МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ «ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА»

математический факультет

кафедра алгебры и методики преподавания математики

Допущена к защите
«23» мая 2015 г.
Заведующий кафедрой
алгебры и методики
преподавания математики
Н.Т. Воробьев

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

РЕШЕТКИ ЧАСТИЧНО КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЙ

Специальность 1-31 80 03 «Математика»

Григорьева Ивана Александровича

Научный руководитель:
Воробьев Николай Николаевич,
профессор кафедры алгебры и
методики преподавания математики,
доктор физико-математических наук, доцент

10 (десять)
29.06.2015

Витебск, 2015

Реферат

Магистерская диссертация 33 стр., 15 использованных источников.

ФОРМАЦИЯ, КЛАСС ФИТТИНГА, КОМОНОЛИТ ГРУППЫ, КОЦОКОЛЬ ГРУППЫ, КОМОНОЛИТИЧЕСКАЯ ГРУППА, НОРМАЛЬНО НАСЛЕДСТВЕННЫЙ КЛАСС, ω-ЛОКАЛЬНАЯ H-ФУНКЦИЯ, ВНУТРЕННЯЯ ω-ЛОКАЛЬНАЯ H-ФУНКЦИЯ, ω-ЛОКАЛЬНЫЙ КЛАСС ФИТТИНГА.

Объект исследования – разрешимые ω-локальные классы Фиттинга.

Цель работы – решение задачи описания структуры порожденных разрешимых ω-локальных классов Фиттинга; в частности нахождение новых свойств порожденных ω-локальных классов Фиттинга.

Методы исследования – используются методы теории классов конечных групп.

Полученные результаты и их новизна – результаты, полученные в разделе 2 настоящей работы являются новыми.

Сфера применения – полученные результаты о свойствах разрешимых ω-локальных классах Фиттинга могут быть использованы при написании курсовых и дипломных проектов, а также магистерских диссертаций.

Степень внедрения – результаты исследования выполнены в рамках задания „Развитие локальных методов исследования радикалов и классов Фиттинга и их применение в теории конечных групп" (Конвергенция 1.1.03.5), входящего в Государственную программу научных исследований на 2011 – 2015 годы „Междисциплинарные научные исследования, новые зарождающиеся технологии как основа устойчивого инновационного развития" (ГПНИ „Конвергенция"). Подпрограмма „Разработка и исследование математических методов и их применение для решения актуальных проблем естествознания, техники, экономики и социальных наук" („Математические методы", номер госрегистрации в БелИСА – 20111880).

В настоящей работе доказаны следующие утверждения:

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *– разрешимый нормально наследственный класс и* $A \in l_\omega \mathrm{fit}\mathfrak{M}$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если* $O^p(A) = A$ *и* $p \in \omega$, *то* $A \in l_\omega \mathrm{fit}\mathfrak{M}_1$, *где* $\mathfrak{M}_1 = (O^p(G) \mid G \in \mathfrak{M})$;

2) *если* $A^{\omega d} = A$, *то* $A \in l_\omega \mathrm{fit}\mathfrak{M}_2$, *где* $\mathfrak{M}_2 = (G^{\omega d} \mid G \in \mathfrak{M})$.

Теорема 2. *Пусть* f *– внутренняя* ω*-локальная* H*-функция класса Фиттинга* $\mathfrak{F}$, $\pi = \omega \cap \pi(A/\mathrm{Cosoc}(A))$. *Тогда если для каждого* $p \in \pi$ *имеет место* $F^p(A) \in f(p)$, *то* $A \in \mathfrak{F}$.

Содержание

Введение

Напомним что формация это класс конечных групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Двойственно формациям в работе [14] Гашюцом, Фишером, Хартли в разрешимом случае были определены классы Фиттинга, т.е. классы конечных групп, замкнутые относительно нормальных подгрупп и их произведений. Классом Фиттинга, порожденным классом групп $\mathfrak{X}$, называется наименьший класс Фиттинга, содержащий класс групп $\mathfrak{X}$.

Пусть ω – некоторое непустое множество простых чисел и $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$. Пусть f – произвольная функция вида

$$f\colon \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{классы Фиттинга}\} \qquad (1)$$

где $f(\omega') \neq \emptyset$. Следуя [2], функции f сопоставляют класс групп

$$LR_{\omega}(f) = (G \mid G^{\omega d}(G) \in f(\omega') \text{ и } F^{p}(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)),$$

где $\pi(G)$ – множество всех различных простых делителей порядка группы G. Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ таков, что $\mathfrak{F} = LR_{\omega}(f)$ для некоторой функции f вида (1), то $\mathfrak{F}$ называется ω-локальным классом Фиттинга с ω-локальной функцией Хартли f (более кратко, ω-локальной H-функцией) (см. [2]). В случае, когда $\omega = \{p\}$, класс Фиттинга называется p-локальным. Если ω = P символ ω опускается и класс Фиттинга называется локальным. Формация $\mathfrak{F}$ называется ω-насыщенной [2], если из $G/O_p(\Phi(G)) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$ для всех $p \in \omega$.

