Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра геометрии и математического анализа

Т.Л. Сурин
Ж.В. Иванова
С.В. Шерегов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Практическое пособие

Витебск
УО «ВГУ им. П.М. Машерова»
2012

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
С90

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 3 от 25.06.2012 г.

Авторы: доценты кафедры геометрии и математического анализа УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кандидаты физико-математических наук **Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова;** старший преподаватель кафедры геометрии и математического анализа УО «ВГУ им. П.М. Машерова» **С.В. Шерегов**

Рецензент:
заведующий кафедрой геометрии и математического анализа
УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кандидат физико-математических наук,
доцент *С.А. Шлапаков*

Сурин, Т.Л.
С90 Математический анализ: практическое пособие / Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова, С.В. Шерегов. – Витебск : УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2012. – 50 с.

Данное учебное издание предназначено для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов первого курса математического факультета, обучающихся по специальностям «Математика. Информатика», «Прикладная математика». Оно содержит разбор наиболее типичных примеров, демонстрирующих применение на практике результатов теории, вопросы по теоретическому материалу, задания для аудиторной и домашней работы, а также для самостоятельной работы.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное издание предназначено для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов первого курса математического факультета, обучающихся по специальностям «Математика. Информатика», «Прикладная математика».

Его основное назначение – помочь студентам математических специальностей в освоении курса математического анализа. По этой дисциплине существует ряд хороших задачников, список которых приведен в конце нашего учебного издания. Однако из-за слишком большого объема в них зачастую трудно ориентироваться и выбрать нужный материал для подготовки к экзамену. Кроме того, имеющиеся сборники задач не дают возможности индивидуализировать процесс обучения, поскольку не содержат достаточного количества однотипных задач.

Данное практическое пособие охватывает следующие разделы математического анализа: «Теория действительных чисел», «Последовательность. Предел последовательности», «Функция. Предел функции», «Непрерывность функции». Материал каждого раздела разбит на три пункта. В пункте I «Примеры решения задач» разобраны наиболее типичные примеры, демонстрирующие применение на практике результатов теории. В пункте II «Контрольные вопросы и задания» содержатся вопросы по теоретическому материалу. Цель этого раздела – помочь студенту самостоятельно разобраться в теоретическом материале, выделить наиболее важные места, без которых невозможно осмысленное решение задач. В пункте III «Практические задания» приведены задания для аудиторной и домашней работы.

В конце практического пособия приведен список задач для самостоятельной работы студентов, охватывающий все разделы данного издания и состоящий из типичных задач, предлагаемых на экзамене.

Материал, приведенный в практическом пособии, соответствует учебным программам по математическому анализу по вышеперечисленным специальностям.

Данное учебное издание может быть полезно для студентов других специальностей, изучающих высшую математику.

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ИХ СВОЙСТВА

I. Примеры решения задач

***Пример* 1.** *Определить, какие из нижеперечисленных бесконечных десятичных дробей выражают рациональные числа, какие – иррациональные, и записать рациональные числа в виде обыкновенных дробей*: *а*) 1,(28); *б*) 2,41(7); *в*)3,1(9); *г*) 0,202202220… .

Решение. Согласно правилу преобразования бесконечных десятичных периодических дробей в обыкновенные, имеем:

а) $1,(28) = 1\frac{28}{99}$;

б) $2,41(7) = 2\frac{417-41}{900} = 2\frac{376}{900} = 2\frac{94}{225}$;

в) 3,1(9) = 3,2;

г) десятичная дробь 0,202202220… – инепериодическая, следовательно, она выражается иррациональным числом.

***Пример* 2.** *Доказать, что не существует такого рационального числа, что* $r^2 = 2$.

Решение. Доказательство проведём методом от противного. Предположим, что число r рациональное. Тогда существует такая несократимая рациональная дробь $\frac{m}{n}$, где m и n – взаимно простые натуральные числа, что $r = \frac{m}{n}$. Возведем обе части данного равенства в квадрат, тогда $\frac{m^2}{n^2} = 2$ или $m^2 = 2n^2$. Значит, m – число четное: $m = 2k$ (k – натуральное число). Тогда $n^2 = 2k^2$, следовательно, n – четное число. Это противоречит предположению, что m и n – взаимно простые натуральные числа.

Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

***Пример* 3.** *Доказать, что если* r *– рациональное число* ($r \neq 0$), *а* α *– иррациональное число, то число* $r \cdot \alpha$ *– иррациональное.*

Решение. Пусть $r \cdot \alpha = \beta$. Предположим, что β рациональное число. Тогда число $\alpha = \frac{\beta}{r}$ должно быть рациональным, так как частное двух рациональных чисел есть число рациональное. Получаем противоречие. Следовательно, число β – иррациональное.

II. Контрольные вопросы и задания

1. Какие числа называются натуральными, рациональными, иррациональными, действительными?

2. Что такое обыкновенная дробь?

3. В чем состоит различие бесконечных десятичных дробей, представляющих рациональные и иррациональные числа?

4. Сформулируйте правило перевода бесконечной периодической десятичной дроби в обыкновенную.

5. Перечислите свойства рациональных чисел.

6. Дайте определение иррационального числа.

7. Сформулируйте теорему Дедекинда.

III. Практические задания

1. Записать число в виде бесконечной десятичной дроби: *а*) 3; *б*) $2\frac{1}{4}$; *в*) $\frac{17}{16}$; *г*) $1\frac{1}{7}$.

2. Какие из данных обыкновенных дробей можно записать в виде конечных десятичных дробей: *а*) $\frac{1}{25}$; *б*) $\frac{8}{33}$; *в*) $\frac{5}{26}$; *г*) $\frac{3}{14}$?

3. Записать число в виде обыкновенной дроби: *а*) 0,(354); *б*) 0,5(36); *в*) 4,15(182).

4. Укажите, какие из данных чисел являются рациональными: *а*) $\sqrt[3]{64\sqrt[3]{16}}\cdot 2^{-\frac{4}{9}}$; *б*) $(128)^{\frac{2}{3}}$; *в*) $2^{\log_8 5}$; *г*) $\sqrt{51+14\sqrt{2}}\cdot(7-\sqrt{2})$.

5. Докажите, что не существует рационального числа r такого, что: *а*) $r^2 = 3$; *б*) $r^2 = 5$; *в*) $r^3 = 3$; *г*) $r = \log_2 5$; *д*) $r = \log_3 2$.

6. Указать два иррациональных числа, таких что: *а*) их сумма рациональна; *б*) их разность рациональна; *в*) их произведение рационально.

7. Пусть r – рациональное число, α – иррациональное число. Докажите, что сумма этих чисел иррациональна.

8. Пусть α и β – иррациональные числа, $\alpha+\beta$ – рациональное число. Докажите, что числа $\alpha-\beta$, $\alpha+2\beta$ – иррациональные.

ГРАНИ ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

I. Примеры решения задач

Пример 1. *Доказать, что множество чисел* $E = \left\{\frac{n^2+1}{2n^2}, n\in N\right\}$ *ограничено. Найти точную верхнюю и точную нижнюю грани множества* (*sup E*, *inf E*).

Решение. Оценим выражение $\frac{n^2+1}{2n^2}$. Так как $\frac{n^2+1}{2n^2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$, то $\frac{1}{2} < \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \le 1$. Следовательно, множество E ограничено.

Покажем, что $inf\, E = \frac{1}{2}$. Для этого воспользуемся определением точной нижней грани множества. Покажем, что выполняются условия:

1) $\forall n \in N : \frac{n^2+1}{2n^2} \geq \frac{1}{2}$;

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in N : \frac{n^2+1}{2n^2} < \frac{1}{2} + \varepsilon$.

1) Докажем, что $\forall n \in N : \frac{n^2+1}{2n^2} \geq \frac{1}{2}$. Это равносильно неравенству $2(n^2 + 1) \geq 2n^2$. Последнее неравенство является верным для всех натуральных n, значит, первое условие доказано.

2) Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Решим неравенство $\frac{n^2+1}{2n^2} < \frac{1}{2} + \varepsilon$. Преобразуем левую часть неравенства: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} < \frac{1}{2} + \varepsilon$ или $\frac{1}{2n^2} < \varepsilon$. Отсюда получаем, что $n^2 > \frac{1}{2\varepsilon}$. При $n > \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon}}$ данное неравенство верно.

Следовательно, $inf\, E = \frac{1}{2}$.

Покажем, что $sup\, E = 1$.

1. Вначале докажем, что для всех натуральных чисел выполняется: $\frac{n^2+1}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} \leq 1$. Это неравенство равносильно неравенству $\frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{2}$ или неравенству $n^2 \geq 1$. Последнее неравенство справедливо при всех натуральных числах. Значит, число $M = 1$ является верхней гранью множества.

2. Поскольку при $n = 1$ выполняется равенство $\frac{n^2+1}{2n^2} = 1$, т.е. $1 \in E$, то число $M = 1$ является точной верхней гранью.

Пример 2. *Доказать, что множество чисел* $E = \left\{ \frac{2n^2+3}{n+1}, n \in N \right\}$ *неограничено сверху.*

Решение. Пусть M – любое действительное число. Докажем, что найдется натуральное число n такое, что будет выполняться неравенство $\frac{2n^2+3}{n+1} > M$.

Решаем данное неравенство. Получаем: $2n^2 + 3 > Mn + M$ или $2n^2 - Mn + (3 - M) > 0$. Очевидно, что данное неравенство выполняется при

$n > \dfrac{M + \sqrt{M^2 + 8M - 24}}{4}$, а это и означает, что множество E неограниченно сверху.

II. Контрольные вопросы и задания

1. Какое множество называется ограниченным сверху (снизу)?
2. Дайте определение верхней (нижней) границы множества.
3. Какое множество называется неограниченным сверху (снизу)?
4. Дайте определение неограниченного множества.
5. Докажите, что если E – ограниченное множество, то существует такое действительное число K, что для всех $x \in X$ будет выполняться неравенство $|x| \le K$.
6. Дайте определение точной верхней (нижней) грани множества.
7. Докажите единственность точных границ.
8. Покажите, что точная верхняя (нижняя) граница множества может как принадлежать данному множеству, так и не принадлежать.
9. Сформулируйте теорему о существовании у ограниченного сверху (снизу) множества точной верхней (нижней) грани.

III. Практические задания

1. Доказать, что следующие множества являются ограниченными. Найти точные нижние и точные верхние грани этих множеств:

а) $E = (-2; 3]$; *б*) $E = \left\{\dfrac{2}{n+1}, n \in N\right\}$;

в) $E = \left\{\dfrac{2n-1}{n^2+4}, n \in N\right\}$; *г*) $E = \left\{3 + \dfrac{1}{n+5}, n \in N\right\}$.

2. Выяснить, какие из нижеследующих числовых множеств ограничены сверху, какие ограничены снизу, какие не ограничены. Найти точные верхние и нижние грани для ограниченных множеств.

а) множество действительных чисел, принадлежащих отрезку $[-1; 2]$, интервалу $[-1; 2)$, полупрямой $(-\infty; 2]$, полупрямой $(2; +\infty)$.

б) множество рациональных чисел $r = \dfrac{p}{q}$, для которых $0 < p < q$;

в) множество рациональных чисел $r = \dfrac{p}{q}$, для которых $0 < q < p$;

г) множество иррациональных чисел, лежащих на отрезке $[-1; 2]$;

д) множество чисел вида $\left\{\dfrac{2n}{3n-5}, n \in N\right\}$;

е) множество чисел вида $\left\{\dfrac{n^2+1}{2n-1}, n \in N\right\}$;

ж) множество чисел вида $\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}, n\in N\right\}$;

з) множество чисел вида $\left\{1+\frac{(-1)^n}{3n}, n\in N\right\}$.

