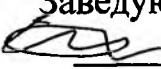


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ «ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА»

Факультет математики и информационных технологий

Кафедра алгебры и методики преподавания математики

Допущен к защите  
«18» мая 20\_\_ г.  
Заведующий кафедрой  
 Н.Т. Воробьев

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ КЛАССЫ ФИТТИНГА

Специальность 1-31 80 03 «Математика»

Дорожинский Николай Валерьевич,  
магистрант  
Научный руководитель:  
Воробьев Николай Тимофеевич,  
заведующий кафедрой алгебры и  
методики преподавания математики,  
доктор физико-математических наук,  
профессор

25.06.2020

9" (ответ)

Витебск, 2020

## РЕФЕРАТ

Магистерская диссертация 22 с., 12 использованных источников.

**Ключевые слова** – КЛАСС ФИТТИНГА, ГРУППА, ФАКТОРГРУППА, ХОЛЛОВЫ  $\pi$ -ПОДГРУППЫ,  $\mathfrak{F}$ -ИНЪЕКТОРЫ.

**Объект исследования** – классы Фиттинга.

**Предмет исследования** – свойства классов Фиттинга и их перестановочности.

**Цель работы** – описание методов построения классов Фиттинга и их перестановочности посредством вложения холловых  $\pi$ -подгрупп в инъекторы частично разрешимых групп.

**Методы исследования** – используются методы теории конечных групп и их классов. В частности, методы теории классов Фиттинга.

**Элементы новизны** – описаны методы построения классов Фиттинга конечных частично разрешимых групп, доказан критерий перестановочности инъекторов и холловых  $\pi$ -подгрупп.

**Полученные результаты и их актуальность** – впервые описаны методы построения классов Фиттинга частично разрешимых групп и доказан критерий их перестановочности, что позволяет выявить новые свойства инъекторов и холловых подгрупп конечных частично разрешимых групп.

**Сфера применения** – работа выполнена в рамках задания ГПНИ “Конвергенция 2020” (№ гос. регистр. 20160450). Полученные результаты могут быть использованы в учебном процессе для чтения спецкурсов по теории групп для студентов математических специальностей, а также при написании курсовых и дипломных проектов, магистерских и кандидатских диссертация.

**Степень внедрения** – подтверждена актом о внедрении результатов в учебный процесс кафедры алгебры и методики преподавания математики

**Основные результаты работы – следующие теоремы.**

**2.2 Теорема.** Справедливы следующие утверждения:

- 1) класс групп  $L_\pi(\mathfrak{F})$  является классом Фиттинга;
- 2) класс Фиттинга  $L_\pi(\mathfrak{F})$   $\pi$ -насыщен.

**3.1 Теорема.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – класс Фиттинга, и пусть  $\mathcal{L} = L_\pi(\mathfrak{F})$ . Тогда

- a)  $\mathfrak{F} \cup \mathfrak{C}_\pi \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{C}_\pi \subseteq \mathcal{L} = \mathcal{L}\mathfrak{C}_\pi$ ;
- b)  $L_\pi(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$ ;
- c) Любые два из следующих утверждений эквивалентны:
  - i)  $\mathfrak{F} = L_\pi(\mathfrak{F})$ ;
  - ii)  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\mathfrak{C}_\pi$ ;
  - iii) Для каждого  $G$ ,  $\mathfrak{F}$ -инъекторы имеют  $\pi$ -индекс в  $G$ ;
  - iv)  $L_\pi(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}\mathfrak{C} \cap \mathfrak{C}^\pi$ ;

**4.3 Теорема.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – класс Фиттинга,  $\pi \in P$ ,  $G$  – группа,  $V$  и  $G_\pi$  являются соответственно  $\mathfrak{F}$ -инъектором и холловой  $\pi'$ -подгруппой группы  $G$ , и пусть

$$W = \langle V, G_\pi \rangle.$$

Класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$  перестановочен тогда и только тогда, когда подгруппа  $W$  является  $\mathfrak{F}$ -инъектором группы  $G$ .

# СОДЕРЖАНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ .....	5
ВВЕДЕНИЕ.....	6
ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ .....	8
1 ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ.....	8
2 КЛАСС ФИТТИНГА, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЙ ВЛОЖЕНИЕМ ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУПП .....	14
3 СВОЙСТВА КЛАССА ФИТТИНГА $L_{\pi}(\mathfrak{S})$ .....	16
4 КРИТЕРИЙ ПЕРЕСТАНОВОЧНОГО КЛАССА ФИТТИНГА .....	18
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	20
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	21

## ВВЕДЕНИЕ

Все рассматриваемые группы конечны. Разработка новых методов построения классов Фиттинга и описание их свойств – одна из актуальных задач теории классов конечных групп.

