Министерство образования Республики Беларусь
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА»
(ВГУ ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА)

УДК 512.542
Рег.№ 20160350

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по научной работе
ВГУ имени П.М. Машерова,
доктор педагогических наук,
профессор
______________ Е.Я. Аршанский
___________________ 2021 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

Методы локализации и теории решеток в исследовании строения конечных групп и их классов

(заключительный)

ГПНИ «Конвергенция-2020»

Руководитель НИР,
заведующий кафедрой алгебры и
методики преподавания математики,
доктор физико-математических наук,
профессор _______________ Н.Т. Воробьёв

Витебск 2021

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы,
заведующий кафедрой алгебры и
методики преподавания математики,
доктор физ.-матем. наук,
профессор _______________________ Н.Т. Воробьёв
(введение, разделы 1, 2, 5, заключение)

Отв. исполнитель,
профессор кафедры алгебры и
методики преподавания математики,
доктор физ.-матем. наук,
доцент _______________________ Н.Н. Воробьёв
(введение, раздел 4, заключение)

Исполнители:
Декан факультета математики и
информационных технологий,
кандидат физ.-матем. наук,
доцент _______________________ Е.Н. Залесская
(раздел 3)

Заведующий кафедрой
информатики и информационных
технологий
кандидат физ.-матем. наук _______________________ Е.А. Витько
(раздел 5)

Доцент кафедры алгебры и
методики преподавания математики,
кандидат физ.-матем. наук,
доцент _______________________ С.Н. Воробьёв
(раздел 5)

Доцент кафедры алгебры и
методики преподавания математики,
кандидат физ.-матем. наук _______________________ А.П. Мехович
(раздел 4)

Преподаватель кафедры
прикладного и системного
программирования,
кандидат физ.-матем. наук _______________________ А.В. Марцинкевич
(раздел 3)

Преподаватель кафедры
алгебры и методики
преподавания математики _______________________ Т.Б. Караулова
(разделы 1, 2)

Аспирант кафедры
алгебры и методики
преподавания математики ______________________ Е.Д. Ланцетова
(раздел 4)

Аспирант кафедры алгебры и методики
преподавания математики ______________________ И.И. Стаселько
(раздел 4)

Нормоконтроль ______________________ Т.В. Харкевич

РЕФЕРАТ

Отчет 56 с., 1 кн., 78 источн.

КЛАСС И МНОЖЕСТВО ФИТТИНГА, ФОРМАЦИЯ, ФУНКЦИЯ ХАРТЛИ, ФИШЕРА, РЕШЕТКА ФОРМАЦИЙ И КЛАССОВ ФИТТИНГА

Объектом исследования являются алгебры радикальных и корадикальных классов конечных групп и их решетки.

Цель работы – разработка новых локальных и решеточных методов исследования подгруппового строения конечных групп и их классов.

В результате исследования: описаны общие методы построения локальных фиттинговых множеств конечной группы и на их основе найдены новые канонические системы подгрупп; развит метод локализации в теории нормальных классов Фиттинга и выявлены новые свойства решеток, в частности, решена проблема Дёрка–Хоукса (1992 г.) о полноте решетки локально нормальных классов Фишера; описаны тождества решеток и компактные элементы классов Фиттинга и формаций.

