

личных простых делителей порядка группы G , $\pi(\mathfrak{F})$ – объединение множеств $\pi(G)$ для всех групп G из совокупности групп $\mathfrak{F}$ [4].

Поскольку $\pi \cap \pi(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi) = \emptyset$, то $\mathfrak{M} \cap (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi) = (1)$. Если $\mathfrak{H}$ является подформацией формации $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$ тогда и только тогда, когда $\pi \cap \pi(\mathfrak{H}) = \emptyset$. Последнее означает, что $\mathfrak{H}$ – формация групп, порядки которых не делятся на простые числа из π , т.е. $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{G}_\pi$. Значит, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi$. Поэтому $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi$ – псевдодополнение элемента $\mathfrak{M}$ в решётке $L(\mathfrak{F})$. Таким образом, доказано

Предложение. Пусть $\mathfrak{M}$ – подформация формации $\mathfrak{F}$ и $\pi = \pi(\mathfrak{M})$. Тогда формация $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi$ является псевдодополнением элемента $\mathfrak{M}$ в решётке $L(\mathfrak{F})$ всех подформаций формации $\mathfrak{F}$.

1. Скиба, А. Н. О локальных формациях длины 5 / А. Н. Скиба // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп : труды Гомельского семинара / Ин-т математики АН БССР ; под ред. М. И. Салука. Минск : Наука и техника, 1986. – С. 135-149.

2. Воробьёв, Н. Н. О кратно локальных формациях со стоуновой решёткой подформаций / Н. Н. Воробьёв // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-матэ. навук. – 2008. – №3. – С. 23-27.

3. Гретцер, Г. Общая теория решёток: Пер. с англ. / Под редакцией Д. М. Смирнова. – М.: Мир, 1981. – 456 с.

4. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов : учеб. пособие / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 207 с.

АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ КРАТНЫХ КОРНЕЙ ПОЛИНОМА НА ПРИМЕРЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

Чернявский М.М.¹, Грицкевич Н.С.²,

¹молодой ученый, ²студент 2-го курса ВГУ имени П.М. Машерова,

г. Витебск, Республика Беларусь

Научный руководитель – **Трубников Ю.В.**, доктор физ.-мат. наук, профессор

Ключевые слова. Полином, кратный корень, аналитическое решение, результат, точные формулы.

Keywords. Polynomial, multiple root, analytical solution, resultant, exact formulas.

В большинстве современных литературных источников, посвященных исследованию алгебраических полиномов пятой и более высоких степеней, крайне мало внимания уделяется точным методам нахождения кратных корней. Также там не даются готовые формулы для их вычисления. Основной трудностью выступает громоздкость промежуточных аналитических вычислений, которые сложно провести вручную. В последние годы ситуация изменилась благодаря стремительному развитию систем компьютерной алгебры, что поспособствовало возобновлению интереса исследователей к рассматриваемой теме и дало новые фундаментальные результаты. Таким образом, в настоящей работе была поставлена **цель** – на примере алгебраического уравнения пятой степени провести анализ современных методов получения точных аналитических формул для выражения кратных корней полинома через коэффициенты.

Материал и методы. Материалом исследования являются алгебраические полиномы над полем комплексных чисел, имеющие кратный корень. Методы исследования – методы алгебры и математического анализа с использованием системы компьютерной математики *Maple* 2019.

Результаты и их обсуждение. Если произвольный полином пятой или более высокой степени раскладывается только на два биномиальных множителя, то при помощи систем компьютерной алгебры можно получить компактные формулы для вычисления значений корней этого полинома через коэффициенты. Также выводятся аналитические условия связи между коэффициентами, при выполнении которых рассматриваемое раз-

ложение имеет место. Например, рассмотрим полином пятой степени $P_5(z)$ вида (1) над полем комплексных чисел

$$P_5(z) = z^5 + a_1 z^4 + a_2 z^3 + a_3 z^2 + a_4 z + a_5. \quad (1)$$

Тогда для него справедлива

Теорема 1. Полином $P_5(z)$ вида (1) представим в виде

$$P_5(z) = (z - z_1)^3 (z - z_2)^2$$

тогда, и только тогда, когда

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{1}{135}(12a_1^2 - 30a_2)\beta - \frac{4}{25}a_1^3 + \frac{3}{5}a_1a_2, \\ a_4 &= -\frac{1}{225}(8a_1^3 - 20a_1a_2)\beta + \frac{1}{375}a_1^4 - \frac{7}{25}a_1^2a_2 + \frac{4}{15}a_2^2, \\ a_5 &= \frac{1}{5625}(76a_1^4 - 430a_1^2a_2 + 600a_2^2)\beta + \frac{53}{9375}a_1^5 - \frac{13}{375}a_1^3a_2 + \frac{4}{75}a_1a_2^2. \end{aligned}$$

