МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ «ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА»

Факультет математики и информационных технологий

Кафедра алгебры и методики преподавания математики

Допущена к защите
«11» мая 2017 г.
Заведующий кафедрой
Н.Т. Воробьев

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

ЧАСТИЧНО НАСЛЕДСТВЕННЫЕ КЛАССЫ ФИТТИНГА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Специальность: 1-31 80 03 «Математика»

Атрашкевич Алеся Леонидовна,
магистрант

Научный руководитель:
Воробьев Николай Тимофеевич
заведующий кафедрой алгебры и етодики преподавания математики, доктор физико-математических наук, профессор

10 (десять)
27.06.17

Витебск, 2017

РЕФЕРАТ

Магистерская диссертация 34 с., 16 использованных источников.

КЛАСС ФИТТИНГА, КЛАСС ФИШЕРА, $\mathfrak{X}$-КЛАСС ФИШЕРА, ХАРАКТЕРИСТИКА КЛАССА ГРУПП, ФОРМАЦИЯ, ФОРМАЦИЯ ФИШЕРА, ω-ЛОКАЛЬНАЯ ФОРМАЦИЯ, ПРОИЗВЕДЕНИЕ КЛАССОВ ФИТТИНГА

Объект исследования – $\mathfrak{X}$-классы Фишера.

Предмет исследования – свойства произведений $\mathfrak{X}$-классов Фишера и формаций Фишера.

Цель работы – построение алгебры $\mathfrak{X}$-классов Фишера и характеризация формаций Фишера.

Методы исследования – используются методы теории конечных групп и их классов. В частности, методы теории классов Фиттинга.

Элементы новизны – получено обобщение понятия класса Фишера и изучены свойства произведений обобщенных классов Фишера, а также установлен критерий характеризации таких классов посредствам формаций.

Полученные результаты и их актуальность – все полученные в работе результаты являются новыми. В ней обобщается понятие класса Фишера и изучаются произведения обобщенных классов Фишера, а также необходимое и достаточное условия, при которых формации являются обобщенными классами Фишера.

Сфера применения –.работа выполнена в рамках задания ГПНИ «Конвергенция – 2020» (№ гос. регистр. 20160350). Полученные результаты о свойствах $\mathfrak{X}$-классов Фишера могут быть использованы для изучения структуры и классификации частично наследственных классов групп, а также при написании курсовых и дипломных работ.

Степень внедрения – подтверждается актом о внедрении результатов в учебный процесс.

Основные результаты работы – теорема 3.1 и теорема 4.4.

Теорема 3.1. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– нильпотентная формация Фиттинга. Произведение* $\mathfrak{X}$*-классов Фишера является* $\mathfrak{X}$*-классом Фишера.*

Теорема 4.4. *Пусть* $\emptyset \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$ *и* $\mathfrak{F}$ *– ω-локальная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если* f *–* ω*-локальный спутник* $\mathfrak{F}$ *такой, что* $f(a)$ *является* $\mathfrak{X}$*-классом Фишера для всех* $a \in \omega \cup \{\omega'\}$*, то* $\mathfrak{F}$ *–* $\mathfrak{X}$*-класс Фишера;*
2) $\mathfrak{F}$ *является* $\mathfrak{X}$*-классом Фишера тогда и только тогда, когда все значения ее канонического ω-локального спутника –* $\mathfrak{X}$*-классы Фишера.*

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Классы Фишера, как классы Фиттинга конечных разрешимых групп, замкнутые относительно произведения их силовских подгрупп на нормальные подгруппы этих групп, впервые были определены [1].

Актуальность исследований алгебры таких классов была обусловлена двумя обстоятельствами. Во-первых, как установлено Фишером [1] каждый инъектор (аналог подгрупп Силова и Холла) для класса Фишера всех конечных нильпотентных групп характеризуется тем замечательным свойством, что в любой конечной разрешимой группе это, в точности, максимальная из нильпотентных подгрупп, содержащая радикал Фиттинга. Во-вторых, благодаря применению таких классов [1], в каждой конечной разрешимой был выделен новый класс сопряженных подгрупп, которые в последующем стали называть подгруппами Фишера.