3. Пусть $X=\{x: x\in Q, x^2<2\}$. Доказать, что множество X не имеет ни наименьшего, ни наибольшего элемента. Найти $sup\, X$ и $inf\, X$.

4. Пусть $X\subset R$ и $-X=\{x: -x\in X\}$. Доказать, что $sup\,(-X) = -\,inf\, X$, $inf\,(-X) = -\,sup\, X$.

МОДУЛЬ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА

I. Примеры решения задач

Пример 1. *Решить неравенство* $|2x+1|\le 1+|x-3|$, *исходя из определения модуля действительного числа и геометрически.*

Решение. Неравенство, содержащее знак модуля, решается, как правило, методом «перебора». Находим те значения x, при которых выражения под знаком модуля равны нулю. $2x+1=0$ при $x=-1/2$, $x-3=0$ при $x=3$. Точки $-1/2$ и 3 разбивают числовую ось на промежутки, на каждом из которых выражения под знаком модуля имеют постоянный, легко определяемый знак (рис. 1). Это позволяет на каждом из промежутков раскрыть модули, используя определение модуля.

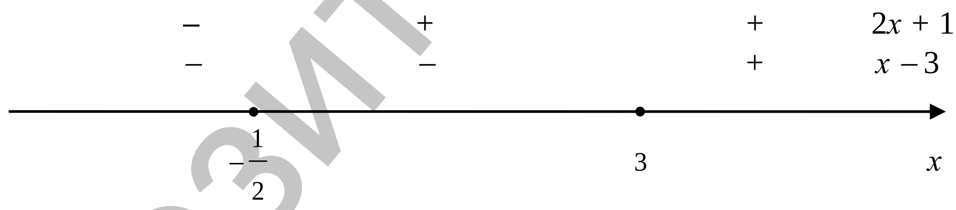

Рис. 1.

1. Будем искать решение неравенства на промежутке $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$.

Здесь $2x+1\le 0$, следовательно, $|2x+1| = -(2x+1) = -2x-1$; $x-3<0$, следовательно, $|x-3| = -(x-3) = -x+3$. Неравенство примет вид $-2x-1\le 1-x+3$, откуда $x\ge -5$. Получаем решение, являющееся пересечением промежутков $[-5, +\infty)$ и $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$, т.е. промежуток $\left[-5, -\frac{1}{2}\right]$.

2. Пусть $x\in\left(-\frac{1}{2},\ 3\right]$. Здесь $2x+1>0$, $x-3\le 0$. Неравенство имеет вид $2x+1\le 1-x+3$, откуда $x\le 1$. Так как $x\in\left(-\frac{1}{2},\ 3\right]$, то решением не-

равенства является пересечение промежутков $\left(-\frac{1}{2},\ 3\right]$ и $(-\infty,\ 1]$, т.е. промежуток $\left(-\frac{1}{2},\ 1\right]$.

3. Пусть $x \in (3,+\infty)$. На этом промежутке $2x + 1 > 0,\ x - 3 > 0$. Имеем неравенство $2x + 1 \le 1 + x - 3$, откуда $x \le -3$. На рассматриваемом промежутке таких значений x нет.

Ответ мы получим, объединяя найденные решения:

$$\left[-5, -\frac{1}{2}\right] \cup \left(-\frac{1}{2},\ 1\right] = [-5,\ 1].$$

Геометрическое решение неравенства $|2x+1| \le 1+|x-3|$ получим, построив в одной и той же системе координат графики функций, образующих левую и правую части неравенства:

а) $y=|2x+1|$. График этой функции можно получить из графика функции $y = 2x + 1$, отобразив лежащую под осью OX часть графика симметрично относительно оси OX.

б) $y=1+|x-3|$. Строим график функции $y = |x-3|$ подобно тому, как было указано выше, и поднимаем его на единицу вверх.

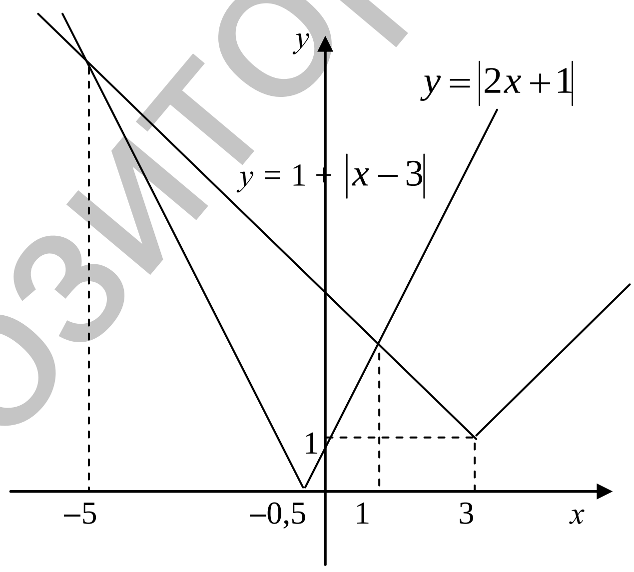

Рис. 2

Из рисунка 2 видно, что графики пересекаются в точках –5 и 1 и что на интервале (–5, 1) график функции $y = |2x+1|$ расположен ниже графика функции $y = 1+|x-3|$. Неравенство $|2x+1| \le 1+|x-3|$ выполняется на отрезке [–5, 1].

Пример 2. *Решить уравнение* $|2x+1| = |3-8x|$.

Решение. Уравнение вида $|f(x)| = |g(x)|$ равносильно уравнению $(f(x))^2 = (g(x))^2$ или совокупности двух уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$

Тогда $|2x+1| = |3-8x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1 = 3-8x, \\ 2x+1 = 8x-3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 10x = 2, \\ 6x = 4; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1/5, \\ x = 2/3. \end{array}\right.$

Корнями уравнения являются числа $x_1 = \dfrac{1}{5}$ и $x_2 = \dfrac{2}{3}$.

II. Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение модуля (абсолютной величины) действительного числа.
2. Перечислите свойства абсолютной величины действительного числа.
3. Докажите, что при $a > 0$ неравенство $|x| \le a$ равносильно неравенству $-a \le x \le a$.
4. Докажите, что при $a > 0$ неравенство $|x| \ge a$ равносильно совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} x \ge a, \\ x \le -a. \end{array}\right.$

III. Практические задания

1. Решите уравнения:

а) $|x^2 + 4x - 3| = 2;$ *б*) $|2x+3| = x^2;$

в) $|\sin x| = \sin x + 2;$ *г*) $|x^2 + 4x - 3| = x^2 + 4x - 3;$

д) $|x^2 + 3x| = |x^2 + 2x + 5| + |x - 5|;$ *е*) $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = \dfrac{x-1}{x+1};$

ж) $|x^2 - 6| = |2 - x^2|;$ *з*) $|x-4| + 2|x+1| = 3x + 5;$

и) $|x^2 + 2x - 3| + |x| = 3;$ *к*) $|||x-1| + 2| - 1| + 1| = x.$

2. Решите неравенства:

а) $|2x - 12| \le 17;$ *б*) $|x^2 - 5| > 2;$

в) $|x^2 - 3x + 2| > 2x - x^2;$ *г*) $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3;$

д) $|x^2 - 2x - 3| > x^2 - 2x - 3;$ *е*) $\left|\dfrac{3}{2x-7}\right| < \dfrac{6}{|x+4|};$

ж) $|x^2 - 9| \ge |x^2 - 2x - 3|;$ *з*) $||x| - 1| > |x|;$

и) $|x+2| + |x-2| \ge 12;$ *к*) $|x+2| + |x+3| \ge |x+4|;$

л) $\left|\dfrac{x^2+5x+8}{6+x}\right|<3-x;$ *м*) $\left|2x^2-|x|-10\right|>\left|x^2-8|x|-22\right|.$

ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ. БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ И БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

I. Примеры решения задач

Пример 1. *Для числовых последовательностей*

1) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\} \equiv 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots .$

2) $\{1+(-1)^n\} \equiv 0, 2, 0, 2, \ldots .$

3) $\{n\} \equiv 1, 2, 3, \ldots .$

определить, какие из этих последовательностей являются а) возрастающими, б) убывающими, в) ограниченными сверху, г) ограниченными снизу, д) ограничеенными.

Решение. 1) Для последовательности $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$: $x_n = \dfrac{1}{n}$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$.

Так как для всех натуральных n выполняется неравенство $\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1}$, то, $x_n > x_{n+1}$. Следовательно, по определению убывающей последовательности, эта последовательность является убывающей.

Так как для любого элемента последовательности выполняются неравенства $x_n \le 1$, $x_n > 0$ ($x_n = 1$ при $n = 1$), то последовательность ограничена и сверху и снизу, следовательно, она ограничена. Последовательность имеет наибольший элемент $x_1 = 1$ и не имеет наименьшего.

2) Последовательность $\{1+(-1)^n\}$ не является монотонной, так как для всех элементов последовательности выполняются неравенства $x_{2k-1} \le x_{2k}$, $x_{2k} \ge x_{2k+1}$.

Последовательность ограничена.

3) Последовательность $\{n\}$ является возрастающей, так как для всех элементов последовательностей выполняется неравенство $x_n \le x_{n+1}$.

Последовательность ограничена снизу, так как все элементы последовательности больше или равны 1 ($x_1 = 1$ – наименьший элемент последовательности). Последовательность неограниченна сверху, так как, очевидно, для любого наперед заданного числа A, всегда найдется такой элемент последовательности, который будет больше A.

Пример **2.** Доказать, что последовательность $\{a^n\}$ является:

а) бесконечно большой, при $|a| > 1$;

б) бесконечно малой, при $|a| < 1$.

Решение. а) Пусть $|a| > 1$. Докажем, что последовательность $\{a^n\}$ удовлетворяет определению бесконечно большой последовательности, т.е. для любого числа $A > 0$ найдется такой номер N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|a|^n > A.$$

Для $0 < A \le 1$, неравенство выполняется для любых n. Зададим произвольное $A > 1$. Для отыскания номера N решим относительно n неравенство $|a|^n > A$. Получим

$$n > \log_{|a|} A.$$

Положим $N = [\log_{|a|} A]$. Тогда для любого $n > N$ выполняется неравенство $n > \log_{|a|} A$, а следовательно, и неравенство $|a|^n > A$. Что и требовалось доказать.

б) Пусть $|a| < 1$. Пусть $a = 0$, тогда последовательность $\{a^n\} = \{0\}$ – бесконечно малая. Пусть $a \ne 0$. Представим a в виде $a = \dfrac{1}{k}$, где $k > 1$. Тогда $a^n = \dfrac{1}{k^n}$. Так как $|k| > 1$, то последовательность $\{k^n\}$ является бесконечно большой, а последовательность $\left\{\dfrac{1}{k^n}\right\}$ – бесконечно малой. Таким образом, последовательность $\{a^n\}$ при $|a| < 1$ – бесконечно малая.

II. Контрольные вопросы и задания

1. Всякое ли числовое множество является числовой последовательностью?

2. Может ли ограниченное упорядоченное числовое множество являться числовой последовательностью?

3. Сформулируйте определение *а*) последовательности, *б*) ограниченной сверху, ограниченной снизу, ограниченной, неограниченной числовой последовательности.

4. Пусть в некоторой окрестности точки *а* лежит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$. Следует ли из этого условия, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена?

5. Пусть $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ положительное натуральное число N, такое, что $\forall n > N$ все элементы последовательности $\{x_n\}$ попадают в ε–окрестность некоторой точки *a*. Следует ли отсюда, что последовательность ограничена?

6. Дайте определение бесконечно малой и бесконечно большой последовательности.

7. Является ли бесконечно малая последовательность ограниченной?