При этом

$$z_1 = -\frac{1}{5}a_1 - \frac{2}{3}\beta; \quad z_2 = -\frac{1}{5}a_1 + \beta; \quad \beta = \frac{1}{5}\sqrt{6a_1^2 - 15a_2}.$$

Доказательство. Необходимость. Из соотношений Виета непосредственно следует система уравнений:

$$\begin{aligned} -3z_1 - 2z_2 - a_1 &= 0, \\ 3z_1^2 + 6z_1z_2 + z_2^2 - a_2 &= 0, \\ -z_1^3 - 6z_1^2z_2 - 3z_1z_2^2 - a_3 &= 0, \\ 2z_1^3z_2 + 3z_1^2z_2^2 - a_4 &= 0, \\ -z_1^3z_2^2 - a_5 &= 0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения системы выразим $z_1 = -2z_2/3 - a_1/3$ и, подставляя его в оставшиеся уравнения, получим

$$\begin{aligned} 5z_2^2 + 2a_1z_2 - a_1^2 + 3a_2 &= 0, \\ -a_1^3 + 12a_1^2z_2 + 33a_1z_2^2 + 10z_2^3 + 27a_3 &= 0, \\ -2a_1^3z_2 - 3a_1^2z_2^2 + 12a_1z_2^3 + 20z_2^4 - 27a_4 &= 0, \\ a_1^3z_2^2 + 6a_1^2z_2^3 + 12a_1z_2^4 + 8z_2^5 - 27a_5 &= 0. \end{aligned}$$

Первое уравнение этой системы является квадратным по z_2 . Его корни

$$z_{2,1} = -\frac{a_1}{5} + \frac{\sqrt{6a_1^2 - 15a_2}}{5}, \quad z_{2,2} = -\frac{a_1}{5} - \frac{\sqrt{6a_1^2 - 15a_2}}{5}.$$

Из двух получившихся решений можно выбирать любое, но при осуществлении дальнейших преобразований везде нужно будет использовать только одно выбранное значение. Возьмем первый корень и подставим его в оставшиеся три уравнения системы. После упрощений получим в точности формулы связи между коэффициентами полинома, приведенные в формулировке теоремы.

Достаточность проверяется подстановкой полученных коэффициентов и корней в уравнение

$$z^5 + a_1 z^4 + a_2 z^3 + a_3 z^2 + a_4 z + a_5 = (z - z_1)^3 (z - z_2)^2.$$

Теорема 1 доказана.

Используя аналогичные рассуждения, можно получить условия наличия у полинома (1) корня кратности 4 и второго простого корня, а также формулы для их вычисления.

Следующим рассматриваемым источником получения точных аналитических формул, выражающих значения кратного корня полинома через коэффициенты, является анализ структур частных производных от некоторых результатов самого полинома и его производной [1]. Если один корень полинома имеет кратность больше, чем кратность остальных корней, то справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $f = f(z)$ – полином с комплексными коэффициентами степени $n \geq 3$, а $f^{(k-1)} = f^{(k-1)}(z)$ – его производная порядка $k-1$ вида

$$f^{(k-1)}(z) = b_0 z^{n-k+1} + b_1 z^{n-k} + b_2 z^{n-k-1} + \dots + b_{n-k} z + b_{n-k+1}.$$

Тогда корень z_1 кратности k при условии, что остальные корни имеют меньшую кратность, можно вычислить по формулам (2)

$$z_1 = \frac{\partial^k R(f, f^{(k-1)})}{\partial b_{j-1} \partial b_j^{k-1}} : \frac{\partial^k R(f, f^{(k-1)})}{\partial b_j^k} \quad (j = 1, \dots, n+1-k).. \quad (2)$$

Например, для нахождения корня кратности 3 полинома (1) формулы (2) имеют следующий вид. При $j = 2$

$$z_1 = \frac{20a_1^2 a_3 a_5 - 36a_1 a_2^2 a_5 + 7a_1 a_2 a_3 a_4 - a_1 a_3^3 - 180a_1 a_4 a_5 + 185a_2 a_3 a_5 - 26a_3^2 a_4 - 500a_5^2}{3(24a_1^2 a_2 a_5 - 4a_1^2 a_3 a_4 - 40a_1 a_3 a_5 - 50a_2^2 a_5 + 8a_2 a_3 a_4 + a_3^3 + 200a_4 a_5)};$$

при $j = 3$

$$z_1 = -\frac{72a_1^3 a_4 - 12a_1^2 a_2 a_3 + 160a_1^2 a_5 - 256a_1 a_2 a_4 - 38a_1 a_3^2 + 49a_2^2 a_3 - 400a_2 a_5 + 380a_3 a_4}{3(32a_1^3 a_3 - 12a_1^2 a_2^2 + 72a_1^2 a_4 - 156a_1 a_2 a_3 + 49a_2^3 - 180a_2 a_4 + 190a_3^2)}.$$

На конкретных числовых примерах убеждаемся в их справедливости.