В последующем многочисленные приложения классов Фишера подтверждает серия глубоких содержательных результатов, связанных с описанием структуры классов конечных разрешимых групп и строением канонических подгрупп, которые были получены Локеттом [2], Дерком , Хоуксом [3], Андерсеном [4], Хауком [5]. Вместе с тем, алгебра таких классов без условия разрешимости групп остаётся малоисследованной. Кроме того,ввиду известной теоремы Холла-Чунихина [6] естественно и расширение самого понятия класса Фишера, как класса конечных групп, замкнутого относительно произведений холловых подгрупп и нормальных подгрупп этих групп. В связи с этим задача изучения алгебры таких классов и их приложений весьма актуальна. При этом первоочередной является задача изучения произведений классов Фишера. Как установлено Локеттом [7], произведение любых двух разрешимых классов Фишера снова является классом Фишера. Этот результат был расширен [8] на случай произвольных конечных групп для обобщенных классов Фишера. В связи с этим легко формировать новые классы Фишера посредством их умножения. В частности, с помощью операций произведений классов и их пересечений можно образовывать локальные классы групп (локальные классы Фиттинга или локальные формации). Такие образования позволяют классифицировать классы Фишера посредством описания их локальных заданий, а также исследовать их свойства и приложения для изучения канонических подгрупп.

В исследованиях структуры классов и канонических подгрупп конечных групп во многих случаях определяющую роль играют формации Фиттинга – классы групп, которые одновременно являютс я формациями и классами Фиттинга (см., например, [1, теорема 3.1] и [2, XI.1]). Напомним, что формацией называют класс групп $\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений, а классом Фиттинга – класс групп $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Уже в 60-е годы прошлого столетия Фишер [3], а позднее, Хартли [4] и Хоукс [5], исследуя задачу дуализации теории формаций , использовали для этих целей классы конечных разрешимых групп G, замкнутые относительно подгрупп вида PN, где P и N – силовская p-подгруппа и нормальная подгруппа G соотвественно. В последующем такие классы групп стали называть классами Фишера [4]. Примечателен тот факт, что многие известные классы групп (в частности, ввиду теоремы Брайса-Косси [6], все разрешимые наследственные классы Фиттинга) являются одновременно классами Фишера и локальными формациями. Более того, взаимосвязь между классами Фишера и локальными формациями была обусловлена следующими обстоятельствами. Во-первых, как показано в [2, IX, теорема 3.6 (b)], локальная формация $\mathfrak{F}$ является классом Фишера в точности тогда, когда все значения ее канонического локального спутника F являются классами Фишера. Во-вторых, Хоуксом [6] (см. также [2, IX, теорема 3.5]) была получена изящная характеризация классов Фишера $\mathfrak{F}$ посредством оператора замыкания, определяемого свойством субнормальности $\mathfrak{N}$-корадикалов $\mathfrak{F}$-групп, где $\mathfrak{N}$ – формация всех нильпотентных групп.

В настоящей работе, используя концепцию частичной локализации, предложенную Л. А. Шеметковым и А. Н. Скибой [7], мы расширяем первый из указанных выше результатов на случай частично локальных формаций, которые являются $\mathfrak{X}$-классами Фишера, где $\mathfrak{X}$ – нильпотентная формация Фиттинга. В частности, доказано (теорема 4.4), что ω-локальная формация является $\mathfrak{X}$-классом Фишера тогда и только тогда, когда все значения ее канонического ω-локального спутника $\mathfrak{X}$-классы Фишера.

Основная цель работы – изучение произведений обобщенно наследственных классов Фиттинга ($\mathfrak{X}$-классов Фишера), а также таких $\mathfrak{X}$-классов Фишера, которые одновременно являются формациями.

Основные результаты работы представлены двумя теоремами.

Первая из них – теорема о том, что если $\mathfrak{X}$ – нильпотентная формация Фиттинга, то произведение $\mathfrak{X}$-классов Фишера является $\mathfrak{X}$-классом Фишера.

Вторая устанавливает, что если $\emptyset \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$ и $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, то справедливы следующие утверждения:

(1) если f – ω-локальный спутник $\mathfrak{F}$ такой, что $f(a)$ является $\mathfrak{X}$-классом Фишера для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$, то $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{X}$-класс Фишера;

(2) $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{X}$-классом Фишера тогда и только тогда, когда все значения ее канонического ω-локального спутника – $\mathfrak{X}$-классы Фишера.

В частности, когда $\omega = \mathbb{P}$ и $\mathfrak{X}=\mathfrak{N}$, получаем, что локальная формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{X}$-классом Фишера тогда и только тогда, когда все значения ее канонического локального спутника являются $\mathfrak{X}$-классами Фишера.

Остановимся на обзоре содержания работы по разделам.

Первый раздел носит вспомогательный характер. В нем приводится ряд известных результатов, необходимых нам в дальнейшем.