В этом направлении исследований широко известны результаты Локетта [1], Кусака [2], Бризна [3] и Дерка-Хоукса [4]. В частности, в основополагающей работе Локетта [1] в универсуме всех разрешимых групп для каждого множества простых чисел  $\pi$  класса Фиттинга  $\mathfrak{F}$  была впервые определена конструкция класса  $L_\pi(\mathfrak{F})$  всех разрешимых групп  $\mathfrak{F}$ -инъекторы которых содержат холловы  $\pi$ -подгруппы этих групп. Оказалось, что такой класс групп является классом Фиттинга, который обладает рядом полезных свойств, которые нашли приложение для описания алгебры классов Фиттинга групп, а также строения инъекторов. Это подтверждает, прежде всего, известные результаты Локетта [1] об описании строения инъекторов для произведений классов Фиттинга и перестановочности классов Фиттинга и результаты Бризна [3], и Кусака [2,5] о факторизациях классов Фиттинга и их решеточных свойствах.

Однако все указанные результаты были получены в предположении о том, что все рассматриваемые группы разрешимы. Вместе с тем в теории групп известна классическая теорема Чунихина [6] о том, что холловы  $\pi$ -подгруппы существуют и любые две из них сопряжены в любой  $\pi$ -разрешимой группе. При этом заметим, что в специальном случае, когда  $\pi$ -множество всех простых чисел,  $\pi$ -разрешимая группа является разрешимой. Более того, как установлено, Баллестером-Боллинше [7],

$\mathfrak{F}$ -инъекторы группы существуют и сопряжены для любого класса Фиттинга в любой частично разрешимой группе, т.е. группе факторгруппа по  $\mathfrak{F}$ -радикалу которой разрешима.

Все это приводит к решению актуальной задачи расширения указанных результатов Локетта [1] на случай частично разрешимых групп. Ее реализации и посвящена настоящая работа.

Основная цель работы – описание метода построения классов Фиттинга при помощи вложения холловых подгрупп в инъекторы, доказательство критерия перестановочности инъекторов и холловых подгрупп в универсуме частично разрешимых групп.

План изложения материала следующий.

В разделе 1 перечень предварительных сведений, которые будут применяться на протяжении изложения материала данной работы.

В разделе 2 изучено семейство классов Фиттинга  $\pi$ -разрешимых групп, определяемых вложением холловых подгрупп в инъекторы групп.

В разделе 3 речь пойдет о свойствах класса Фиттинга  $L\pi(F)$ .

В разделе 4 приводится критерий перестановочного класса Фиттинга.

Основные результаты опубликованы в работах [1,2] и апробированы на следующих конференциях: The Youth of the 21st Century: Education, Science, Innovations: Proceedings of V International Conference for Students, Postgraduates and Young Scientists, Vitebsk, December 12,2018; XIII Машеровские чтения: материалы международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 18 октября 2019 г.

Все исследования в диссертации мы проводим для частично разрешимых: в универсуме  $\mathfrak{S}^* \cap \mathfrak{S}$ .

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Lockett, P. On the theory of Fitting classes of finite soluble groups / P. Lockett. – Math. Z.-1973.-Vol. 131.- P. 103-115.
2. Cusack, E. The join of two Fitting classes / E. Cusack. // Math. Z.-1979.- Bd. 167. –P.37-47.
3. Brison, O.J. On the theory of Fitting classes of finite groups / O.J. Brison. – Ph D. thesis, University of Warwick., 1978.
4. Doerk K. Finite soluble groups/ K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-N.Y.: Walter de Gruyter.- 1992. –P. 891.
5. Cusack, E. Strong containment of Fitting classes / E. Cusack. // J. Algebra.-1980.- Vol.64. - P. 414-429.
6. Чунихин, С.А. О  $\pi$ -свойствах конечных групп / С.А. Чунихин. // ДАН СССР.- 1947.- 55,№6. – С.481-484.
7. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L. Esquerro. – Amsterdam: Springer, 2006. – 306 p.
8. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Мн.: Выш. шк., 2006. – 207 с.
9. Курош А. Г., Черников С.Н. Разрешимые и нильпотентные группы / А.Г. Курош, С.Н. Черников. // УМН.- 1947.-С. 18-59.
10. Воробьев, С.Н. Об аналоге гипотезы Шеметкова для классов Фишера конечных групп / С.Н. Воробьев, Е.Н. Залеская. // Сиб. матем. журн.- 2013.-Т 54, №5. –С. 989-999.
11. Fischer, B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102, № 5. – S. 337–339.
12. Fischer, B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen / B. Fischer – Habilitationsschrift, Universität Frankfurt (M), 1966.