8. Может ли бесконечно большая последовательность быть ограниченной *а*) снизу, *б*) сверху, *в*) ограниченной?

9. Перечислите свойства бесконечно малой (бесконечно большой) последовательности. Будут ли сумма, произведение бесконечного числа бесконечно малых последовательностей являться бесконечно малыми последовательностями?

10. Что можно сказать о частном двух бесконечно малых (бесконечно больших) последовательностей, о разности двух бесконечно больших последовательностей, о произведении бесконечно большой и бесконечно малой последовательности. Приведите примеры, иллюстрирующие ответ.

III. Практические задания

1. Даны следующие последовательности:

а) $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, \ldots$; *б*) 1, 2, 3, 4, 5, … ;

в) $\{(-1)^n n\}$; *г*) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$;

д) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ *е*) $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}$.

Ответить на вопросы:

а) является ли последовательность ограниченной сверху, ограниченной снизу, ограниченной;

б) имеет ли последовательность наибольший или наименьший элементы;

в) является ли последовательность монотонной?

2. Используя определение бесконечно малой последовательности, доказать что последовательности: *а*) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, *б*) $\left\{\frac{(-1)^n}{2n+1}\right\}$, *в*) $\left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}$, *г*) $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ – являются бесконечно малыми.

3. Используя определение бесконечно большой последовательности, доказать что последовательности: *а*) $\{n\}$, *б*) $\{2^n\}$, *в*) $\{\ln n\}$, *г*) $\left\{\frac{n^2+1}{n}\right\}$ – являются бесконечно большими.

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

I. Примеры решения задач

Пример 1. *Используя определение предела последовательности, доказать, что* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+5} = \frac{2}{3}$.

Решение. Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \left\{\dfrac{2n-1}{3n+5}\right\}$. Докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - 1| = \left|\dfrac{2n-1}{3n+5} - \dfrac{2}{3}\right| < \varepsilon$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Рассмотрим

$$\left|\frac{2n-1}{3n+5} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{-13}{3(3n+5)}\right| = \frac{13}{3(3n+5)} < \varepsilon.$$

$$\frac{13}{3(3n+5)} < \frac{13}{(3n+5)} < \frac{13}{n} < \varepsilon.$$

Решив неравенство относительно n, получим $n > \dfrac{13}{\varepsilon}$. Положим $N = \left[\dfrac{13}{\varepsilon}\right]$, тогда для всех $n > N$ выполняется неравенство $\left|x_n - \dfrac{2}{3}\right| < \dfrac{13}{n} < \ < \dfrac{13}{N} < \varepsilon$. Следовательно, по определению предела последовательности,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+5} = \frac{2}{3}.$$

Пример **2.** *Доказать, что последовательность* $\{1, 2, \frac{1}{3}, 4. \frac{1}{5}, 6, \frac{1}{7}, \dots\} = \{n^{(-1)^n}\}$ *расходится.*

Решение. Доказательство будем проводить методом от противного. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} n^{(-1)^n} = a$, тогда для любого $\varepsilon > 0$, существует такой номер N, что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Если $a = 0$, то для любого $\varepsilon < 1$ и для любых $n = 2k$ выполняется неравенство $|x_{2k}| > \varepsilon$, что противоречит определению предела последовательности.

Пусть $a \neq 0$. Рассмотрим $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$ и элементы последовательности с номерами $n = 2k + 1 > \dfrac{2}{|a|}$: $x_{2k+1} = \dfrac{1}{2k+1} < \dfrac{|a|}{2}$. Тогда

$$|x_{2k+1} - a| = \left|\frac{1}{2k+1} - a\right| \geq |a| - \left|\frac{1}{2k+1}\right| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}.$$

то есть $|x_{2k+1} - a| > \varepsilon$. Что опять противоречит определению предела последовательности. Следовательно, последовательность не имеет предела.

***Пример* 3.** *Найти* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+3n+1}{n^2+1}$.

Решение. При $n \to \infty$, числитель и знаменатель дроби также стремится к бесконечности. Получим неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Чтобы ее раскрыть, разделим числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, на n^2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}} = 2.$$

(Здесь принимается во внимание, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$).

***Пример* 4.** *Найти* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)$.

Решение. В данном пределе имеет место неопределенность типа **$(\infty - \infty)$.** Для раскрытия этой неопределенности умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на сопряженное ему выражение $\sqrt{n^2+n}+n$:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+n}\right)^2 - (n)^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n}{n}}{\dfrac{\sqrt{n^2+n}+n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{n}{n^2}}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}.$$

***Пример* 5.** Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} + \frac{1}{\sqrt{2+n^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}.$$

Решение. Элемент x_n представляет собой сумму, состоящую из n слагаемых (n – порядковый номер данного элемента), каждое из которых при $n \to \infty$ стремится к нулю (неопределенность вида $(0 \cdot \infty)$).

Рассмотрим последовательности $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$, где $y_n = \dfrac{n}{\sqrt{n+n^2}}$, $z_n = \dfrac{n}{\sqrt{1+n^2}}$. Для всех элементов последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ выполняется неравенство: $y_n \le x_n \le z_n$.

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$. Для каждого из этих пределов имеем неопределенности вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Для их раскрытия поступаем так же, как в примере 3: делим числитель и знаменатель дробей, стоящих под знаком предела на n:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n+n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\sqrt{\frac{n+n^2}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}} = 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{1+n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\sqrt{\frac{1+n^2}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}} = 1.$$

Тогда, по теореме о пределе промежуточной последовательности, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

II. Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определение предела последовательности. Дайте геометрическую интерпретацию этого определения.

2. Сформулируйте определение расходящейся последовательности и дайте геометрическую интерпретацию этого определения.

3. Пусть последовательность $\{x_n\}$ – сходится. Если удалить (добавить) конечное число членов последовательности, то будет ли полученная последовательность сходящейся?

4. Пусть последовательность $\{x_n\}$ – ограничена. Следует ли из этого условия, что последовательность $\{x_n\}$ сходится?

5. Существуют ли последовательности имеющие два различных предела?

6. Перечислите свойства предела последовательности.

7. Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся. Являются ли сходящимися сумма, разность, произведение, частное этих последовательностей?

8. Пусть в некоторой окрестности точки a лежит бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$. Следует ли из этого условия, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$?

9. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $a \neq 0$. Может ли последовательность иметь бесконечное число отрицательных (равных нулю) членов, если $a > 0$?

III. Практические задания

1. Используя определение предела последовательности, доказать что: *а*) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n+3} = 2$, *б*) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n^2-2} = 1$, *в*) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{n} = 0$.

2. Найти следующие пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} (5n^3 - n^2)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3+3n^2-6n+7}{n^3-5}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^4+n^3+2n^2-3n+1}{5n^4-4n^2+1}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-4n+5}{n^3+1}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4-2n^2+8}{2n^3-1}$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)^{20}(n-5)^{50}}{(2n-3)^{70}}$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^4-3n^2-6n+7}-1}{n^2-5}$;

з) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2-n+1}-n}{n+1}$;

и) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n+1}-5\cdot 2^{n+1}}{2\cdot 3^n+2^n}$;

к) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

I. Примеры решения задач

***Пример* 1.** *Доказать, что последовательность* $\{(-1)^n\}$ расходится.

Решение. Рассмотрим две подпоследовательности данной последовательности: $\{x_{2n}\} \equiv \{1\}$ и $\{x_{2n+1}\} \equiv \{-1\}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = 1$, а $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = -1$, то последовательность $\{(-1)^n\}$ имеет две предельные точки: 1 и -1. Следовательно, последовательность $\{(-1)^n\}$ расходится.

***Пример* 2.** *Найти*
а) *все предельные точки последовательности* $\{\sin n°\}$*;*
б) *верхний и нижний пределы этой последовательности.*

а) Учитывая свойства функции $y = \sin x$, получаем, что при любом натуральном n данная функция принимает одно из 181 значений: 0. $\sin 1°$, $\pm\sin 2°$, $\pm\sin 3°$, … , $\pm\sin 89°$, ± 1. При этом, каждое из этих чисел встречается в последовательности бесконечное число раз. Следовательно, каждое указанное число является предельной точкой последовательности $\{\sin n°\}$. Других предельных точек последовательность не имеет.

б) Из указанных 181 предельных точек наименьшей является -1, а наибольшей 1. Значит $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sin n^\circ = 1$, $\underline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sin n^\circ = -1$.

II. Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение подпоследовательности числовой последовательности.
2. Дайте определение предельной точки числовой последовательности, верхнего и нижнего пределов последовательности.
3. Последовательность $\{x_n\}$ имеет две подпоследовательности, сходящиеся к различным пределам. Сходится ли последовательность $\{x_n\}$?
4. Может ли бесконечно большая последовательность иметь сходящуюся подпоследовательность?
5. Доказать, что любая расходящаяся последовательность имеет бесконечно большую подпоследовательность.
6. Если последовательность $\{x_n\}$ имеет единственную предельную точку, является ли последовательность сходящейся?

III. Практические задания

1. Найти все предельные точки последовательности, а также $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} x_n$, $\underline{\lim\limits_{n \to \infty}} x_n$, если:

а) $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \dfrac{3}{n}\right)$, *б*) $x_n = \operatorname{arctg} \left(-1\right)^n \cdot n$,

в) $x_n = n^{(-1)^n}$, *г*) $x_n = 1 + n \sin \dfrac{n\pi}{2}$,

д) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$, *е*) $x_n = 1 + \dfrac{n}{n+1} \cos \dfrac{n\pi}{2}$.

ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

I. Примеры решения задач

Пример 1. *Дана функция* $f(x) = \dfrac{2x+1}{1-x^2}$. *Найти* $f(3)$, $f(1-t)$, $f(t^{-1})$. *Определена ли функция при* $x = 1$, $x = -1$?

Решение. Для нахождения частных значений функции надо подставить вместо x его значения: $x = 3$, $x = 1 - t$ и $x = t^{-1}$ и произвести вычисления:

$$f(3) = \frac{2 \cdot 3 + 1}{1 - 3^2} = -\frac{7}{8};$$

$$f(1 - t) = \frac{2(1 - t) + 1}{1 - (1 - t)^2} = \frac{3 - 2t}{2t - t^2};$$

$$f(t^{-1}) = \frac{2t^{-1} + 1}{1 - t^{-2}} = \frac{t(2 + t)}{t^2 - 1}.$$

При $x = 1$ или $x = -1$ знаменатель обращается в нуль, а на нуль делить нельзя. Значит, при $x = \pm 1$ функция не определена.

Пример 2. *Найти область определения функции* $y = \sqrt{\log_2 \sin x}$.

Решение. Область определения функции задается неравенством $\log_2 \sin x \geq 0$. Но так как данное неравенство равносильно неравенству $\sin x \geq 1$, то единственно возможным будет случай $\sin x = 1$, т.е. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$. Таким образом, областью определения данной функции является множество $D(f) = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z \right\}$.

II. Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение функции.
2. Что называется областью определения функции и что такое множество значений функции?
3. Какие способы задания функции вы знаете?
4. Дайте определение графика функции.
5. Какие функции называются равными?

III. Практические задания

1. Дана функция $f(x) = \frac{x - 3}{x - 3}$. Найти: *а*) $f(5)$; *б*) $f(-t)$; *в*) $f(t + 2)$; *г*) $f\left(\frac{1}{x}\right)$; *д*) $\frac{1}{f(x)}$.

2. Найти область определения функции:

а) $y = \sqrt{4 - x^2}$; *б*) $y = \sqrt{2 - x} + \sqrt{2 + x}$; *в*) $y = \log_2\left(\frac{2}{x} - 1\right)$;

г) $y = \frac{x - 7}{\sqrt[4]{x} - 2}$; *д*) $y = \arcsin\frac{x^2}{4}$; *е*) $y = \sqrt{x\sqrt{x + 1}}$;

ж) $y = \lg\cos x$; *з*) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x - 1}$; *и*) $y = \arccos\frac{1}{x}$;

к) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{9-x^2}$.

