МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ «ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА»

Математический факультет

Кафедра алгебры и методики преподавания математики

Допущена к защите
«23» мая 2015 г.
Заведующий кафедрой
алгебры и методики
преподавания математики
__________ Н.Т. Воробьев

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

ФАКТОРИЗАЦИИ КЛАССОВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Специальность 1-31 80 03 «Математика»

Дубовой Татьяны Васильевны

Научный руководитель:
Воробьев Николай Тимофеевич,
заведующий кафедрой алгебры и
методики преподавания математики,
профессор, доктор физико-
математических наук

10 (десять)
28.06.2015

Витебск, 2015

Реферат

Магистерская диссертация 26 стр., 15 использованных источников.

ФОРМАЦИЯ, КЛАСС ФИТТИНГА, ЛОКАЛЬНАЯ ФОРМАЦИЯ, ЛОКАЛЬНЫЙ КЛАСС ФИТТИНГА, ПРОИЗВЕДЕНИЕ ФОРМАЦИЙ, ПРОИЗВЕДЕНИЕ КЛАССОВ ФИТТИНГА, ЛОКАКЛЬНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ФОРМАЦИЙ, ЛОКАЛЬНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ КЛАССОВ ФИТТИНГА.

Объект исследования – произведения формаций и классов Фиттинга.

Цель работы – исследование свойства локальности произведений формаций и классов Фиттинга.

Методы исследования – используются методы теории конечных групп и их классов.

Полученные результаты и их новизна – изучена факторизация локальных формаций и классов Фиттинга. Доказано, что произведение формаций представляется в виде сомножителей, один из которых локален в случае, когда либо первый множитель π-насыщен, либо содержит класс всех π'-групп и является идемпотентом.

Сфера применения – результат может быть использован для написания курсовых, дипломных работ и магистерских диссертаций.

В настоящей работе определены следующие классы групп и доказаны утверждения:

Определение 1. *Если $\mathfrak{F}$ - класс Фиттинга, то через $lFit\mathfrak{F}$ обозначим наименьший локальный класс Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$, и $lFit\mathfrak{F}$ назовем локальным классов Фиттинга, порожденным $\mathfrak{F}$.*

Определение 2. *Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем π-насыщенным, если $\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$, где π – некоторое множество простых чисел, а $\mathfrak{E}_{\pi'}$ – класс всех π'-групп.*

Теорема 1. *Пусть множество простых чисел* $\emptyset \subset \pi \subset P$ *и класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *таковы, что* $lFit\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}$. *Тогда произведение классов Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *факторизуются в виде* $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (lFit\mathfrak{F})\mathfrak{H}$ *в каждом из следующих случаев:*

1) $\mathfrak{H}$ *– π-насыщен;*

2) $\mathfrak{H}$ *– Q-замкнут и* $\mathfrak{E}_{\pi'} \subseteq \mathfrak{H} = \mathfrak{H}^2$.

Определение 3. *Формацию* $\mathfrak{F}$ *называют π-насыщенной, если* $\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'} = \mathfrak{F}$, *где π–некоторое множество простых чисел, а класс* $\mathfrak{E}_{\pi'}$ *– класс всех* π'*-групп.*

Определение 4. *Если* $\mathfrak{F}$ *– некоторая формация, в общем случае нелокальная, то через* $lform\mathfrak{F}$ *будем обозначать локальную формацию порожденную* $\mathfrak{F}$, *т.е. наименьшую из локальных формаций, содержащих* $\mathfrak{F}$.

Теорема 2. *Если* H *- нормально наследственная формация, множество простых чисел* $\emptyset \subset \pi \subset P$ *и формация* $\mathfrak{F}$ *таковы, что* $lform\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{F}$, *то произведение формаций* $\mathfrak{H}\mathfrak{F} = \mathfrak{H}(lform\mathfrak{F})$ *в каждом из двух случаев:*

1) формация $\mathfrak{H}$ *–π-насыщена;*

2) $\mathfrak{H}$ *такая формация, что* $\mathfrak{E}_{\pi'} \subseteq \mathfrak{H} = \mathfrak{H}^2$.

Содержание

Введение

В теории классов конечных групп основными объектами исследования являются классы Фиттинга и формации. Напомним, что классом Фиттинга [1] называют класс групп, замкнутый относительно нормальных подгрупп и их произведений. Формацией [2] называется класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений.

Одной из важных задач теории формаций и классов Фиттинга является задача их построения с помощью алгебраических операций. Такими операциями являются операции умножения классов Фиттинга и операции умножения формаций. Известно, что если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то для каждой группы G существует наибольшая нормальная подгруппа, принадлежащая $\mathfrak{F}$. Ее называют *$\mathfrak{F}$-радикалом* группы G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$. Если же $\mathfrak{F}$ – непустая формация групп, то подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ группы G называется *$\mathfrak{F}$-корадикалом* группы G, если она представляет собой пересечение всех тех нормальных подгрупп M из G, для которых G/M принадлежит $\mathfrak{F}$.

