МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ «ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА»

математический факультет

кафедра алгебры и методики преподавания математики

Допущена к защите
«23» мая 2015 г.
Заведующий кафедрой
алгебры и методики
преподавания математики
________ Н.Т. Воробьев

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

КЛАССЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ КАНОНИЧЕСКИХ ПОДГРУПП

Специальность 1-31 80 03 «Математика»

10 (десять)
22.06.2015

Василевич Татьяны Борисовны

Научный руководитель:
Воробьёв Николай Тимофеевич,
заведующий кафедрой алгебры и
методики преподавания математики,
профессор, доктор физико-математических наук

Витебск, 2015

Реферат

Магистерская диссертация 31 стр., 16 использованных источников.

КЛАСС ФИТТИНГА, $\mathfrak{F}$-РАДИКАЛ, ФОРМАЦИЯ, $\mathfrak{F}$-КОРАДИКАЛ, ЛОКАЛЬНАЯ ФОРМАЦИЯ, ХОЛЛОВЫ π-ПОДГРУППЫ, $\mathfrak{F}$-НОРМАЛИЗАТОР.

Объект исследования – π-насыщенные классы Фиттинга и формации π-разрешимых групп

Цель работы – построение классов Фиттинга и формаций π-разрешимых групп, определяемых заданными свойствами холловых π-подгрупп.

Методы исследования – используются методы теории классов конечных групп.

Полученные результаты и их новизна – в данной работе построены новые семейства классов конечных π-разрешимых групп: классы Фиттинга, определяемые вложением холловых π-подгрупп в радикалы групп и формации, определяемые вложением корадикалов групп в холловы π-подгруппы, и холловых π-подгрупп в формационные нормализаторы.

Сфера применения – полученные результаты могут быть использованы в задачах изучения структуры классов Фиттинга и формаций, а также их классификации. Результаты работы можно применить при изучении структуры классов конечных групп в исследованиях, проводимых в рамках Государственной программы научных исследований «Конвергенция», выполненных в Витебском, Гомельском, Белорусском государственных университетах и Институте математики Сибирского отделения РАН, а также в написании курсовых и дипломных проектов, магистерских диссертаций.

Степень внедрения – результаты исследования выполнены в рамках задания «Развитие локальных методов исследования радикалов и классов Фиттинга и их применение в теории конечных групп» (Конвергенция 1.1.03.5), входящего в Государственную программу научных исследований на 2011 – 2015 годы «Междисциплинарные научные исследования, новые зарождающиеся технологии как основа устойчивого инновационного развития» (ГПНИ «Конвергенция»). Подпрограмма «Разработка и исследование математических методов, и их применение для решения актуальных проблем естествознания, техники, экономики и социальных наук» («Математические методы», номер госрегистрации в БелИСА – 20111880).

В настоящей работе определены следующие классы групп и доказаны утверждения:

Определение 1. *Пусть π – некоторое множество простых чисел и $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга. Обозначим через $\mathfrak{R}_\pi(\mathfrak{F})$ класс всех групп из S^π, который определяется следующим образом:*

$G \in \mathfrak{R}_\pi(\mathfrak{F})$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$-радикал группы G содержит некоторую холлову π-подгруппу G.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) класс групп $\mathfrak{R}_\pi(\mathfrak{F})$ является классом Фиттинга;

2) класс Фиттинга $\mathfrak{R}_\pi(\mathfrak{F})$ π-насыщен.

Определение 2. *Пусть π – некоторое множество простых чисел. Обозначим через $\mathfrak{R}^\pi(\mathfrak{F})$ класс всех π-разрешимых групп, который определяется следующим образом:*

$G \in \mathfrak{R}^\pi(\mathfrak{F})$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$-корадикал группы G содержится в некоторой холловой π-подгруппе группы G.

Теорема 2. *Пусть $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) класс $\mathfrak{R}^\pi(\mathfrak{F})$ является формацией;

2) формация $\mathfrak{R}^\pi(\mathfrak{F})$ π'-насыщена.

Определение 3. *Пусть $\pi \subseteq \mathbb{P}$, $\mathfrak{F}$ – локальная формация и $\sigma(\mathfrak{F})$ – множество всех различных простых делителей всех групп из $\mathfrak{F}$. Определим класс всех π-разрешимых групп $\mathcal{H}^\pi(\mathfrak{F})$ следующим образом:*

$G \in \mathcal{H}^{\pi}(\mathfrak{F})$ тогда и только тогда, когда $G \in S^{\sigma(\mathfrak{F})}\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$-нормализатор G содержит некоторую холлову π-подгруппу G.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация и π – некоторое множество простых чисел. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) класс групп $\mathcal{H}^{\pi}(\mathfrak{F})$ является формацией;

2) формация $\mathcal{H}^{\pi}(\mathfrak{F})$ π-насыщена.

Содержание

Введение

Классическим объектом в теории конечных групп являются холловы π-подгруппы. Пусть π – некоторое множество простых чисел. Холловой π-подгруппой группы G называется такая подгруппа H из G, порядок которой является π-числом, а ее индекс в G – π'-*число*, то есть индекс такой π-подгруппы не делится на простые числа из множества π [4].

Многочисленные результаты по исследованию холловых π-подгрупп базируются на фундаментальной теореме Холла [5] о том, что в любой конечной разрешимой группе существуют холловы π-подгруппы и любые две из них сопряжены. В последующем теорема Холла получила развитие в работах Чунихина [6-8], где было обобщено понятие разрешимой группы и установлена справедливость теоремы Холла для π-разрешимых групп. Напомним что, конечная группа G называется *π-разрешимой*, если каждый ее главный фактор является либо π'-группой, либо абелевой π-группой. В частности, если π – множество всех простых чисел, то π-разрешимая группа – разрешима.