3. Дана функция: $y=\begin{cases}-1, \text{ если } x\le -1,\\ x^2, \text{ если } -1<x\le 1,\\ \lg x, \text{ если } x>1.\end{cases}$ Найти значения функции в точках $x_1 = -7$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$, $x_3 = 100$. Нарисовать график этой функции.

4. Нарисовать график функции:

а) $y=\sqrt{1-2x+x^2}+\sqrt{1+2x+x^2}$; *б*) $y=\sqrt{\dfrac{x^2}{4}+x+1}+\sqrt{x^2-2x+1}$;

в) $y=\begin{cases}(1/2)^x, \text{ если } x\le 0,\\ 2, \text{ если } 0<x\le\pi,\\ \sin x, \text{ если } x>\pi.\end{cases}$

5. Какие из данных функций являются тождественными?

а) $f(x) = x$; *б*) $f(x) = |x|$; *в*) $f(x) = \sqrt{x^2}$; *г*) $f(x) = \lg 10^x$; *д*) $f(x) = 10^{\lg x}$; *е*) $f(x) = \dfrac{1}{2}\lg x^2$; *ж*) $f(x) = \lg x$; *д*) $f(x) = \lg|x|$.

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

I. Примеры решения задач

***Пример* 1.** *Доказать, что функция* $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ *является нечетной.*

Решение. Область определения данной функции является симметричным относительно начала координат множеством. Проверим выполнение условия $y(-x) = -y(x)$. Получаем $y(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2+1}=-\dfrac{x^3}{x^2+1}=-y(x)$, следовательно, данная функция является нечетной.

***Пример* 2.** *Найти основной период функции* $y = 2\sin(3x + 1)$.

Решение. Пусть T – период функции. Тогда для всех значений x имеем:

$$2\sin(3(x+T)+1) = 2\sin(3x+1),$$

или

$$2\sin(3(x+T)+1) - 2\sin(3x+1) = 0.$$

Получаем $4\cos(3x+1+3T/2)\sin(3T/2) = 0$. Так как последнее равенство является тождеством, т.е. выполняется при всех допустимых значениях x, то делаем вывод, что $\sin(3T/2) = 0$. Значит $3T/2 = \pi n$, где $n\in Z$. Следовательно, $T = \frac{2\pi n}{3}$. Наименьшим положительным числом, удовлетворяющим этому условию, является $T = \frac{2\pi}{3}$.

Покажем, что $T = \frac{2\pi}{3}$ период функции:

$$f(x + \frac{2\pi}{3}) = 2\sin(3(x + \frac{2\pi}{3}) + 1) = 2sin(3x + 1 + 2\pi) = 2sin(3x + 1) = f(x),$$

а это и означает, что число $T = \frac{2\pi}{3}$ является периодом функции.

***Пример* 3.** *Доказать, что функция* $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ *ограничена на всей числовой оси.*

Решение. Воспользуемся неравенством $2|x| \le x^2 + 1$, которое выполняется для всех действительных *x*. Тогда для любого $x \in R$: $|f(x)| = \left|\frac{x}{x^2+1}\right| = \frac{|x|}{x^2+1} \le \frac{1}{2}$. Это и означает, что функция ограничена.

II. Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение четной и нечетной функций.
2. Докажите, что сумма, произведение и частное двух четных функций является четной функцией.
3. Докажите, что сумма двух нечетных функций является функцией нечетной.
4. Дайте определение периодической функции.
5. Что называется основным периодом функции?
6. Приведите пример периодической функции, у которой основной период равен 2.
7. Дайте определение ограниченной сверху (ограниченной снизу, ограниченной) функции.
8. Дайте определение неограниченной сверху (неограниченной снизу) функции.
9. Что называется точной верхней (точной нижней) границей функции?
10. Привести пример функции ограниченной сверху (ограниченной снизу), но не имеющей максимального (минимального) значения.

III. Практические задания

1. Исследовать функцию на четность, нечетность:

а) $y = x^2$, $x \in [-3; 5]$; *б*) $y = \frac{2^x + 2^{-x}}{x}$;

в) $y = x^3 \sin x$;

г) $y = \dfrac{2^x + 1}{2^x - 1}$;

д) $y = |2 + \mathrm{tg}\, x|$;

е) $y = \ln \dfrac{1 - x}{1 + x}$.

2. Найти основной период функции:

а) $y = \mathrm{tg}\pi x$;

б) $y = \cos^2 x$;

в) $y = 3\cos 2x + 5\sin 2x + 4$;

г) $y = \{2x - 1\}$.

3. Функция $f(x)$ имеет период $T = 2$ и для $x \in [0; 2]$ задана формулой $y = 2x - x^2$. Построить график функции. Найти $f(2012)$.

4. Является ли периодической функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x - \text{иррациональное число}, \\ 1, & \text{если } x - \text{рациональное число}. \end{cases}$$

Если это периодическая функция, то чему равен ее основной период?

5. Найти множество значений функции. Чему равны *sup f*, *inf f*, а также *max f*, *min f*, если последние существуют?

а) $y = -x^2 + 2x + 5$;

б) $y = \dfrac{2}{1 + |x|}$;

в) $y = 5 + 2\cos x$;

г) $y = 2 - 5^x$.

СЛОЖНАЯ ФУНКЦИЯ. ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ

I. Примеры решения задач

Пример 1. *Функция* $y = f(u)$ *определена на промежутке* $0<u<1$. *Найти область определения следующих функций*: *а*) $f(1-x)$; *б*) $f(x^2)$, *в*) $f(\sin x)$; *г*) $f(\ln x)$.

Решение. *а*) Область определения функции $f(1-x)$ находится из условия $0 < 1 - x < 1$. Отсюда следует, что область существования этой функции есть интервал (0; 1).

б) Область определения функции $f(x^2)$ находится из неравенства $0 < x^2 < 1$, решая которое, получаем два интервала: (–1; 0) и (0; 1).

в) Для нахождения области определения функции $f(\sin x)$ решаем неравенство $0 < \sin x < 1$. Получаем $2\pi k < x < \pi + 2\pi k, k \in Z$.

г) Решая неравенство $0 < \ln x < 1$, получаем $1 < x < e$.

Пример 2. *Пусть* $y = \sqrt{3 - x}$, *где* $x = t^2 + 3t - 1$. *Представить y как функцию от t и найти область определения этой функции.*

Решение. Подставляя вместо x его значение, получим: $y = \sqrt{3 - (t^2 + 3t - 1)}$ или $y = \sqrt{4 - 3t - t^2}$. Эта функция определена, если $4 - 3t - t^2 \geq 0$. Решая последнее неравенство, получим: $-4 \leq t \leq 1$.

Пример 3. *Найти функцию, обратную для функции* $y=\sqrt{x-2}$.

Решение. Функция $y=\sqrt{x-2}$ определена при $x\geq 2$; множеством значений этой функции является промежуток $[0;+\infty)$. Решая уравнение относительно *x,* получим единственное решение: $x = y^2 + 2$. Эта функция и будет обратной для данной функции. Меняя обозначения в обратной функции на общепринятые, получим для нее выражение $y = x^2 + 2$. Эта функция определена на промежутке $[0;+\infty)$ и принимает значения из промежутка $[2; +\infty)$.

Пример 4. *Доказать, что функция* $y = x^2 - x + 2$:
а) *необратима на всей числовой прямой*;
б) *обратима на интервале* $(-\infty; 2]$.

Решение. *а*) Уравнение $x^2 - x + 2 = y_0$ имеет решения $x_1=2+\sqrt{y_0+2}$ и $x_2=2-\sqrt{y_0+2}$ для любого $y_0\geq -2$. При $y_0 > -2$ эти решения различны, т.е. каждая прямая $y = y_0$ пересекает график функции в двух точках. Значит, данная функция необратима на всей числовой прямой.

б) Уравнение $x^2 - x + 2 = y_0$ для любого $y_0 \geq -2$ имеет лишь одно решение $x=2-\sqrt{y_0+2}$ из промежутка $(-\infty; 2]$. Значит, на данном промежутке функция обратима. Функцией обратной для функции $y = x^2 - x + 2$ на интервале $(-\infty; 2]$ является функция $x=2-\sqrt{y+2}$.

II. Контрольные вопросы и задания

1.Дайте определение сложной функции.
2. Какая функция является обратимой?
3. Как найти обратную функцию?
4. Какие свойства взаимно обратных функций вы знаете?

III. Практические задания

1.Выразить *y* как функцию от *x*:

а) $y=\sqrt{z}$, $z = x^6$; *б*) $y = \lg z$, $z = x^4$;
в) $y = 2 + z^2$, $z = \cos v$, $v = x^3$; *г*) $y = \sin 2z$, $z=\sqrt{v}$, $v = 3^x$.

2. Суперпозицией каких простейших элементарных функций может быть получена функция:

а) $y = \sin^2 x$; *б*) $y = \ln \operatorname{tg} x$;
в) $y=\sqrt{\cos x^5}$; *г*) $y=5^{(1-x)^2}$?

3.Даны функции $f(x) = x^2 - 2x$, $\varphi(x) = \cos 2x$. Найти:

а) $f\left(\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$; *б*) $\varphi\left(f(0)\right)$;

в) $f(f(1))$; *г*) $\varphi\left(\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

4. Определяется ли соотношениями $y = \arcsin t$, $t = \frac{1}{1+x^2}$ сложная функция $y = f(x)$?

5. Определяется ли соотношениями $y = \ln t$, $t = \sin x - 1$ сложная функция $y = f(x)$?

6. Функция $y = f(u)$ определена на промежутке $u > 4$. Найти области определения функций: *а*) $f(1 - x)$; *б*) $f(x^2)$, *в*) $f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)$; *г*) $f\left(\log_{\frac{1}{4}} x\right)$.

7. Найти обратную функцию $y = g(x)$ для функции:

а) $f(x) = x^2 + 1$, $x \le 0$; *б*) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, $x \in (-\infty;\ 1]$;

в) $f(x) = e^{x-1}$; *г*) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$, $x \in (-\infty;\ 0]$;

д) $f(x) = \ln\sqrt{x}$.

Построить графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$.

8. Вычислить arcsin sin 2.

9. Построить графики функций:

а) $y = \cos \arccos x$; *б*) $y = \arccos \cos x$;

в) $y = [x^2]$; *г*) $y = \operatorname{sgn} \log_2|x|$;

д) $y = \{\sqrt{x}\}$; *е*) $y = \operatorname{sgn} \cos x$.

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

I. Примеры решения задач

Пример 1. *Доказать, используя определение предела функции, что* $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{11 - x} = 3$.

Решение. Используем определение предела функции по Коши. Выберем произвольным образом $\varepsilon > 0$. Найдем такое $\delta > 0$ (δ зависит от ε), чтобы для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - 2| < \delta$, выполнялось бы неравенство $|\sqrt{11 - x} - 3| < \varepsilon$ (*).

По определению модуля:

$$|\sqrt{11-x} - 3| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon < \sqrt{11-x} - 3 < \varepsilon \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 - \varepsilon < \sqrt{11-x} < 3 + \varepsilon.$$

Так как все части данного неравенства при достаточно малом ε являются положительными, то неравенство можно возвести в квадрат:

$$(3-\varepsilon)^2 < 11 - x < (3+\varepsilon)^2 \quad \Leftrightarrow \quad -(6\varepsilon + \varepsilon^2) < x - 2 < 6\varepsilon - \varepsilon^2 \quad (**)$$

Выберем в качестве δ (ε) число $\delta = 6\varepsilon - \varepsilon^2$. Очевидно, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-2| < \delta$, выполняется неравенство (**), а, следовательно, и неравенство (*). Т.е. выполняется определение Коши предела функции. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{11-x} = 3$.