Степень внедрения – полученные результаты использовались в учебном процессе ВГУ имени П.М. Машерова при чтении специальных курсов по теории групп и их классов для студентов и магистрантов математических специальностей, а также при написании курсовых и дипломных проектов, магистерских и кандидатских диссертаций. Отдельные результаты по исследованию подгрупповой структуры групп нашли применение в академических центрах Китая. Все полученные результаты являются новыми: впервые в мировой практике построены локальные множества Фиттинга конечной группы и описано строение инъекторов в терминах радикалов групп; развитие локальных методов в теории нормальных классов Фиттинга и формаций явилось основой для нахождения новых семейств решеток классов Фиттинга и формаций.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Краеугольным камнем теории конечных групп является теорема *Силова (1872 г.) о том, что если порядок группы G равен $p^{\alpha}m$, где p – простое число, а m не делится на p, то в G существует по крайней мере одна подгруппа порядка p^{α}* (так называемая силовская p-подгруппа) и *любые две силовские p-подгруппы сопряжены.* В рамках этой теории получение теорем силовского типа сформировалось в большое самостоятельное направление, крупный вклад в развитие которого внесли в разрешимом случае *Ф. Холл* [1] и π-разрешимом – *С.А. Чунихин* [2] (π – некоторое множество простых чисел). Ими установлено, что *любая конечная π-разрешимая группа* [2] (*в частности, конечная разрешимая группа* [1]) *обладает холловыми π-подгруппами и любые две холловы π-подгруппы сопряжены.* Напомним, что подгруппу H группы G называют *холловой π-подгруппой*, если порядок H является π-числом, а ее индекс в G – π'–числом, где π' – дополнение множества π во множестве всех простых чисел. Примечателен тот факт, что все указанные выше результаты базировались лишь на арифметических свойствах групп, т.е. на свойствах их порядков. В 60-е годы прошлого столетия был найден оригинальный неарифметический метод развития силовской теории: используя метод локализации изучения конечных разрешимых групп, *Гашюцом* [3], *Гашюцом, Фишером и Хартли* [4], *Хартли* [5] было получено обобщение фундаментальных теорем Силова и Холла в терминах локальных формаций и классов Фиттинга. В [4] установлено, что если F – класс Фиттинга, то любая конечная разрешимая группа обладает F-инъектором и любые два F-инъектора сопряжены. Напомним, что класс групп F называют классом Фиттинга. если F замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных подгрупп из F. При этом F-инъектором группы G называют её подгруппу V такую, что $V \cap N$ является максимальной из подгрупп N, принадлежащих F

для любой субнормальной подгруппы N группы G. Заметим, что если $\mathfrak{F}$ – класс всех π-групп (в частности, $\mathfrak{F}$ – класс всех р-групп), то $\mathfrak{F}$-инъектор группы – это ее холлова π-подгруппа (в частности, силовская р-подгруппа). Поэтому из теоремы Гашюца–Фишера–Хартли [4] следуют теорема Холла и теорема Силова в разрешимом случае.

Дальнейший прогресс в развитии силовской теории был достигнут в разрешимом случае и частично разрешимом в работах В. Андерсона [6] и Л.А. Шеметкова [7], где было определено *радикальное множество* (*фиттингово множество*) группы, как непустое множество ее подгрупп, замкнутое относительно взятия нормальных подгрупп, произведений нормальных подгрупп и сопряжений подгрупп элементами группы. Более того, Л.А. Шеметковым [7] был доказан аналог теоремы Гашюца – Фишера – Хартли для множества Фиттинга $\mathcal{F}$ π-разрешимой группы в случае, когда множество π – множество всех простых делителей всех подгрупп из $\mathcal{F}$. В связи с этим *актуальна задача разработки локальных методов построения фиттингова множества конечной группы, т.е. локальных радикальных множеств группы и нахождения новых канонических классов сопряженных инъекторов в этой группе* (*в частности, π-разрешимой группе без ограничений на* π). Перспективность такой задачи подтверждает работа [8] и тот факт, что множество всех $\mathfrak{F}$-инъекторов группы для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ совпадает со множеством всех $\mathcal{F}$ –инъекторов этой группы для специального случая ее множества Фиттинга $\mathcal{F}$, т.е. если $\mathcal{F}$ – множество всех подгрупп G из класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Второй круг вопросов, представляющих интерес, связан с, так называемыми, *нормальными классами Фиттинга*, т.е. такими классами Фиттинга $\mathfrak{F}$, для которых $\mathfrak{F}$-инъекторы являются нормальными подгруппами в любой конечной разрешимой группе. Интерес к данному направлению исследований обусловлен, прежде всего, основополагающими результатами *Блессеноля – Гашюца* [9] и *Лауша* [10], где установлено, что *решетка всех* *разрешимых нормальных классов Фиттинга является полной, модулярной, атомарной и изоморфна решетке подгрупп некоторой бесконечной абелевой группы* (так называемой *группы Лауша*). Понятие нормального класса Фиттинга допускает естественную локализацию. Класс Фиттинга F называют *нормальным в инъективном классе Фиттинга* X (группы из X обладают F-инъектором) или просто *локально нормальным* (см. X.3 [11]), если F – подкласс X и для любой группы G из X каждый F-инъектор G нормален в G. Ориентиром для исследований решетки локально нормальных классов служит также *проблема Дерка – Хоукса о полноте решетки* X*-нормальных классов Фиттинга* для случая, когда X – идемпотентный класс Фиттинга (см. [11], стр. 716). Все это приводит *к задаче развития метода локализации в теории нормальных классов Фиттинга* (*в общем случае неразрешимых*) *и изучения свойств решетки всех локально нормальных классов Фиттинга, в частности, решения вопроса о полноте решетки этих классов.*