Классом Фишера [9] называют класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ конечных групп N, удовлетворяющих условию: если $G \in \mathfrak{F}$ и H – подгруппа группы G, содержащая нормальную подгруппу N группы G такую, что H/N является p-группой (p – некоторое простое число), то $H \in \mathfrak{F}$.

В настоящей работе мы расширяем понятие класса Фишера, используя для этой цели нильпотентные формации Фиттинга. Формацию Фишера $\mathfrak{F}$ назовём нильпотентной, если $\mathfrak{F}$ состоит из нильпотентных групп.

Определение. Пусть $\mathfrak{X}$ – нильпотентная формация Фиттинга. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется $\mathfrak{X}$-классом Фишера, если из условия $G \in \mathfrak{F}$, $K \lhd G$, $K \subseteq H \subseteq G$ и $H / K \in \mathfrak{X}$, всегда следует, что $H \in \mathfrak{F}$.

Второй раздел посвящен исследованию $\mathfrak{X}$-классов Фишера и их свойств. В частности, описаны свойства характеристики $\mathfrak{X}$-класса Фишера.

В третьем разделе описаны произведения $\mathfrak{X}$-классов Фишера.

В четвертом разделе описываются классы Фишера, которые одновременно являются формациями, а также доказан основной результат работы.

В работе рассматриваются только конечные группы, если не оговорено противное. В терминологии и обозначениях мы следуем [1, 2]. Основные результаты работы опубликованы в [13]. Работа выполнена в рамках задания 1.1.03 ГПНИ «Конвергенция – 2020».

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ:

1. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков –М.: Наука, 1978.- 272 с.
2. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. - Berlin - New York: Walter de Gruyter, 1992. - 891 p.
3. Fischer, B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflosbaren Gruppen. / B. Fischer. –Habilitationschrift. Universitat Frankfurt (M). -1966.
4. Hartley, B. On Fischer's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. - 1969. - Vol. 3, №2. - P. 193-207.
5. Hawkes T. O. // Proc. Math. Cambridge Philos. 1976. Soc. 80. P. 437-446.
6. Воробьев, С. Н. О формациях Фишера конечных групп / С. Н. Воробьев // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-матэм. Навук. – 2011.–№2. – С. 43-49
7. Скиба, А. Н. Кратко –локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков // Матем. труды.– 1999.–Т. 2, №2.–С. 114 – 147.
8. Ведерников, В. А. ω-Веерные формации и классы Фиттинга конечных групп / В. А. Ведерников, М. М. Сорокина // Матем. заметки. – 2002. – Т. 71, вып. 1.– С. 43-60.
9. Воробьев, Н. Т. О произведении $\mathfrak{X}$-классов Фишера / Н. Т. Воробьев, А. Л. Атрашкевич // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. – 2016.–№3(92). – С. 5-9.
10. Bryce R. A., Cossey J. // Math. Z. 1972. Bd. 127, N 3. S. 217-223.
11. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. –Мн.: Вышэйшая школа, 2006.–207 с.
12. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht : Springer, 2006. – 385 p. – (Mathematics and Its Applications ; vol. 584).
13. С. Н. Воробьев, Атрашкевич, А. Л.. О характеризации формаций Фишера / С.Н. Воробьев , А.Л. Атрашкевич // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. – 2017 (принята к печати).

14. Атрашкевич, А.Л. Частично наследственные формации и их характеризация / А.Л. Атрашкевич, // Молодость. Интеллект. Инициатива: материалы V междунар. науч.-практ. конф. студ. и магистр., Витебск, 21 апреля 2017 г. / Вит. гос. ун-т; редкол.: И.М. Прищепа [и др.]. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2017. – С. 11-12.

15. Атрашкевич, А.Л. О произведении $\mathfrak{X}$ -классов Фишера / А.Л. Атрашкевич, // $\underline{\overline{\text{X}}}$ Машеровские чтения, Витебск, 14 октября 2016 г. / Вит. гос. ун-т; редкол.: И.М. Прищепа [и др.]. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2016. – С. 8-9.

16. Atrashkevich, A.L. On $\mathfrak{X}$-local Fischer formations / A.L. Atrashkevich, //The youth of the 21st. century: education, science, innovations, 6 december, 2016 / Vitebsk State P.M. Masherov University; Editorial Board: I.M. Prishchepa, I.A. Krasovskaya, A.N. Dudarev, M.L. Dorofeyenko, G.V. Razboeva – S. 8-9.