***Пример* 2.** *Доказать, что* $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$.

Р*ешение.* Воспользуемся определением Гейне предела функции. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\} \to 0$ ($x_n \neq 0$) и, соответствующую ей последовательность значений функции $\{x_n \cdot \sin\dfrac{1}{x_n}\}$. Эта последовательность является бесконечно малой ($\{x_n\}$ – бесконечно малая, $\{\sin\dfrac{1}{x_n}\}$ – ограниченная). Следовательно, по определению предела функции по Гейне, $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\dfrac{1}{x} = 0$.

***Пример* 3.** *Доказать, что функция Дирихле*

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x - \text{иррациональное число,} \\ 1, & \text{если } x - \text{рациональное число.} \end{cases}$$

не имеет предела ни в одной точке.

Решение. Докажем, что в произвольной точке a функция $D(x)$ не удовлетворяет определению предела функции по Гейне. Для этого укажем две последовательности $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$, сходящиеся к точке a, и такие, что $\lim\limits_{x_n \to a} D(x_n) \neq \lim\limits_{x'_n \to a} D(x'_n)$.

Сначала рассмотрим последовательность $\{x_n\} \to a$, элементами которой являются рациональные числа. Тогда, для любого n, $D(x_n) = 1$, следовательно, $\lim\limits_{x_n \to a} D(x_n) = 1$.

Теперь рассмотрим последовательность $\{x'_n\} \to a$, элементами которой являются иррациональные числа. Тогда, для всех n, $D(x'_n) = 0$, следовательно, $\lim\limits_{x_n \to a} D(x'_n) = 0$.

Таким образом, $\lim\limits_{x_n \to a} D(x_n) \neq \lim\limits_{x'_n \to a} D(x'_n)$. Отсюда следует, что предел функции $D(x)$ в точке a не существует.

***Пример* 4.** $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$. *Доказать, что* $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\infty$.

Решение. По определению $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, если для любого $M>0$ можно подобрать $\delta>0$, так, что для всех значений $x\neq a$, удовлетворяющих условию $|x-a|<\delta$, будет выполняться неравенство $|f(x)|>M$. В нашем случае по заданному $M>0$ будем подбирать δ из условия $|f(x)|=\dfrac{1}{|x-1|}>M$, или $|x-1|<\dfrac{1}{M}$. Следовательно, положив $\delta=\dfrac{1}{M}$, получим, что для всех значений x, удовлетворяющих условию $|x-1|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|>M$. Значит, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\infty$

II. Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение предела функции в точке (по Гейне и по Коши).

2. Дайте определение того, что: *а*) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, *б*) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, *в*) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$, *г*) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=b$, *д*) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=b$, *е*) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=b$, *ж*) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=\infty$.кции.

3. Сформулируйте критерий Коши существования предела функции.

III. Практические задания

1.Докажите, пользуясь определением предела функции в точке, что:

а) $\lim\limits_{x\to 2}(1-2x)=-3$; *б*) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-5)=4$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-x)=0$; *г*) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-x-2)=-1$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-5}{x+3}=-1$; *е*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-x}{5-x}=\dfrac{2}{5}$.

2. Доказать, исходя из определения предела функции в точке и на бесконечности, что:

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{2x-8}=\infty$; *б*) $\lim\limits_{x\to +0}\ln x=-\infty$;

в) $\lim\limits_{x\to -\infty}2^x=0$; *г*) $\lim\limits_{x\to +\infty}2^x=+\infty$;

д) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x}{x+3}=2$.

ТЕХНИКА НАХОЖДЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИЙ

I. Примеры решения задач

Пример1. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 2}(5x^3 + 2x^2 - 3x + 7)$.

Решение. Используя теорему о пределе арифметической суммы функций, получим

$$\lim_{x\to 2}(5x^3 + 2x^2 - 3x + 7) = \lim_{x\to 2}(5x^3) + \lim_{x\to 2}(2x^2) - \lim_{x\to 2}(3x) + \lim_{x\to 2} 7 =$$

$$= 5\lim_{x\to 2} x^3 + 2\lim_{x\to 2} x^2 - 3\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 7 = 5(\lim_{x\to 2} x)^3 + 2(\lim_{x\to 2} x)^2 - 3(\lim_{x\to 2} x) + 7 =$$

$$= 5\cdot 2^3 + 2\cdot 2^2 - 3\cdot 2 + 7 = 49.$$

***Пример* 2.** *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-2x-3}{x^2+3x+3}$.

Решение. Знаменателем дроби является функция $g(x) = x^2 + 3x + 3$. Так как $g(3) = 3^2 + 3\cdot 3 + 3 = 21 \neq 0$, то можно применить теорему о пределе частного:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-2x-3}{x^2+3x+3} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}(x^3-2x-3)}{\lim\limits_{x\to 3}(x^2+3x+3)} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}.$$

***Пример* 3.** *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x-3}{x^2-3x+2}$.

Решение. Числителем дроби является функция $f(x) = x^3 - 2x - 3$, знаменателем дроби – функция $g(x) = x^2 - 3x + 2$.

Так как $f(2) = 2^3 - 2\cdot 2 - 3 = 1$, а $g(2) = 2^2 - 3\cdot 2 + 2 = 0$, то теорему о пределе частного применять нельзя. Но, так как $g(x) = x^2 - 3x + 2$ бесконечно малая при $x \to 2$ функция, а $f(x) = x^3 - 2x - 3$ ограниченная функция, отделенная от нуля при $x \to 2$, получим:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x-3}{x^2-3x+2} = \left(\frac{1}{0}\right) = \infty.$$

***Пример* 4.** *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$.

Решение. Так как $f(2) = 2^2 - 5\cdot 2 + 6 = 0$, $g(2) = 2^2 - 4 = 0$, то имеет место неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Для раскрытия этой неопределенности разложим на множители числитель и знаменатель дроби:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)}{(x+2)}=\frac{-1}{4}=-\frac{1}{4}.$$

***Пример* 5.** *Вычислить* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2-3}{3x^3+2x^2+x}$.

Решение. Учитывая, что $\frac{1}{x}\to 0$ при $x\to\infty$, получим $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x^2-3)=\lim\limits_{x\to\infty}x^3(2-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3})=\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^3+2x^2+x)=\infty$, следовательно, имеет место неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, для раскрытия которой в числителе и знаменателе дроби вынесем за скобки x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2-6}{3x^3+2x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(2-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3})}{x^3(3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}}{3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{3}.$$

***Пример* 6.** *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}$.

Решение. Под знаком предела имеет место неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$, раскроем ее с помощью первого замечательного предела.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{7\sin 7x}{7x}=|\,7x=t,\ t\to 0|=\lim_{t\to 0}\frac{7\sin t}{t}=7.$$

***Пример* 7.** *Используя свойства предела функции, замечательные пределы, найти:*

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-x^3+x^2-1}{x^4-2x^3+2x^2-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2-x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$.

Решение. 1) При $x = 1$ числитель и знаменатель дроби равны нулю. Имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, разложим числитель и знаменатель дроби на множители, затем сократим дробь:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - x^3 + x^2 - 1}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^3 + x + 1)}{(x-1)(x^3 - x^2 + x + 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x + 1}{x^3 - x^2 + x + 1} = \frac{3}{2}.$$

2) Под знаком предела имеем неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Умножим числитель и знаменатель на выражения сопряжённые выражениям $\sqrt{1-x} - 1$ и $\sqrt[3]{x+1} - 1$. Для $\sqrt{1-x} - 1$ сопряжённым будет выражение $\sqrt{1-x} + 1$, дополняющее данное выражение до формулы $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$. Для $\sqrt[3]{x+1} - 1$ сопряжённым является выражение $\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1$, дополняющее данное выражение до формулы $(a - b)(a^2 + ab + 1) = a^3 - b^3$. Тогда:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1-x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1)(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt{x+1} + 1)}{(\sqrt[3]{x+1} - 1)(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1)(\sqrt{1-x} + 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{((1-x) - 1)(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1)}{((x+1) - 1)(\sqrt{1-x} + 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1)}{x(\sqrt{1-x} + 1)} = -\lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1)}{(\sqrt{1-x} + 1)} = -\frac{3}{2}$$

3) Имеем неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, так чтобы можно было использовать первый замечательный предел. Учитываем, что $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}} =$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}.$$

4) Имеем неопределенность (1^{∞}). Для раскрытия этой неопределённости используется второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\left(-\frac{2}{x}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{2}{x}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{2}{x}}\right)^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

5) Имеет место неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Преобразуем выражение так, чтобы можно было использовать второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+x)=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\log_a\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\log_a e=\frac{1}{\ln a}.$$

6) Неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Положим $a^x-1=y$. Если $x\to 0$, то и $y\to 0$. Тогда $a^x=1+y$, $x=\log_a(1+y)$ и

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\ln a.$$

II. Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте теорему о пределе суммы, произведения и частного двух функций.

2. Какие виды неопределенных выражений вы знаете?

3. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b$, $b\neq 0$. Чему равны пределы: *а*) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{g(x)}$, *б*) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, *в*) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, *г*) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, *д*) $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}$, *е*) $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{\varphi(x)}$?

4. Как записываются первый и второй замечательные пределы?

III. Практические задания

Найти:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{3x^2-5x-2}$;

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-x^2+x+6}{x^2-6x+9}$;;

3. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{\frac{1}{8}+x^3}{5x^2+2x-\frac{1}{4}}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2}{2x-x^2}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$;

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^3-3}{x^3+x^2-x-1}$;

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x+1}{x^2-1}$;

7. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{6-x}-1}{x^2-25}$;

8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3-x}-1}{\sqrt{x+2}-2}$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x^2+5x+2}-\sqrt{2x^2+5x+2}}{x}$;

10. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt[3]{x+6}-2}$;

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+3}{7x^2+2x-3}$;

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-x-x^2}{3-2x-3x^2}$;

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x}{10x^2+2}$;

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{1+x^3}$;

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-1}{\sqrt{4x^6+x+1}}$;

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+\sqrt{1+x^6}}}{\sqrt[3]{2x^3-1}}$;

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-x}}{\sqrt[4]{x^4+x}-\sqrt[5]{x^4+1}}$;

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^4+2x^2-1}-3x^2\right)$;

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^2-2}-\sqrt{x^4-2x^2-2}\right)$;

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$;

21. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} x}$**;**

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$;

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{x}$;

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{4x^2}$;

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x+\sin 3x}{x}$;

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x-\sin^2 2x}{x^2}$

27. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$**;**

28. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{(x-\pi)^2}$;

29. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 3\pi x}{1-x^2}$;

30. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)\cdot\operatorname{tg} 2x$;

31. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2 3x}{1+\cos 3x}$; 32. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$;

33. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{3x-\pi}{1-2\cos x}$; 34. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{\sqrt{2-x}-1}$;

35. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-3x^3\right)^{\frac{1}{2x^3}}$; 36. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x-3}\right)^{5x}$;

37. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-3x}{2-3x}\right)^{2x}$; 38. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-2}\right)^{x^2}$;

39. $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)(\ln(3x+1)-\ln(3x-2))$; 40. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{\ln(x-1)}$;

41. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x}}$; 42. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln(\sin 2x)}{\cos 2x}$.

СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЙ

I. Примеры решения задач

***Пример* 1.** *Доказать, что* $\operatorname{tg} x \sim x$ *при* $x\to 0$.

Решение. Рассмотрим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Следовательно, $\operatorname{tg} x\sim x$ при $x\to 0$.