Заметим, что нормальные классы Фиттинга ранее нашли эффективное применение для описания факторизаций локальных классов Фиттинга и описания структуры классов Фиттинга во многих работах (см., например, [12], [13]).

Задачи изучения решеток радикальных классов, т.е. классов Фиттинга тесно переплетаются с задачами изучения решеток корадикальных классов: формаций. В этом направлении исследований значительный прогресс был достигнут А.Н. Скибой, что нашло отражение в его монографии [14].

Примечателен тот факт, что значительное место для решения задачи классификации формаций и описания их факторизаций занимают вопросы изучения взаимосвязи тождеств решеток формаций и вложения формаций и произведений формаций в компактные элементы решеток формаций. В этом направлении исследований в 2000-2015 годы получены многочисленные результаты А.Н. Скибой, Го Вэньбинем, В.М. Селькиным, А. Баллестером-Болинше, Л.А. Шеметковым, Н.Н. Воробьёвым, А.А Царевым и др (см., например, [15]–[17]). При этом важными для дальнейших исследований

5.4.3 Теорема [78]. *Пусть* $\mathfrak{F} = SLF(f)$ *для некоторого локального спутника f такого, что* $\mathfrak{N}_p f(p) = f(p)$ *для всех* $p \in \mathrm{Supp}\,(f)$. *Тогда формация* $\mathfrak{F}$ *определяется локальным спутником* f°, *все непустые значения которого являются формациями Локетта, т.е.* $\mathfrak{F} = SLF\left(f^{\circ}\right)$.

5.4.4 Следствие [78]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– локальный класс Фиттинга, определяемый H-функцией F такой, что* $F(p)\mathfrak{N}_p = F(p) \subseteq \mathfrak{F}$ *для всех* $p \in \mathbb{P}$. *Если* $\mathfrak{F}$ *– формация Локетта, то все непустые значения H-функции F являются одновременно формациями и классами Локетта.*

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Hall P. A note on soluble groups // J. London Math. Soc. – 1928. – Vol. 3. – P. 98–105.

2. Чунихин С.А. Подгруппы конечных подгрупп. – Минск: Наука и техника, 1964. – 168 с.

3. Gaschütz W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z. – 1963. – Bd. 80. –S. 300–305.

4. Fischer B., Gaschütz W., Hartley B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen // Math. Z. – 1967. – Bd. 102, № 5. – S. 337–339.

5. Hartley B. On Fischer's dualization of formation theory // Proc. London Math Soc. – 1969. – Vol. 19. – P. 193–207.

6. Anderson W. Injectors in finite solvable groups // J. Algebra. – 1975. – Vol. 36. – P. 333–338.

7. Шеметков Л.А. О подгруппах π-разрешимых групп // Конечные группы : сб. – Минск : Наука и техника, 1975. – С. 207–212.

8. Воробьёв Н.Т., Семенов М.Г. Инъекторы во множестве Фиттинга конечной группы // Матем. заметки. – 2015. – Т. 97, № 4. – С. 516–528.

9. Blessenohl D, Gaschütz W. Über normale Schunk- und Fittingklassen // Math. Z. – 1970. – Bd. 118, № 1. – S. 1-8.

10. Lausch H. On normal Fitting classes // Math. Z. – 1973. – Vol. 130. – P. 67–72.

11. Doerk K., Hawkes T. Finite Soluble Groups. – Berlin – New York : Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p.

