МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ «ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА»

Факультет математики и информационных технологий

Кафедра алгебры и методики преподавания математики

Допущена к защите

«25» марта 2021 г.

Заведующий кафедрой

______ Н.Т. Воробьёв

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

РЕШЕТКИ МНОЖЕСТВ И КЛАССОВ ФИТТИНГА

Специальность 1-31 80 03 Математика и компьютерные науки

Жук Таисия Даниэловна,

магистрант

Научный руководитель:

Воробьев Николай Тимофеевич,

заведующий кафедрой алгебры и

методики преподавания математики,

доктор физико-математических наук,

профессор

27.04.2021

"10" (десять)

Витебск 2021

РЕФЕРАТ

Работа 22 с., 9 источников.

КЛАСС ФИТТИНГА, H_σ-ФУНКЦИЯ, σ-ЛОКАЛЬНЫЙ КЛАСС ФИТТИНГА

Объект исследования – σ-локальные классы Фиттинга конечных групп.

Предмет исследования – модулярность решетки σ-локальных классов Фиттинга конечных групп.

Цель работы – нахождение достаточных условий модулярности решетки всех обобщённо локальных классов Фиттинга и фиттинговых множеств.

Методы исследования – используются методы теории классов конечных групп, в частности, методы теории классов Фиттинга и множеств Фиттинга.

Полученные результаты и их новизна – все полученные результаты являются новыми. Впервые описаны семейства обобщённо локальных классов Фиттинга и множеств Фиттинга, для которых справедливо модулярное тождество.

Сфера применения – результаты работы можно применять при решении различных задач, связанных с изучением свойства модулярности для решеток классов Фиттинга конечных групп. Кроме того, результаты могут быть использованы при чтении спецкурсов по теории групп для студентов математических специальностей, а также при написании курсовых и дипломных проектов, магистерских диссертаций.

Степень внедрения – результаты исследования выполнены в рамках задания по НИР «Развитие методов теории радикальных множеств и их применение к исследованию подгруппового строения конечных групп» (ГПНИ «Конвергенция – 2025» № гос. регистр. 20210495 от 01.04.2021) и внедрены в учебный процесс на кафедре алгебры и методики преподавания математики УО «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

В настоящей работе определены условия, при которых для σ-локальных классов Фиттинга выполняется модулярное тождество. Доказано, что если минимальные H_σ-функции f_1, f_2, f_3 σ-локальных классов Фиттинга $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$ такие, что $f_1(\sigma_j) \vee f_2(\sigma_j) = Sn\{G : G = G_{f_1(\sigma_i)} G_{f_2(\sigma_i)}\}$ и $f_1 \leq f_3$, то выполняется следующее равенство:

$$(\mathfrak{F}_1 \vee_\sigma \mathfrak{F}_2) \cap \mathfrak{F}_3 = \mathfrak{F}_1 \vee_\sigma (\mathfrak{F}_2 \cap \mathfrak{F}_3).$$

Найден признак модулярности для фиттинговых множеств группы. Установлено, что если множества Фиттинга $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$ и $\mathcal{R}$ группы G таковы, что $\mathcal{F} \vee \mathcal{H} = Sn\{R \leq G : R = R_\mathcal{F} R_\mathcal{H}\}$ и $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{R}$, то справедливо следующее тождество:

$$(\mathcal{F} \vee \mathcal{H}) \cap \mathcal{R} = \mathcal{F} \vee (\mathcal{H} \cap \mathcal{R}).$$

ВВЕДЕНИЕ

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга* [1] , если выполняются следующие условия:

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$, то $N \in \mathfrak{F}$;

2) если $N_1, N_2 \in \mathfrak{F}, N_1 \trianglelefteq G, N_2 \trianglelefteq G$ и $G = N_1N_2$ то $G \in \mathfrak{F}$.

Решеткой [2, с. 18] называется частично упорядоченное множество, в котором каждое двухэлементное подмножество обладает как точной верхней, так и точной нижней гранью. Решетка L называется *модулярной* [2, с. 29], если для любых $x, y, z \in L$ таких, что $x \leq y$, выполняется равенство $x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z)$, называемое модулярным законом.

Хорошо известно, что множество всех классов Фиттинга образует решетку относительно операций $\wedge$ и $\vee$, которые для классов Фиттинга определяются следующим образом:

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга, тогда

$$\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}, \mathfrak{F} \vee \mathfrak{H} = Fit(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H}),$$

где $Fit(\mathfrak{X})$ – пересечение всех классов Фиттинга, содержащих совокупность групп $\mathfrak{X}$.

В теории классов Фиттинга известен результат Лауша [3] о том, что множество всех нормальных классов Фиттинга образует решетку по включению относительно операций $\wedge$ и $\vee$, которая является модулярной.