***Пример* 2.** *Даны две бесконечно малые при* $x\to 0$ *функции* $\alpha(x)=x^2\sin^2 x$ *и* $\beta(x)=x\operatorname{tg} x$. *Доказать*, что $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

Решение. Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x^2}{x\operatorname{tg} x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x^2}{\operatorname{tg} x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x^2=0,$$

то функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем функция $\beta(x)$, т.е. $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

***Пример* 3.** *Найти* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{tg}(x-2)}{x^2-4}$, *используя эквивалентные бесконечно малые функции.*

Решение. Так как $\operatorname{tg} x\sim x$ при $x\to 0$, то $\operatorname{tg}(x-2)\sim(x-2)$ при $x\to 2$. Следовательно:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\mathrm{tg}(x-2)}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}.$$

II. Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение бесконечно малой функции при $x \to a$.

2. Какие бесконечно малые функции при $x \to a$ называются бесконечно малыми функциями одного порядка, высшего порядка, эквивалентными при $x \to a$?

3. Приведите примеры эквивалентных бесконечно малых функций.

4. Каким образом эквивалентные бесконечно малые функции используются при вычислении пределов функций?

III. Практические задания

1. Какие из следующих пар функций являются эквивалентными при $x \to 0$:

а) $f(x) = \sin^2 x^2$, $g(x) = x^4$; *б*) $f(x) = \sqrt{1+2x} - 1$, $g(x) = x$;

в) $f(x) = 1 - \cos x$, $g(x) = x^2$; *г*) $f(x) = \sin\left(\sqrt{1+x} - 1\right)$, $g(x) = x$.

2. Определить, какие из нижеследующих функций при $x \to 0$ будут бесконечно малыми одного порядка, высшего порядка, низшего порядка по сравнению с x:

а) $f(x) = \sqrt{\mathrm{tg}\, x}$; *б*) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$;

в) $f(x) = \sqrt{4+x} - 2$; *г*) $f(x) = \cos 5x - \cos 3x$;

д) $f(x) = \cos^2 x - \cos x$; *е*) $f(x) = \dfrac{2^{\sin x} - 1}{\ln 2}$.

3. Вычислить пределы, используя эквивалентные бесконечно малые функции:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x + \mathrm{arctg} 2x}{\ln(1+6x)}$; *б*) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{x \ln(1+x)}$;

в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \cos x}{\arcsin x^2}$; *г*) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\mathrm{arctg}(1-x) + \sin(x-1)^2}{x^2 - 1}$.

ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

I. Примеры решения задач

Пример 1. *Найти односторонние пределы функции* $y = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{x-1}$ в точке $x = 1$. *Существует ли предел функции в точке* $x = 1$?

Решение. Найдем правый предел функции $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}$ в точке $x=1$. Для этого вначале рассмотрим функцию $z=\dfrac{1}{x-1}$. Так как при $x\to 1+0$ (при $x\to 1$ справа) функция $x-1\to 0$, все время оставаясь больше нуля, т.е. $x-1\to +0$, то, $\lim\limits_{x\to 1+0} z = \lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{x-1} = +\infty$. Тогда, $\lim\limits_{x\to 1+0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1} = \lim\limits_{z\to +\infty}\operatorname{arctg} z = \dfrac{\pi}{2}$.

Аналогично находим левый предел функции:

$$\lim_{x\to 1-0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1} = \lim_{z\to -\infty}\operatorname{arctg} z = -\frac{\pi}{2}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 1-0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1} \neq \lim\limits_{x\to 1+0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}$, то предел функции $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}$ в точке $x=1$ не существует.

***Пример* 2.** Функция $y=\dfrac{1+x^3}{1+x}$ не определена в точке $x=-1$. Используя определение функции непрерывной в точке, доопределить данную функцию в точке $x=-1$ так, чтобы она стала непрерывной.

Решение. Найдем предел функции в точке $x=-1$:

$$\lim_{x\to -1}\frac{1+x^3}{1+x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to -1}\frac{(1+x)(x^2-x+1)}{1+x} = \lim_{x\to -1}(x^2-x+1) = 3.$$

Доопределим значение функции в точке $x=-1$ так, чтобы $f(-1)=3$. В этом случае функция будет задаваться следующим образом:

$$y=\begin{cases}\dfrac{1+x^3}{1+x}, & \text{если } x\neq -1,\\ 3, & \text{если } x=-1.\end{cases}$$

Так как $\lim\limits_{x\to -1} y = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+x^3}{1+x} = 3 = y(3)$, то, по определению, данная функция непрерывна в точке $x=-1$.

***Пример* 3.** Исследовать функции

$$a)\ \ y=\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}; \qquad\qquad б)\ y=\begin{cases} x+1, & \text{если } x<0,\\ \operatorname{tg} x, & \text{если } 0\le x<\dfrac{\pi}{2},\\ 1, & \text{если } x\ge\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

на непрерывность и определить характер точек разрыва.

Решение. *а*) Для нахождения области определения функции $y=\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$ решим уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$. Корнями этого уравнения являются точки $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Следовательно, функция $y=\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$ определена на интервалах $(-\infty, 2)\bigcup(2, 3)\bigcup(3, +\infty)$. Так как эта функция является элементарной, то она непрерывна на этих интервалах.

Точки $x = 2$ и $x = 3$ – точки разрыва функции.

Определим характер точки $x = 2$. Для этого найдем левый и правый пределы функции в данной точке:

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2+0}\frac{x^2-9}{(x-2)(x-3)}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2-9}{(x-2)(x-3)}=-\infty.$$

Следовательно, точка $x = 2$ – точка разрыва второго рода.

Рассмотрим точку $x = 3$. Найдем предел функции в этой точке.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x-2}=6.$$

Так как в точке $x = 3$ существует предел функции, а функция в этой точке не определена, то $x = 3$ – точка устранимого разрыва. Как показано в примере 2, в точке устранимого разрыва функцию можно доопределить до непрерывной.

б) Областью определения функции является вся числовая прямая. Данная функция будет элементарной на интервалах $(-\infty, 0)$, $(0, \dfrac{\pi}{2})$ и $(\dfrac{\pi}{2}, +\infty)$, следовательно, она непрерывна на этих интервалах. Точками возможного разрыва являются точки $x = 0$ и $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Найдем левый и правый пределы функции в точке $x = 0$:

$$\lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0}(x + 1) = 1,$$

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 0 = 0,$$

так как $\lim_{x \to -0} f(x) \neq \lim_{x \to +0} f(x)$, то данная точка – это точка разрыва первого рода (скачок).

Найдем левый и правый пределы функции в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \operatorname{tg} x = -\infty,$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} 1 = 1,$$

так как левый предел функции равен $-\infty$, то точка $x = \dfrac{\pi}{2}$ – точка разрыва второго рода.

II. Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определения:

а) непрерывности функции в точке,

б) непрерывности функции на отрезке.

2. Сформулируйте теоремы о непрерывности сложной функции, элементарной функции.

3. Какие точки называются точками разрыва функции? Укажите типы точек разрыва функции.

III. Практические задания

1. Найдите точки разрыва функций: $y = \dfrac{\sin x}{x}$, $y = \dfrac{\sin x}{x^2}$, $y = |x|$, $y = \begin{cases} 0, & \text{если } x - \text{иррациональное число}, \\ 1, & \text{если } x - \text{рациональное число} \end{cases}$ (функция Дирихле). Укажите их тип. Какую из данных функций можно доопределить до непрерывной?

2. Исследовать на непрерывность функции:

а) $y = \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 3}$, *б*) $y = e^{1/(x-1)}$,

в) $y = \operatorname{sgn}(\sin x)$, *г*) $y = \cos \dfrac{1}{x}$, *д*) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$, *е*) $y = \dfrac{1}{\ln|x|}$,

ж) $y = \{x\}$, *з*) $y = [x]$.

3. Исследуйте на непрерывность, укажите тип точек разрыва, схематически постройте графики следующих функций:

а) $y = \dfrac{x^3-1}{x-1}$, *б*) $y = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$,

в) $y = \begin{cases} x, & \text{если } x<0, \\ \sin x, & \text{если } 0<x<\pi, \\ (x-\pi)^2+1, & \text{если } x \ge \pi, \end{cases}$ *г*) $y = \begin{cases} x, & \text{если } x<0, \\ 2^x, & \text{если } 0 \le x < 3, \\ 3-x, & \text{если } x \ge 3, \end{cases}$

д) $y = \operatorname{sgn}(tg\, x)$, *е*) $y = \ln|x|$,

ж) $y = \dfrac{|x|}{x}$, *з*) $y = \dfrac{|\sin x|}{\sin x}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. *Решите неравенство, исходя из определения модуля действительного числа, и геометрически.*

вариант		вариант	
1.	$\lvert x-2\rvert \le \lvert x\rvert + 1$;	16.	$\lvert x(x+4)\rvert > x$;
2.	$\lvert x^2-3x+2\rvert > x^2-3x+2$;	17.	$\lvert \lvert x\rvert + 5\rvert \ge 3$;
3.	$\lvert x(x-2)\rvert > 1$;	18.	$\lvert x+5\rvert \ge \lvert 2x\rvert - 1$;
4.	$\left\lvert \dfrac{1}{x}\right\rvert \le \dfrac{1}{x^2}$;	19.	$\lvert x+6\rvert \ge \lvert 1-2x\rvert$;
5.	$\lvert x+4\rvert \ge \lvert 2x\rvert + 1$;	20.	$x^2-3\lvert x\rvert - 4 > 0$.
6.	$\lvert \lvert x\rvert - 3\rvert \ge 3$;	21.	$\lvert 3x-1\rvert \ge \lvert x-4\rvert$;
7.	$\sqrt{x^2+4x+4} > 4-x^2$;	22.	$\lvert x^2-3x+2\rvert > 3x-x^2-2$;
8.	$x^2-5\lvert x\rvert + 6 < 0$;	23.	$\lvert x-4\rvert + \lvert 2x+1\rvert \le 1$;
9.	$\lvert x-3\rvert \ge \lvert 2x-1\rvert$;	24.	$\lvert x(x-2)\rvert < x-2$;
10.	$x^2+\sqrt{x^2} \le 2$;	25.	$\lvert x+1\rvert - \lvert x-2\rvert > 1$

11.	$\lvert x-5\rvert \le \lvert x\rvert - 2$;	26.	$\lvert x^2-5x+6\rvert \le 5x-x^2-6$;
12.	$\lvert x(x+4)\rvert > 3$;	27.	$\dfrac{3}{1-\lvert x+3\rvert} < 1$;
13.	$\lvert\lvert x\rvert-7\rvert \ge 7$;	28..	$\lvert\lvert x\rvert-2\rvert \le \lvert x\rvert$
14.	$\lvert 3x-1\rvert \le \lvert x-4\rvert$;	29.	$\lvert x^3-1\rvert > 1-x$
15.	$\lvert x-5\rvert \le \lvert x\rvert$;	30.	$\lvert 3x+2\rvert > \lvert 3x-2\rvert + 1.$

2. ***Найти область определения функции y = f (x).***

вариант		вариант	
1.	$y=\sqrt{16-x^2}\,\log_2(x^2-5x+6)$;	16.	$y=\lg_{\sin x} x$;
2.	$y=\sqrt{\log_2(x^2-3)}$;	17.	$y=\arccos\dfrac{2}{2+\sin x}$;
3.	$y=\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{4-3x-x^2}}$;	18.	$y=\dfrac{3}{4-x^2}+\lg(x^3-x)$;
4.	$y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}$;	19.	$y=\sqrt{\ln\left(2-\sqrt{x-1}\right)}$;
5.	$y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{3-2x}{x-2}$;	20.	$y=\dfrac{1}{\sqrt{\lvert x\rvert-2\lvert x-1\rvert}}$;
6.	$y=\lg(1-\lg(x^2-5x+16))$;	21.	$y=\lg\dfrac{2x^2+x-1}{1-x}$;
7.	$y=\dfrac{1}{\sqrt{\lvert x\rvert-x}}$;	22.	$y=\sqrt{9^x-2\cdot 3^x-63}$
8.	$y=\dfrac{1}{\lg(1-x)}+\sqrt{x+2}$;	23.	$y=\dfrac{1}{\sin x}+\sqrt{6x-x^2}$;
9.	$y=\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$;	24.	$y=\dfrac{\lg\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x^2-x-2}}$;
10.	$y=\sqrt{\sin x-1}$;	25.	$y=\lg(\operatorname{arctg} x)+\sqrt{16-x^2}$;
11.	$y=\arcsin\dfrac{x^2-2x+2}{x-2}$;	26.	$y=\sqrt{\dfrac{\log_{0,5}(x^2-3)}{x^2(x-5)^2}}$;

12.	$y=\sqrt{\dfrac{16-16x+4x^2}{1-x}}+(x+4)^{-\frac{1}{6}}$;	27.	$y=\sqrt{25^x+5^{x+1}-50}-\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}$;
13.	$y=\sqrt{\log_{0,5}\dfrac{x}{x^2-1}}$;	28.	$y=\dfrac{\lg x}{\arcsin\lvert x-3\rvert}$;
14.	$y=\lg\sin x+\sqrt{16-x^2}$;	29.	$y=\dfrac{\sqrt{8+2x-x^2}}{\arccos(x-2)}$;
15.	$y=\sqrt{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$;	30.	$y=\sqrt{\dfrac{x^4-9x^2}{x^2-3x-10}}$.