12. Vorob'ev N.T., Nanying Yang, Webin Guo. Factorizations of Fitting classes // Front. Math. China. – 2012. – Vol. 7(5). – P. 43–54.

13. Vorob'ev N.T., Guo Wenbin. On Lockett Pairs and Lockett Conjecture for π-solvable Fitting classes // Bull. Malayas. Math. Sci. Soe. – 2013. – Vol. 36. –

P. 825–832.

14. Скиба А.Н. Алгебра формаций. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.

15. Vorob’ev N.N. On factorizations of subformations of one-generated saturated varieties // Comm. Algebra. – 2013. – Vol. 41, № 3. – P. 1087–1093.

16. Vorob’ev N.N., Skiba A.N. On the lattices of saturated and solubly saturated formations of finite groups // Southeast Asian Bulletin of Mathematics. – 2013. – Vol. 37, № 5. – P. 771–780.

17. Vorob’ev N.N., Tsarev A.A. On a question of the theory of partially composition formations // Algebra Colloquium. – 2014. – Vol. 22, № 3. – P. 437–447.

18. Yang N., Guo W., Vorob’ev N.T. On F-injectors of Fitting set of a finite group // Communications in Algebra. – 2018. – Vol. 46, № 1. – P. 217–229.

19. Hauck P., Zahursky V.N. A characterization of dominant local Fitting classes // Journal of Algebra. – 2012. – Vol. 358. – P. 27–32.

20. Василевич Т.Б. Локальные множества Фиттинга и инъекторы конечной группы // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2018. – №3. – С. 29–37.

21. Воробьев Н.Т., Караулова Т.Б. Множества Хартли и инъекторы конечной группы // Мат. заметки. – 2019. – Т. 105, № 2. – С. 214–227.

22. Сементовский В.Г. Признак существования и сопряженности инъекторов конечных π-разрешимых групп // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2001. – Т. 21, № 3. – С. 90–94.

23. Guo W. The Theory of Classes of Groups // Beijing; New York; Dordrecht; Boston; London : Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000. – 258 p.

24. Ballester-Bolinches A. Classes of Finite Groups – Dordrecht : Springer, 2006. – 385 p.

25. D′Arcy P. Locally defined Fitting classes // J. Austral. Math. Soc. (Series A). – 1975. – Vol. 20. – P. 25–32.

26. Vorob`ev N.T., Yin X., Yang N. On the problem of existence and conjugacy of injectors of partially π-soluble groups // Siberian Math. J. – 2018. – Vol.59, №3. – P. 420–426.

27. Vorob'ev N.T., Yang N., Vasilevich T.B. On Injectors of a Hartley Set of a Finite Group // Algebra Colloquium. – 2018. – №4 (25). – P. 671–680.

28. Fischer B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen // B. Habilitationsschrift, Universität Frankfurt. – 1966.

29. Schnackenberg F.R. Injectors of finite groups // J. Algebra. – 1974. – Vol. 30. – P. 548–558.

30. Dark R. Some examples in the theory of injectors of finite soluble groups // Math. Z. – 1972. – Vol. 127. – P. 145–156.

31. Караулова Т.Б. Инъекторы и подгруппы Фишера конечных π-разрешимых групп // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 2. – С. 12–17.

32. D′Aniello A. Dualpronormality and Fitting classes // Comm. Algebra. – 1998. – Vol. 26, № 2. – P. 425– 433.

33. P′erez-Ramos M.D. On A-normality, strong normality and F-dual pronormal subgroups in Fitting classes // Journal of Group Theory. – 2000. – № 3. – P. 127–145.

34. Караулова Т.Б. Дуально пронормальные подгруппы и подгруппы Фишера // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2019. – № 3. – С. 23–28.

35. Марцинкевич, А.В. Произведения и объединения локально нормальных классов Фиттинга / А.В. Марцинкевич, Н.Т. Воробьев // Труды Института математики и механики УрОРАН. – 2018. – Т.24, №2. – С. 152–157.