Уже в 60-е годы прошлого столетия была выявлена новая роль холловых подгрупп как одного из основных инструментов, для построения новых семейств классов конечных групп. Наиболее известными своими приложениями в исследованиях групп являются классы Фиттинга и формации. *Класс групп* – это множество групп, которое вместе с каждой своей группой содержит все изоморфные ей группы. *Классом Фиттинга* называется класс групп $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$ - подгрупп. Формация – класс групп, замкнутый относительно факторгрупп и конечных подпрямых произведений.

В работах Локетта [9], Бризона [10], Хаука [11], Дерка [12], Н. Т. Воробьёва [13] и других изучались классы Фиттинга и формации конечных разрешимых групп, определяемые вложением холловых π-подгрупп в некоторые канонические подгруппы, в частности, в $\mathfrak{F}$-радикалы групп для классов Фиттинга и в $\mathfrak{F}$-проекторы групп для формаций. Известно, что если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то в каждой группе G существует наибольшая нормальная подгруппа, принадлежащая $\mathfrak{F}$. Ее называют $\mathfrak{F}$ *-радикалом* группы G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$ [4]. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация групп, то подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ группы G называется $\mathfrak{F}$ *-корадикалом* группы G, если она является пересечением всех тех нормальных подгрупп M из G, для которых G/M принадлежит $\mathfrak{F}$ [4].

Так как конечная π-разрешимая группа является разрешимой в случае, когда π – множество всех простых чисел, то актуальна задача построения классов Фиттинга и формаций π-разрешимых групп, определяемых заданными свойствами холловых π-подгрупп, в частности, вложением холловых π-подгрупп в канонические подгруппы. Реализации данной задачи и посвящена настоящая диссертация.

В первом разделе приводится ряд известных утверждений, которые мы используем для доказательства теорем.

Раздел второй настоящей работы посвящен классам Фиттинга, определяемых вложением холловых подгрупп в радикалы. В данном разделе построено новое семейство классов Фиттинга π-разрешимых групп, определяемых вложением холловых подгрупп в радикалы групп. А именно, построен класс групп $\mathfrak{R}_{\pi}(\mathfrak{F})$ и доказано, что данный класс является π-насыщенным классом Фиттинга.

Третий раздел посвящен изучению формаций, определяемых вложением корадикалов в холловы подгруппы. При этом доказано, что определенный нами класс групп $\mathfrak{R}^{\pi}(\mathfrak{F})$ является π'-насыщенной формацией.

В четвертом разделе найдено новое семейство формаций, определяемое посредством вложения холловых π-подгрупп в $\mathfrak{F}$-нормализаторы. Построен класс групп $\mathcal{H}^{\pi}(\mathfrak{F})$ и доказано, что данный класс является π-насыщенной формацией. Все рассматриваемые в работе группы конечны. В терминологии и обозначениях мы следуем монографиям [4; 14].

Список использованных источников

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Мн.: Выш. шк., 2006. – 207 с.

2. Каргаполов, М. И. Основы теории групп / М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков. – Мн.: Наука, 1978. – 263 с.

3. Шеметков, Л. А. Формации алгебраических систем / Л. А. Шеметков. – М.: Наука, 1989. – С. 1-256.

4. Doerk, K. Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York : Walter de Gruyter & Co.,1992. – P.891.

5. Hall, P. On the system normalizers of a soluble group / P. Hall. – Proc. Amer. Math. Soc., 33, № 2, 1972. – P. 337-342.

6. Чунихин, С. А. О π-свойствах конечных групп / С. А. Чунихин. – ДАН СССР, 55, № 6, 1947. – С. 481-484.

7. Чунихин, С. А. О силовских свойствах конечных групп / С. А. Чунихин. – ДАН СССР, 73, № 1, 1950. – С. 29-32.

8. Чунихин, С. А. Подгруппы конечных групп / С. А. Чунихин. – Минск: Наука и техника, 1964.

9. Lockett, P. On the theory of Fitting classes / P. Lockett. – Math. Z., 1973, Vol. 131, № 3. – P. 103 -115.

10. Brison, O. A criterion for the Hall-closure of Fitting classes / O. Brison. – Bull. Austral. Math. Soc. 1981, Vol. 3, № 3. – P. 361-365.

11. Hauck, P. Eine Bemerkung zur kleinsten normalen Fittingklasse / P. Hauck. – J. Algebra, 1978, Vol. 53. – P. 395-401.

12. Doerk, K. Uber den Rand einer Fittingklasse auflosbarer Gruppen / K. Doerk. – J. Algebra, 1978, Vol. 51, N. 4. – P. 619-630.

13. Воробьев, Н. Т. Об одном признаке локальности формационных произведений / Н. Т. Воробьев. – Матем. заметки, 1983, том 34, № 2. – С. 165-170.

14. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М.: Наука, 1978 – С. 272 .

15. Воробьев, С. Н. Об аналоге гипотезы Шеметкова для классов Фишера конечных групп / С. Н. Воробьев, Е. Н. Залесская. – Сиб. матем. журн., 2013, том 54, № 5. – С. 989-999.

16. Воробьев, Н. Т. Максимальные экраны локальных формаций / Н. Т. Воробьев. – Алгебра и логика, 1979, том 18, № 2. – С. 137-161.