При этом произведением классов Фиттинга [2] называется класс всех тех групп G, для которых $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}$. Произведение формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ [3] есть класс всех тех групп G, для которых $\mathfrak{H}$-корадикал группы G принадлежит $\mathfrak{F}$ т.е. $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G: G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F})$. Хорошо известно, что произведение классов Фиттинга является классом Фиттинга и произведение формаций является формацией. С помощью произведений классов групп функциональными методами определяется способ построения локальных классов Фиттинга и локальных формаций. Произведение классов Фиттинга $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ называется локальным [4], если $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ – локальный класс Фиттинга. Локальным произведением формаций называют такое произведение, которое является локальной формацией [3].

Особый интерес представляет изучение произведения локальных классов Фитинга и локальных формаций. Это обусловлено проблемами из Коуровской тетради [5] о том, существует ли произведение нелокальных формаций, которые являются локальными и аналогичный вопрос для классов Фитинга. В этом направлении были получены результаты Н.Т. Воробьевым, В.В. Шпаковым [6]. Однако, оставался не исследованным вопрос, в каком случае формации и классы Фитинга, в общем случае нелокальные, факторизуются в виде локальных и нелокальных формаций. Основной результат настоящей работы решение данной задачи в теории классов Фитинга и формаций.

План изложения материала следующий:

В первой главе приведены основные определения и леммы.

Во второй главе вводятся понятия локального класса Фиттинга и локальной формации. Приводятся примеры локальных классов Фиттинга и локальных формаций.

В третьей главе дается определение произведения классов Фиттинга и локальных формаций, изучаются их основные свойства.

В четвертой главе описаны факторизации произведения двух классов Фиттинга и двух формаций для случая, когда один из множителей является локальным. В частности доказано, что произведение формаций представляется в виде сомножителей, один из которых локален в случае, когда либо первый множитель π-насыщен, либо содержит класс всех π'-групп и является идемпотентом.

Основные результаты работы опубликованы в [7] и [8]. А также апробированы на III Международной научно-практической конференции студентов и магистрантов «Молодость. Интеллект. Инициатива», которая состоялась 23 апреля 2015 года в рамках III Международного студенческого славянского форума.

Список использованных источников

1. Doerk, K. Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York : Walter de Gruyter & Co.,1992. – P.891.
2. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М.: Наука, 1978 – С. 272 .
3. Шеметков, Л.А. О произведении формаций / Л. А. Шеметков. – Докл. АН БССР, 1984. – 101-103 с. – (Соврем. алгебра).
4. Воробьёв, Н.Т. Локальные произведения класов Фиттинга / Н.Т. Воробьёв Изв. АН БССР Сер.физ.-мат.н. -1991. 6. 28-32с.
5. Каргаполов, М.И. Коуровская тетрадь: нерешённые задачи теории групп / М.И. Каргаполов // НГУ 1973
6. Шпаков, В.В. Локальные факторизации нелокальных классов Фиттинга / В.В. Шпаков, Н.Т. Воробьёв // Дискретная математика -2008. Т.20, вып.3. 111-118с.
7. Дубова, Т.В. О факторизациях локальных и нелокальных формаций / Т.В. Дубова // III Международная научно-практическая конференция студентов и магистрантов «МОЛОДОСТЬ. ИНТЕЛЛЕКТ. ИНИЦИАТИВА».
8. Дубова, Т.В. Local products of formations / Т.В. Дубова // I Международная конференция студентов, магистрантов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь XXI века: образование, наука, инновации».
9. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Мн.: Выш. шк., 2006. – 207 с.
10. Каргаполов, М. И. Основы теории групп / М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков. – Мн.: Наука, 1978. – 263 с.
11. Чунихин, С. А. Подгруппы конечных групп / С. А. Чунихин. – Минск: Наука и техника, 1964.

12. Воробьев, Н. Т. Об одном признаке локальности формационных произведений / Н. Т. Воробьев. – Матем. заметки, 1983, том 34, № 2. – С. 165-170.

13. Lockett, P. On the theory of Fitting classes / P. Lockett. – Math. Z., 1973, Vol. 131, № 3. – P. 103 -115.

14. Воробьев, Н.Т. О факторизации классов Фиттинга / Н.Т. Воробьев, В.В.Шпаков. – Веснік ВДУ.-2005.- / №1(4).

15. Ведерников, В.А. Элементы теории классов групп / В.А.Ведерников.–Смоленск.-1978.-96с.