36. Cossey J. Products of Fitting classes // Math. Z. – 1975. – Bd. 141, № 3. – S. 289–295.

37. Cusack E. The join of two Fitting classes // Math. Z. – 1979. – Bd. 167,

№ 1. – S. 37–47.

38. Hauck P. On products of Fitting classes // J. London Math. Soc. – 1979. – Vol. 20, № 2. – P. 423–434.

39. Lockett, F. P. The Fitting class F*/ F. P. Lockett // Math. Z. – 1974. – Bd. 137, № 2. – S. 131–136.

40. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп / Ин-т математики СО АН СССР ; сост.: В. Д. Мазуров, Е. И. Хухро. – 11-е изд. – Новосибирск : Изд-во Ин-та математики СО АН СССР, 1990. – 126 с.

41. Ведерников В.А. О локальных формациях конечных групп // Матем. заметки. – 1989. – Т. 46, № 6. – С. 32–37.

42. Воробьёв Н.Т., Скиба А.Н. Локальные произведения нелокальных классов Фиттинга // Вопросы алгебры : сб. / Гомел. гос. ун-т им. Ф. Скорины; редкол.: Л.А. Шеметков [и др.]. – Гомель : Изд-во Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины, 1995. – Вып. 8. – С. 55–58.

43. Hauck P. Zur Theorie der Fittingklassen endlicher auflösbarer Gruppen : Diss. ... Doctor der Naturwissenschaften – Mainz, 1977. – 153 S.

44. Makan A.R. Fitting classes with the wreath product property are normal // J. London Math. Soc. – 1974. – Vol. 8, № 2. – P. 245–246.

45. Laue H. Über nichtauflösbare normale Fittingklassen // J. Algebra. – 1977. – Vol. 45. – P. 274–283.

46. Марцинкевич А.В. Квазинормальные классы Фиттинга конечных групп // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2019. – № 2. – С. 18–26.

47. Bryce R.A., Cossey J. A problem in the Theory of Normal Fitting Classes // Math. Z. – 1975. – Bd. 141, № 2. – S. 99–110.

48. Beidleman J.C., Hauck P. Über Fittingklassen und die Lockett-Vermutung // Math. Z. –1979. – Bd. 167, № 2. – S. 161–167.

49. Воробьёв Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетт // Матем. заметки. – 1988. – Т. 43, № 2. – С. 161–168.

50. Berger T.R., Cossey J. An example in the theory of normal Fitting classes // Math. Z. – 1977. – Bd. 154, № 3. – S. 287–293.

51. Залесская Е.Н. Гипотеза Локетта для произведений классов Фиттинга конечных групп / Е.Н. Залесская // Веснік ВДУ. – 2016. – № 1(90) С. 5–8.

52. Марцинкевич А.В. О проблеме Дёрка-Хоукса для локально нормальных классов Фиттинга // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 90–97.

53. Shpakov V.V., Vorob'ev N.N., Vorob'ev N.T. On intersection of normal Fitting classes of finite groups // Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio Mathematical. – 2003. – Vol. 30. – P. 167–171.

54. Reifferscheid S. On the theory of Fitting classes of finite soluble groups : Diss. ... Doctor der Naturwissenschaften – Tübingen, 2001. – 131 p.

55. Yang N., Zhao Sh., Martsinkevich A.V., Vorob'ev N.T. On the sublattice of the lattice of π-normal Fitting classes // J. of Algebra and it's Application. – 2020. – Vol. 19, № 6. – P. 2050105 (10 pages).

56. Марцинкевич А.В. О решетке локально нормальных классов Фиттинга // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2019. – № 6 (117). – С. 144–149.

57. Воробьёв Н.Т., Марцинкевич А.В. Конечные π-группы с нормальными инъекторами // Сиб. мат. журн. – 2015. – Т. 56, № 4. – С. 790–797.

58. Cusack E.L. On the theory of Fitting classes of finite soluble groups // University of East Anglia, Ph. D, 1979. – 61 p.

