.

Используя понятие множество Фиттинга конечной группы G Дёрк и Хоукс [1] определили понятие множества Фишера конечной группы G. Напомним, что непустое множество $\mathcal{F}$ подгрупп группы G называется *множеством Фиттинга конечной группы* G [1, VIII, (2.1)], если выполняются следующие три условия:

(1) если $T \trianglelefteq\trianglelefteq S \in \mathcal{F}$, то $T \in \mathcal{F}$;

(2) если $S, T \in \mathcal{F}$ и $S, T \trianglelefteq ST$, то $ST \in \mathcal{F}$;

(3) если $S \in \mathcal{F}$ и $x \in G$, то $S^x \in \mathcal{F}$.

В [1] установлено, что каждому классу Фишера $\mathfrak{F}$ соответствует множество Фишера $\mathcal{F}$ конечной группы G – его след в группе G, т.е. множество $\mathcal{F} = \{H \leq G: H \in \mathfrak{F}\}$, хотя обратное в общем случае неверно.

Определение 0.1 [1, VIII, (4.3)] *Множеством Фишера конечной группы* G называется множество Фиттинга $\mathcal{F}$ конечной группы G, которое удовлетворяет следующему свойству: если $L \leq G, K \trianglelefteq L \in \mathcal{F}$, $K \leq H \leq L$ и H/K является p-подгруппой L/K для некоторого простого числа p, то $H \in \mathcal{F}$.

Мы будем использовать следующее понятие, которое было определено Н.Т. Воробьевым, Го Вэньбинем и Яном Наньином в работе [4].

Определение 0.2 [4] Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга конечной группы G и $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга. Множество $\mathcal{F}\odot\mathfrak{X} = (\mathrm{H} \leq \mathrm{G}: \mathrm{H}/\mathrm{H}_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X})$ подгрупп группы G называется *произведением множества Фиттинга конечной группы* G *и класса Фиттинга.*

В [4] доказано, что множество $\mathcal{F}\odot\mathfrak{X}$ является множеством Фиттинга конечной группы G.

В связи с этим возникает задача нахождения аналога указанного выше результата Локетта [3] для множеств Фишера конечной группы G.

Решение ее – одна из основных целей настоящей работы.

Основной целью работы является исследование свойств произведений и локальности множеств Фишера конечной группы G и классов Фишера, доказательство аналога известного результата Локетта о произведениях классов Фишера для множеств Фишера G.

Основные результаты работы представлены в следующих теоремах:

Теорема 0.3 *Если* $\mathcal{F}$ *– множество Фишера конечной группы* G *и* $\mathfrak{X}$ *– класс Фишера, то произведение* $\mathcal{F}\odot\mathfrak{X}$ *является множеством Фишера группы* G.

Теорема 0.4 *Любое σ-локальное множество Фиттинга группы G является множеством Фишера G.*

Теорема 0.5 *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– σ-локальная формация. Если* f *- σ-локальный спутник* $\mathfrak{F}$ *такой, что* $f(\sigma_i)$ *являются классами Фишера для всех* $\sigma_i \in \sigma(G)$*, то* $\mathfrak{F}$ *– σ-локальная формация Фишера.*

Теорема 0.6 *Если* $\mathfrak{F}$ *– σ-локальная формация Фишера, то* f *- σ-локальный спутник* $\mathfrak{F}$ *такой, что* $f(\sigma_i)$ *являются классами Фишера для всех* $\sigma_i \in \sigma(G)$.

Первый раздел состоит из известных результатов, которые понадобятся нам в дальнейшем при решении задач.

Второй раздел посвящен исследованию произведения множества Фишера конечной группы G на класс Фишера, а именно нахождению аналога известного результата Локетта о произведениях классов Фишера для множеств Фишера G.

Третий раздел посвящен исследованию локальности множеств Фишера G.

Четвертый раздел посвящен σ-локальной формации, которая является формацией Фишера.

В работе используются только конечные группы, если не оговаривается противное.

Работа выполнена в рамках задания ГПНИ «Конвергенция – 2020» (№ гос. регистрации 20160350). Результаты работы опубликованы в работах [10-11], а также апробированы на следующих конференциях: The Youth of the 21st Century: Education, Science, Innovations. V International Conference for Students, Postgraduates and Young Scientists (Витебск, 12 декабря 2018 г.) [8], The XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky (Vinnytsia, Украина, 2-6 июля, 2019 г.) [9], VIII Международной научно-практической конференции студентов и магистрантов «Молодость. Интеллект. Инициатива» (Витебск, 22 апреля 2020 г.) [12].

Научная работа на тему «О произведении множества Фишера конечной группы и класса Фишера» получила первую категорию на XXVI Республиканском конкурсе научных работ студентов Республики Беларусь за 2019 год, секция «Математика. Методы и алгоритмы вычислительной математики и математического моделирования для решения задач экономики, техники и природоведения» [11].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

2. Hartley, B. On Fischer's dualization of formation theory / B.Hartley. – Proc. London Math. Soc., 1969. Vol. 3, № 2. P. 193 – 207.

3. Lockett, F.P. On the theory of Fitting classes of finite soluble groups / F.P. Lockett. – Ph.D. thesis. University of Warwick. 1971.

4. Vorob'ev N.T. On $\mathfrak{F}$-injectors of Fitting set of a finite group / Vorob'ev N.T., Nanying Yang, W.Guo. – Com. in Algebra. 2018. Vol 46, № 1. P.217 – 229.

5. Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / Монахов В.С. – Гомель, 2003. – 322 с.

6. Vorob'ev N.T. On σ-local Fitting classes / Vorob'ev N.T., Wenbin Guo, Li Zhang. – Journal of Algebra. 2020. Vol 542, P.116 – 129.

7. Z.Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba, On one application of the theory of n-multiply σ -local formations of finite groups. – Problems of Physics, Mathematics and Technics, № 2 (35), 2018.