3. ***Используя определение предела последовательности, определение бесконечно большой последовательности или определение предела функции, докажите, что*:**

вариант		вариант	
1.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{2n^2-1}=\dfrac{1}{2}$;	16.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n-1}{n+2}=5$;
2.	$\lim\limits_{x\to -1}(2x-3)=-5$;	17.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^n}=0$;
3.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-1}{n^2+3}=1$;	18.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-1}{n^2+1}=\infty$;
4.	$\lim\limits_{x\to 2}(7-2x)=3$;	19.	$\lim\limits_{x\to 0}(5-2x)=5$;
5.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n-2}=\dfrac{2}{3}$;	20.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-1}{n^2+1}=1$.
6.	$\lim\limits_{x\to 3}(3x-7)=2$;	21.	$\lim\limits_{x\to -1}(2x+3)=1$;
7.	$\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1 \quad (a>1)$;	22.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2-1}{n^2+3}=4$;
8.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{1+2n^3}=\dfrac{1}{2}$;	23.	$\lim\limits_{x\to 2}(1+2x)=5$;
9.	$\lim\limits_{x\to -2}(1-2x)=5$;	24.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-3}{3n-2}=\dfrac{2}{3}$;
10.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-1}{n^4}=0$;	25.	$\lim\limits_{x\to 0}(3x+4)=4$;
11.	$\lim\limits_{x\to 0}(5x-2)=-2$;	26.	$\lim\limits_{x\to 0}a^x=1 \quad (a>1)$;

12.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n}{n-1}=5;$	27.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{1+2n^2}=\dfrac{1}{2};$
13.	$\lim\limits_{x\to 4}(3x-8)=4;$	28.	$\lim\limits_{x\to 2}(1+x)=3;$
14.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n-1}=2;$	29.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-3}{n^3}=2;$
15.	$\lim\limits_{x\to -1}(3x-1)=-4;$	30.	$\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)=1.$

4. ***Найдите указанные пределы.***

вариант	*а*	*б*	*в*
1.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-x^4+1}{x^5-1};$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-1}{x^4+1};$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x+1}{x^2-x};$
2.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-x^3}{2x^3-x^2+3}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^3+1)(x^3-1)}{1-x^7}$	$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^6-3x^4+3x^2-9};$
3.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^2}{x^2-5};$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3x^6}{(x^2-2)(x^2+2)};$	$\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1};$
4.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{100-0{,}1x^{10}}{0{,}01x^{10}-10};$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^5-1)(x^5+1)}{(x^3+1)^3};$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^3-x^2-x+1};$
5.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2(x^3+5)}{5-x^5};$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^3}{(x^2+1)(x^2+2)};$	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x^2+8}{x^2-3x+2};$
6.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{3-2x}\right)^3;$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{100x^7-1}{1-x^8};$	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x(x-1)}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right);$
7.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2}{1+(2x)^2};$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{100x^{10}-1}{1-0{,}01x^{11}};$	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2-x-10}{x^3+8};$
8.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2}{3+\frac{x^2}{4}};$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^3-2)(x^5+1)}{(x^2-1)(x^4-1)};$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{3x^2-x-2};$
9.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^3}{(2x^2-1)^2};$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-100x^2+1}{100x^4+15x};$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^2-4x+3};$
10.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^3-x)^2}{3x^6+x};$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3-(x+2)^3}{(x+1)^3+(x-2)^3};$	$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^3+27};$
11.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{5-x}\right)^4;$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{x+2};$	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+2}{x^2-5x+4}+\dfrac{x-4}{3x^2-5x+2}\right);$
12.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{10}-5x}{x^{20}-10x};$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{10}-5x}{(x^2-1)^5};$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^3-3x^2}{x^6-1};$
13.	$\lim\limits_{x\to\infty}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2-2x+1}-\dfrac{1}{x^3+2x+1}\right)$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^4-1};$

	$\left(\frac{1}{x^3-2x+1}-\frac{1}{x^3+2x+1}\right)$		
14.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-x^2}{1+2x^2}\right)^3$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^4}{x^3-1}-x\right)$;	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-x-6}{x^3-8}$;
15.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^4-x^3-1}{x^3}-x\right)$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}$;	$\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^3+27}{2x^2+3x-9}$;
16.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^4-3}}{x^2-1}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^{20}+(x+1)^{30}}{(x+1)^{50}}$;	$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+x^2+x+1}{1+x^3}$;
17.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{100}-x^{10}+1}{x^{10}(x^{100}+1)}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^6-2}}{3x^3+1}$;	$\lim\limits_{x\to 5}\frac{125-x^3}{2x^2-9x-5}$;
18.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{x}{3}}{1+\frac{x}{2}}\right)^2$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{x^2-1}$;	$\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\frac{x^2-\frac{1}{9}}{3x^2-4x+1}$;
19.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2-5}}{x+1}$;	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3-2x^2+x-1}{3x^2-x-2}$;
20.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1+x)^{20}-1}{(x^2+1)^{10}}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{x^7-1}}{2x+3}$;	$\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^3+2}{5x^2-x-6}$.
21.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^{15}-2x^{10}+1}{x^{15}+2x^{11}+1}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^{15}-2x^{10}+1}{x^{12}+2x^{11}+1}$;	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x^2+x-1}$;
22.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x^2+3x-x^3}{2x^3-x^2+3}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x^4+1)(x^4-1)}{1-x^9}$	$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^3-3x}{x^6-3x^4+x^2-3}$;
23.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x^{10}+1)^2}{x^{20}-5}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-3x^{16}}{(x^2-2)(x^{10}+2)}$;	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^3-2x^2+x-2}$;
24.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{200-x^{10}}{x^{10}-10x^5+1}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x^6-1)(x^5+2)}{x^{13}+1}$;	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^3-2x^2+2x-1}$;
25.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2(x^3+5)^3}{5-x^{11}}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x^4-1)^3}{(x^6+1)(x^5+2)}$;	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-2x-4}{x^2-5x+6}$;
26.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5-x^3+x-1}{x^4-x^5}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5-x^3+x-1}{x^4-x^3}$;	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^5-x^3+x-1}{x^4-x^3}$;
27.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x^{10}-1)^3}{1-x^{30}}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^9+1}{1+(2x)^8}$;	$\lim\limits_{x\to -1}\frac{4x^4-5x^2+1}{x^3+1}$;
28.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-9x^2+27x-27}{x^3-27}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-9x^2+27x-27}{x^4-81}$;	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-9x^2+27x-27}{x^3-27}$;

29.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{3-2x+5x^2-x^3}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2-1)(x^5+1)}{(x^3-2)(x^4-1)}$;	$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^4-17x^2+16}{x^2-8x+16}$;
30.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-2)^4-(x+2)^4}{(x+1)^3+(x-1)^3}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-2)^4-(x+2)^4}{(x+1)^3+(x-1)^3}$;	$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^3+27}$.

5. ***Найдите пределы функций.***

вариант	а	Б
1.	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{8+x^2}-3}{\sqrt[3]{x}-1}$;	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 6x}{x^2}$;
2.	$\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$;	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 2x}{x^2-x}$;
3.	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$;	$\lim\limits_{\alpha\to0}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{(1-\cos\alpha)}}$;
4.	$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{1+x^3}-3}{\sqrt[3]{x+6}-2}$;	$\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}x$;
5.	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$;	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x+\sin 5x}{x}$;
6.	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-1}$;	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\sin x-1}$;
7.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$;	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\cos x-\cos 7x}$;
8.	$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;	$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\pi-x}$;
9.	$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x-3}-1}{\sqrt{2x+1}-3}$;	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{\arcsin 3x}$;
10.	$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+27}{\sqrt{x+4}-1}$;	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\sin x}$;
11.	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}$;

12.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right);$	$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x};$
13.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1};$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{\text{x}\arcsin x};$
14.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+2}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x^2+1}-1};$	$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x};$
15.	$\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}};$	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a};$
16.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x};$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x};$
17.	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x^4-x^2-12};$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg} x};$
18.	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{2-\sqrt[3]{x+6}};$	$\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sin x}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2};$
19.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{x^3-x};$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x+\sin 3x}{\sin 5x-\sin 3x};$
20.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1};$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\sin x+1}}{x\sin x};$
21.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{x^4-1};$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\cos 5x}{2x^2};$
22.	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2};$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{5x};$
23	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x}-2}{x^2-1};$	$\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 5x}{2x^2};$
24.	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{1+x^3}-3}{x^2-3x+2};$	$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x;$
25.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1};$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 6x}{2x^2-3x};$
26.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{2-x}-1};$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\sin x};$

27.	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\text{tg}\,x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$;
28.	$\lim\limits_{x\to\infty} x\,(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2+1})$;	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(2(x-1))}{x^2-7x+6}$;
29.	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{x-3}-1}{x^2-5x+4}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arcsin 5x}$;
30.	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt[3]{3-x}-1}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\sin 3x}$.

6. ***Найдите пределы, используя второй замечательный предел***

вариант		вариант	
1.	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$;	16.	$\lim\limits_{x\to\infty} 3x\,[\ln(x+2)-\ln(x+1)]$;
2.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-3x}{5-3x}\right)^{2x-1}$;	17.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-x+6}\right)^{x}$;
3.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x^2}{x^2-x}\right)^{3x}$;	18.	$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\text{tg}^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$;
4.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{3x+x^2}\right)^{\frac{x}{2}}$;	19.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{2x+7}{x+5}\right)^{3-x}$;
5.	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$;	20.	$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{(x+1)}}$.
6.	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$;	21.	$\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)[\ln(3x+1)-$ $-\ln(3x-1)]$;
7.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$;	22.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-5x}{2-5x}\right)^{5x-1}$;
8.	$\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot[\ln(x+1)-$ $-\ln(x-1)]$;	23.	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\text{ctg}\,x}$;
9.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$;	24.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-4}{x^2-1}\right)^{x}$;
10.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$;	25.	$\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{x-1}{x+5}\right)^{1-x}$;

11.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x\left(\sqrt{x^2+1}\,-\,1\right)}$;	26.	$\lim\limits_{x\to 0}\,(1+\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{\sin x}}$;
12.	$\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)[\ln(x+1)-$ $-\ln(x-1)]$;	27.	$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{\left(\dfrac{x-1}{x-4}\right)^{(x+1)}}$
13.	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$;	28.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{x^2+1}{x^2+2}\right)^{1-x^2}$;
14.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{3x+1}{3x+2}\right)^{1-x}$;	29.	$\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)\,[\ln(2x+3)-$ $-\ln(2x+1)]$;
15.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^{x}$;	30.	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{x}}$.