Вместе с тем до настоящего времени является открытой проблема модулярности решетки всех классов Фиттинга конечных групп [4, проблема 14.47]. На пути решения такой проблемы важно определить те семейства классов Фиттинга, для которых справедливо модулярное тождество. Нахождение признаков модулярности решетки классов Фиттинга – основная цель настоящей работы.

Первый раздел состоит из известных результатов, которые понадобятся нам в дальнейшем при решении задач.

Во втором разделе мы находим признаки модулярности для обобщённо локальных классов Фиттинга. Для этого мы используем σ-метод Скибы исследования групп и формаций [5]. Дуализация результатов Скибы об обобщённо локальных формациях была произведена в работе [6] в теории классов Фиттинга.

Следуя Шеметкову [7], пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, σ – это разбиение $\mathbb{P}$, т.е. $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$, $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$.

σ-Функцией Хартли или *H_σ-функцией* называется отображение [6] вида

$$f: \sigma \longrightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}.$$

Для произвольной H_σ-функции f определяют класс

$$LR_\sigma(f) = \left(G \middle| G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma'_i}} \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G)\right).$$

Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ таков, что $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ для некоторой H_σ-функции f, то говорят, что $\mathfrak{F}$ называют *σ-локальным классом Фиттинга* с H_σ-функцией f [6].

Основной результат второго раздела – это следующая теорема:

Теорема 2.5 *Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$– σ-локальные классы Фиттинга и f_1, f_2, f_3 – их минимальные H_σ-функции такие, что $f_1(\sigma_j) \vee f_2(\sigma_j) = Sn\{G : G = G_{f_1(\sigma_i)}G_{f_2(\sigma_i)}\}$. Если $f_1 \leq f_3$, тогда:*

$$(\mathfrak{F}_1 \vee_\sigma \mathfrak{F}_2) \cap \mathfrak{F}_3 = \mathfrak{F}_1 \vee_\sigma (\mathfrak{F}_2 \cap \mathfrak{F}_3).$$

Аналогично, как и для классов Фиттинга можно рассматривать решетку фиттинговых множеств группы.

Непустое множество подгрупп $\mathcal{F}$ группы G называется *множеством Фиттинга группы G* [1,VIII, (2.1)], если выполняются следующие условия:

(1) если T – субнормальная подгруппа группы $S \in \mathcal{F}$, то $T \in \mathcal{F}$;

(2) если S, T такие подгруппы из $\mathcal{F}$, что $S, T \trianglelefteq ST$, то $ST \in \mathcal{F}$;

(3) если $S \in \mathcal{F}$ и $x \in G$, то $S^x \in \mathcal{F}$.

Операции $\wedge$ и $\vee$ для решетки множеств Фиттинга определяются следующим образом:

Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{H}$ – множества Фиттинга, тогда

$$\mathcal{F} \wedge \mathcal{H} = \mathcal{F} \cap \mathcal{H}, \mathcal{F} \vee \mathcal{H} = Fitset(\mathcal{F} \cup \mathcal{H}),$$

где $Fitset(\mathfrak{X})$ – пересечение всех множеств Фиттинга, содержащих совокупность групп $\mathfrak{X}$.

Основной результат третьего раздела – нахождение семейств фиттинговых множеств, для которых справедливо модулярное тождество.

Нами установлено, что

Теорема 3.1 *Если множества Фиттинга $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$ и $\mathcal{R}$ группы G таковы, что $\mathcal{F} \vee \mathcal{H} = Sn\{ R \leq G : R = R_{\mathcal{F}} R_{\mathcal{H}}\}$ и $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{R}$, то справедливо модулярное тождество $(\mathcal{F} \vee \mathcal{H}) \cap \mathcal{R} = \mathcal{F} \vee (\mathcal{H} \cap \mathcal{R})$.*

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

2. Салий, В. Н. Решетки с единственными дополнениями / В. Н. Салий // М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984 г.— 128 с.

3. Lausch, H. On normal Fitting classes / H. Lausch // Math. Z. – 1973. – Bd. 130, № 1. – S. 67–72.

4. Мазуров, В.Д. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. – 17-е изд., доп., включающее Архив решенных задач / В.Д. Мазуров, Е.И. Хухро // Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН – Новосибирск : изд-во Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2010. – 219 с.

5. Skiba, A.N. A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra and Appl. – 2015. – Vol. 15, № 4. – P. 21 – 36.

6. Vorob'ev, N.T. On σ-local Fitting classes / W. Guo, Li Zhang, N.T. Vorob'ev // J. Algebra and Appl. – 2020. – Vol. 542 – P. 116 – 129.

7. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков // М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1978. – 272 с. – (Соврем. алгебра).

8. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов: учеб. пособие / В.С Монахов. – Мн.: Выш. шк., 2006. – 207 с.

9. Скиба, А.Н. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.