59. Воробьев Н.Т., Ланцетова Е.Д. О решеточных свойствах классов Фиттинга // Весник ВГУ. – 2018. – №1 (98). – С. 5–10.

60. Воробьев Н.Н., Скиба А.Н. О дистрибутивности решетки разрешимых тотально локальных классов Фиттинга // Матем. заметки. – 2000. – Т. 67, № 5. – С. 662–673.

61. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Докл. НАН Беларуси. – 1999. – Т. 43, №4. – С. 5–8.

62. Мехович А.П. О решетке кратно композиционных формаций // Международная алгебраическая конференция, посвященная 110-летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша, Москва, 23-25 мая 2018 г. / Ред. В.Н. Чубариков (гл. ред.) [и др]. – Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико- математический факультет, 2018. – С. 142–143.

63. Zhang C., Safonov V.G., Skiba A.N. On *n*-multiply σ-local formations of finite groups // Comm. Algebra. – 2019. – Vol. 47, № 3. – P. 957–968.

64. Zhang C., Skiba A.N. On $\sum_{\sigma}^{i}$ –closed classes of finite groups // Ukrainian Math. J. – 2018. – Vol. 70, № 2. – P. 1707–1716.

65. Воробьев, Н.Н. Об отделимых решетках насыщенных формаций / Н.Н. Воробьев, А.Р. Кузнецова // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 4. – С. 7–9.

66. Vorob'ev N.N., Staselka I.I., Hojagulyyev A. On separability property of the lattice of multiply σ-local formations // Материалы международной конференции «Мальцевские чтения», Новосибирск, 16-20 ноября 2020 г. – с. 185.

67. Стаселько И.И. Об алгебраичности решетки σ-локальных фиттинговых множеств //XIII Машеровские чтения : материалы междунар. научно-практич. Конф. студентов, аспирантов и молодых ученых. Витебск, 18 октября 2019 года / Витеб. гос. ун-т; редкол.; И.М. Прищепа (гл. ред.) [и др.] – Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова – 2019. – С. 38.

68. Vorob'ev N.T., Guo W., Li Z. On σ-local Fitting classes // J. Algebra. – 2020. – Vol. 542, № 1. – P. 116–129.

69. Воробьев Н.Т. О наибольшей приведенной функции Хартли // Весці АН БССР. – 1991. – № 6. – С. 28–32.

70. Витько Е.А., Воробьев Н.Т. Классы Фиттинга с заданными свойствами холловых подгрупп // Наука – образованию, производству, экономике : материалы

XXI (68) Регион. науч.-практ. конференции преподавателей, науч. сотрудников и аспирантов, Витебск, 11-12 февр. 2016 г. : в 2 т. – Витебск, 2016. – Т. 1. – С. 11–12.

71. Yang N., Li B., Vorob'ev N.T. On the Dual Theory of a Result of Bryce and Cossey // J. Algebra. – 2019. – Vol. 522. – P. 124–133.

72. Doerk K, Hawkes T.O. On the residual of a direct product // Arch. Math. (Basel) – 1978. – Vol. 30. – P. 458–468.

73. Gaschütz W., Lubeseder U. Kennezeichnung gesättigter Formationen // Math. Z. – 1963. – Vol. 82, №3. – S. 198–199.

74. Schmid P. Every saturated formation is a local formation // J. Algebra. – 1978. – Vol. № 1. – P. 141–148.

75. Doerk K., Hauck P. Über Frattiniduale in endlichen Gruppen // Arch. Math. – 1980. – Vol. 35, №1. – S. 218–227.

76. Vorob’ev N.T., Zhao Sh., Yang N. On the problem of Frattini duality in the theory of Fitting classes // Ukr. Math. J. – 2019. – Vol. 71, № 7. – P. 922–929.

77. Doerk K., Hauck P. Frattini dual und Fitting Klassen endlichher auflösbaren Gruppen // J. Algebra. – 1981. – Vol. 69, № 1. – P. 402–415.

78. Guo W., Vorob`ev S.N. Formations defined by Doerk-Hawkes operation // Algebra and Its Applications. – 2018. – Vol.17, № 12.