При обозрении большинства наиболее известных конкретных формаций групп легко обнаружить, что они могут быть заданы при помощи функций, все непустые значения которых сами являются насыщенными формациями. Это обстоятельство привело к возникновению следующей естественной конструкции [15]: всякая формация считается 0-кратно ω-насыщенной, а при $n \geq 1$ формация $\mathfrak{F}$ называется n-кратно ω-насыщенной, если $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$, где все непустые значения функции f являются $(n-1)$-кратно ω-насыщенными формациями.

Значение концепции кратной локализации связано во-первых с тем, что сопоставляя каждой конечной группе n-кратно ω-насыщенную формацию $l_n^{\omega}\mathrm{form}(G)$, порожденную этой группой, можно ставить вопрос о связи внутреннего строения группы G со свойствами формации $l_n^{\omega}\mathrm{form}(G)$. Во-вторых, в работе А. Н. Скибы и Л. А. Шеметкова [2] (см. также монографию А.Н.Скибы [1]) показано, что привлечение порожденных n-кратно ω-насыщенных формаций весьма полезно при изучении решеток формаций. В частности свойства порожденных тотально насыщенных формаций были использованы для доказательства дистрибутивности решетки всех разрешимых тотально насыщенных формаций. Возникает вопрос о возможности дуализации упомянутых свойств порожденных формаций при рассмотрении порожденных ω-локальных классов Фиттинга. Решение этой задачи – основная цель настоящей магистерской диссертации.

Остановимся на обзоре содержания диссертационной работы по разделам.

Первый раздел носит вспомогательный характер. В нем приводится ряд известных результатов, необходимых нам в дальнейшем.

В разделе 2.1 исследованы свойства порожденных кратно ω-насыщенных формаций, которые применялись в работе А. Н. Скибы и Го Вэнь Биня [11] при исследования тождеств, решеток кратно насыщенных и кратно композиционных формаций. В разделе 2.2 найдены новые свойства порожденных ω-локальных классов Фиттинга.

Результаты магистерской диссертации опубликованы в одной статье (в научном журнале „Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўниверсітэта імя П. М. Машэрава") и двух тезисах докладов Международных конференций (Международной алгебраической конференции „Алгебра и приложения", посвященной 100-летию со дня рождения Л. А. Калужнина, (Нальчик, 2014) и Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных „IX Машеровские чтения" (Витебск, 2015)).

Результаты исследований выполнены в рамках задания „Развитие локальных методов исследования радикалов и классов Фиттинга и их применение в теории конечных групп" (Конвергенция 1.1.03.5), входящего в Государственную программу научных исследований на 2011 – 2015 годы „Междисциплинарные научные исследования, новые зарождающиеся технологии как основа устойчивого инновационного развития" (ГПНИ „Конвергенция"). Подпрограмма „Разработка и исследование математических методов и их применение для решения актуальных проблем естествознания, техники, экономики и социальных наук" („Математические методы", номер госрегистрации в БелИСА – 20111880).

Список использованных источников

1. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А. Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.

2. Скиба, А.Н. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114 – 147.

3. Воробьев, Н.Н. Алгебра классов конечных групп: монография / Н. Н. Воробьев. – Витебск : ВГУ имени П. М. Машерова, 2012. – 322 с.

4. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p. – (De Gruyter Expo. Math., vol. 4).

5. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1978. – 272 с. – (Соврем. алгебра).

6. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Мн: Выш. шк., 2006. – 207 с.

7. Салий, В.Н. Решетки с единственными дополнениями / В. Н. Салий. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1984. – 128 с. – (Соврем. алгебра).

8. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite groups / A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer, 2006. – 385 p. – (Mathematics and its Applications; vol. 584).

9. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1989. – 256 с. – (Соврем. алгебра).

10. Ballester-Bolinches, A. On lattices of p-local formations of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L. A. Shemetkov // Math. Nachr. – 1997. – V.186. – P. 57–65.

11. Го, Вэньбинь. Два замечания о тождествах решеток ω-локальных и ω-композиционных формаций конечных групп / Вэньбинь Го, А. Н. Скиба // Известия вузов. Математика. – 2002. – №5 (480). – С. 14-22.

12. Воробьёв, Н.Н. О свойстве порожденных ω - локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьёв, И.А. Григорьев // Междунар. конф. "Алгебра и приложения", посвящ. 100-летию со дня рождения Л.А. Калужнина : тез. докл., Нальчик, 6–11 сентября 2014 г. / Кабардино-Балкарский госуниверситет, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН ; редкол.: А.А. Махнев (гл. ред.) [и др.]. – Нальчик, 2014. – С. 84–85.

13. Воробьев, Н.Н. Об одном свойстве порожденных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьёв // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2004. – № 6 (17). – С. 35-38.

14. Fischer, B Injektoren endlicher auflosbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschutz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – V. 102. – № 5. – P. 337–339.

15. Shemetkov, L.A. Multiply ω-Local Formations and Fitting Classes of Finite Groups / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba // Siberian Advances in Mathematics. – 2000. – V. 10. – № 2. – P. 112–141.