7. ***Исследовать на непрерывность функцию в указанных точках. Определить вид точек разрыва.***

вариант		вариант	
1.	$y=\dfrac{x-2}{x^2-4}$, $x_1=-2,\ x_2=2,\ x_3=5$;	16.	$y=\dfrac{\lvert x\rvert-2}{(x-2)(x-3)}$, $x_1=-2,\ x_2=2,\ x_3=3$;
2.	$y=\dfrac{x-1}{x^2-1}$, $x_1=-1,\ x_2=1,\ x_3=3$;	17.	$y=\dfrac{x\,(x^2-4)}{x^2+x-6}$, $x_1=-3,\ x_2=0,\ x_3=2$;
3.	$y=\dfrac{1+x}{\lvert x\rvert-1}$, $x_1=-1,\ x_2=1,\ x_3=4$;	18.	$y=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-1}$, $x_1=-1,\ x_2=1,\ x_3=2$;
4.	$y=\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$; $x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=1$;	19.	$y=\dfrac{x^2-3x}{x^2-x}$, $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=3$;
5.	$y=\dfrac{x^2-9}{(x-2)(x-3)}$; $x_1=-3,\ x_2=2,\ x_3=3$;	20.	$y=\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$, $x_1=0,\ x_2=-3,\ x_3=3$;
6.	$y=\dfrac{x}{x^2+4x}$; $x_1=-4,\ x_2=0,\ x_3=1$;	21.	$y=\dfrac{x-5}{x^2-25}$, $x_1=-5,\ x_2=2,\ x_3=5$;
7.	$y=\dfrac{1-x}{\lvert x\rvert-1}$, $x_1=-1,\ x_2=1,\ x_3=4$;	22.	$y=\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+4}$, $x_1=-1,\ x_2=1,\ x_3=4$;

8.	$y=\dfrac{x^3-27}{x^2-9}$, $x_1=3$, $x_2=-3$, $x_3=5$;	23.	$y=\dfrac{5+x}{\lvert x\rvert-5}$, $x_1=-5$, $x_2=5$, $x_3=4$;
9.	$y=\dfrac{x-1}{x^2-x}$, $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$;	24.	$y=\dfrac{x^3-8}{x^2-5x+6}$; $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=1$;
10.	$y=\dfrac{x-1}{x^2+x-2}$, $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=-2$	25.	$y=\dfrac{x^2-9}{\lvert x\rvert-3}$; $x_1=-3$, $x_2=2$, $x_3=3$;
11.	$y=\dfrac{x^2-4}{s^2-3x+2}$, $x_1=0$, $x_2=1$; $x_3=2$;	26.	$y=\dfrac{x+4}{x^2+3x-4}$; $x_1=-4$, $x_2=0$, $x_3=1$;
12.	$y=\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}$, $x_1=-1$, $x_2=1$; $x_3=3$;	27.	$y=\dfrac{9-x^2}{x^2+x-6}$, $x_1=-3$, $x_2=2$, $x_3=3$;
13.	$y=\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$, $x_1=1$, $x_2=0$; $x_3=-1$;	28.	$y=\dfrac{x^3+64}{x^2-16}$, $x_1=-4$, $x_2=4$, $x_3=5$;
14.	$y=\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+x-2}$, $x_1=-2$, $x_2=0$; $x_3=1$;	29.	$y=\dfrac{x^3+1}{x^2-x-2}$, $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=2$;
15.	$y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$, $x_1=-1$, $x_2=1$; $x_3=2$;	30.	$y=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$, $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=-2$.

8. ***Исследовать на непрерывность функцию. Указать вид точек разрыва. Схематически изобразить график функции.***

вариант		вариант	
1.	$y=\begin{cases} x^2+1, & \text{при } x<1, \\ 0, & \text{при } 1\le x\le\pi, \\ \sin x, & \text{при } x>\pi; \end{cases}$	16.	$y=\begin{cases} 2, \text{ при } x<-\dfrac{\pi}{4}, \\ \operatorname{ctg} x, \text{при } 0<\lvert x\rvert\le\dfrac{\pi}{4}, \\ 1, \text{ при } x>\dfrac{\pi}{4}; \end{cases}$
2.	$y=\begin{cases} \cos x, \text{при } x\le 0, \\ 1-x, \text{при } 0<x\le 1, \\ x^2, \text{при } x>1; \end{cases}$	17.	$y=\dfrac{\lvert\sin x\rvert}{\sin x}$;

3.	$y = x\,[x];$	18.	$y=\begin{cases} 0, \text{ при } x=-2, \\ \dfrac{x^2-4}{x^2-4}, \text{ при } x \neq \pm 2, \\ 1, \text{ при } x=2; \end{cases}$
4.	$y=\begin{cases} \lvert x-1\rvert, \text{при } \lvert x\rvert>1, \\ \cos\dfrac{\pi}{2}x, \text{при } \lvert x\rvert \le 1; \end{cases}$	19.	$y=\begin{cases} x^2, \text{при } \lvert x\rvert>1, \\ \dfrac{\lvert x\rvert}{x}, \text{при } 0<\lvert x\rvert \le 1; \end{cases}$
5.	$y=\begin{cases} e^{\lvert x\rvert}, \text{при } \lvert x\rvert \le 1, \\ 2-x, \text{при } \lvert x\rvert>1; \end{cases}$	20.	$y=\begin{cases} 1, \text{ при } x \le -1 \\ 1-x^2, \text{ при } -1<x<1, \\ 0, \text{ при } x \ge 1; \end{cases}$
6.	$y=\begin{cases} 1, \text{ при } x \le 0 \\ \dfrac{\sin x}{x}, \text{ при } 0<x<\dfrac{\pi}{2}, \\ x+2, \text{ при } x \ge \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$	21.	$y=\begin{cases} x, \text{ при } x \le 0 \\ \operatorname{arctg} x, \text{ при } 0<x<1, \\ x-1, \text{ при } x \ge 1; \end{cases}$
7.	$y=\begin{cases} \log_2\lvert x\rvert, \text{при } \lvert x\rvert \le 2, \\ x-1, \text{при } \lvert x\rvert>2; \end{cases}$	22.	$y=\begin{cases} 1, \text{ при } x \le 0 \\ \lg x, \text{ при } 0<x<10, \\ x-9, \text{ при } x \ge 10; \end{cases}$
8.	$y=\begin{cases} x^2, \text{при } x<0, \\ x, \text{при } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \sin x, \text{при } x>\dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$	23.	$y=\begin{cases} 0, \text{ при } x \le 0 \\ 3^x, \text{ при } 0<x<2, \\ x-1, \text{ при } x \ge 10; \end{cases}$
9.	$y=\begin{cases} 0, \text{ при } x<0, \\ \dfrac{x^2-1}{x-1}, \text{ при } x \ge 0, \ \ x \neq 1, \\ 3, \text{ при } x=1; \end{cases}$	24.	$y=\begin{cases} \operatorname{arcctg} x, \text{ при } x \le 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, \text{ при } 0<x<1, \\ x-1, \text{ при } x \ge 10, \end{cases}$
10.	$y=\begin{cases} x+1, \text{ при } x<0 \\ (x-1)^3, \text{ при } 0<x \le 1, \\ 3, \text{ при } x>1; \end{cases}$	25.	$y=\begin{cases} \lg\lvert x-1\rvert, \text{ при } x<11, \\ x-10, \text{ при } x>11; \end{cases}$
11.	$y=\begin{cases} \dfrac{\pi}{4}, \ \text{при } x \le -1, \\ \lvert\operatorname{arctg} x\rvert, \ \text{при } -1<x \le 1, \\ -1, \ \text{при } x>1; \end{cases}$	26.	$y=\begin{cases} \dfrac{\pi}{4}, \ \text{при } x \le -1, \\ \lvert\arcsin x\rvert, \ \text{при } -1<x \le 1, \\ \dfrac{\pi}{2}, \ \text{при } x>1; \end{cases}$

12.	$y=\begin{cases} 0, \text{ при } x\le 0, \\ tg\, x, \text{ при } 0<x<\dfrac{\pi}{2}, \\ -1, \text{ при } x\ge\dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$	27.	$y=\begin{cases} -\cos x, \text{ при } x\le 0 \\ \cos x, \text{ при } 0<x<\pi, \\ -1, \text{ при } x\ge\pi; \end{cases}$
13.	$y=\begin{cases} 0, \text{ при } x\le -1, \\ (1+x)^2, \text{ при } -1<x\le 1, \\ \ln(x-1), \text{ при } x>1; \end{cases}$	28.	$y=\begin{cases} -x, \text{ при } x\le 0 \\ \sin x, \text{ при } 0<x<\pi, \\ -1, \text{ при } x\ge\pi; \end{cases}$
14.	$y=\begin{cases} \sin x, \text{ при } \lvert x\rvert\le\dfrac{\pi}{2}, \\ 1, \text{ при } \lvert x\rvert\ge\dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$	29.	$y=\begin{cases} -x, \text{ при } x\le 0 \\ \log_{1/2} x, \text{ при } 0<x<8, \\ -3, \text{ при } x\ge 8; \end{cases}$
15.	$y=\begin{cases} 2\lvert x\rvert, \text{ при } \lvert x\rvert\le 1, \\ 2-x^2, \text{ при } \lvert x\rvert>1; \end{cases}$	30.	$y=\begin{cases} -x+1, \text{ при } x\le 0, \\ x^2+1, \text{ при } 0<x\le 1, \\ (x+1)^2, \text{ при } x>1. \end{cases}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Учебники и учебная литература

1. Ильин, В.А. Основы математического анализа / В.А. Ильин, Э.Т. Позняк. – Ч. 1. – М.: Наука, 1982.
2. Ильин, В.А. Математический анализ / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Вл.К. Сендов. – Т. 1. – М.: Наука, 1979.
3. Никольский, С.М. Курс математического анализа / С.М. Никольский. – Т. 1. – М.: Наука, 1990.
4. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа / Л.Д. Кудрявцев. – Т. 1. – М.: Наука, 1989.
5. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа / Г.М. Фихтенгольц. – Т. 1. – М.: Физматгиз, 1960.

Сборники задач и упражнений

6. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М.: Наука, 1985.
7. Демидович, Б.П. Сборник задач по математическому анализу / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1990.
8. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. – П.Е. Данко, А.Г. Попо, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1986. – Ч. 1.
9. Давыдов, Н.А. Сборник задач по математическому анализу / Н.А. Давыдов, П.П. Коровкин, Б.Н. Никольский. – М.: Просвещение, 1990.
10. Индивидуальные задания по высшей математике / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть / под ред. А.П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 2008. – Ч. 1.

Учебное издание

СУРИН Татьяна Леонидовна
ИВАНОВА Жанна Викторовна
ШЕРЕГОВ Сергей Викторович

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Практическое пособие

Печатается в авторской редакции

Технический редактор *Г.В. Разбоева*
Компьютерный дизайн *Е.В. Малнач*

Подписано в печать 2012. Формат $60x84^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,96. Уч.-изд. л. 1,87. Тираж 70 экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования
«Витебский государственный университет им. П.М. Машерова».
ЛИ № 02330 / 0494385 от 16.03.2009.

Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный университет им. П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.