Отдельно рассмотрим случай трехчленного алгебраического уравнения с действительными коэффициентами, имеющего кратный корень. Трубниковым Ю.В. и Чернявским М.М. были получены точные условия связи между коэффициентами, при выполнении которых уравнение имеет кратный корень, а также приведены формулы для его вычисления [2]. Например, пусть в уравнении

$$x^n + px^m + q = 0 \quad (n > m > 0, \quad p \neq 0, \quad q \neq 0). \quad (3)$$

n – нечетное число, m – четное. Тогда если p, q – разных знаков и имеет место одно из равенств

$$q \left(-\frac{p}{q} \right)^{n/m} = \frac{n-m}{m} \left(\frac{n}{n-m} \right)^{n/m}, \quad q \left(-\frac{p}{q} \right)^{n/m} = -\frac{n-m}{m} \left(\frac{n}{n-m} \right)^{n/m},$$

то уравнение (3) имеет двукратный действительный корень $x = (-pm/n)^{1/(n-m)}$ и простой действительный корень [2].

Для произвольных трехчленных алгебраических уравнений с действительными коэффициентами также имеет место следующий факт, который можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 3. Пусть t – значение кратного корня трехчленного алгебраического уравнения с действительными коэффициентами

$$x^n + px^m + q = 0 \quad (n > m > 0, \quad p \neq 0, \quad q \neq 0).$$

Тогда значения остальных, в том числе комплексных, корней находятся из уравнения

$$x^n - \frac{n}{m} t^{n-m} x^m + \frac{n-m}{m} t^n = 0.$$

Заключение. Таким образом, на примере алгебраического уравнения пятой степени показано современное состояние проблемы точного аналитического нахождения кратных корней, очерчен круг нерешенных задач в этой области.

1. Чернявский, М.М. Модификация формул Эйткена и алгоритмы аналитического нахождения кратных корней полиномов / М.М. Чернявский, Ю.В. Трубников // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2021. – № 1 (110). – С. 13–25.

2. Трубников, Ю.В. Локализация и нахождение решений трехчленных алгебраических уравнений / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // Математические структуры и моделирование. – 2020. – № 2 (54). – С. 65–85.

ОТЛИЧИТЕЛЬНЫЕ ПРИЗНАКИ СЕЛЕКЦИИ МАЛОРАЗМЕРНЫХ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ И ПТИЦ

Чигряй В.Г.,

*слушатель магистратуры кафедры автоматики, радиолокации
и приема-передающих устройств УО «ВА РБ», г. Минск, Республика Беларусь
Научный руководитель – Храменков А.С., канд. техн. наук, доцент*

На основании анализа вооруженных конфликтов недавнего времени [1], можно отметить широкое применение беспилотных летательных аппаратов (БПЛА). Беспилотный летательный аппарат представляет собой дистанционно-пилотируемый летательный аппарат, что является его существенным преимуществом по сравнению с представителями пилотируемой авиацией. Типовыми задачами боевого применения БПЛА являются: ведение воздушной разведки, нанесение ударов по наземным объектам и т.д. Следует отметить, что в тактику действий воинских подразделений и террористических группировок прочно вошло применение малоразмерных БПЛА на малых (предельно малых) высотах [2]. Основные сложности противодействия малоразмерным БПЛА обусловлены небольшим значением ЭОП и схожестью сигналов, отраженных от БПЛА и дискретных мешающих отражений (отражений от подстилающей поверхности, дискретных местных предметов, птиц, гидрометеоров, «ангелов-эхо» и др.). При этом существенный вклад в формирование дискретных мешающих отражений на малых и предельно малых высотах оказывают отражения от птиц. Таким образом, целью доклада является рассмотрение отличительных признаков селекции малоразмерных БПЛА и птиц.

Материал и методы. В качестве малоразмерного БПЛА рассматривается беспилотный летательный аппарат, осуществляющий полет на малой высоте, управляемый оператором либо осуществляющий автономный полет, имеющий эффективную поверхность рассеивания $0,1 \text{ м}^2$ и менее.

Для выделения признаков селекции малоразмерных БПЛА и птиц используется комбинированная система [2]. Она включает в себя: радиолокационный модуль (радиолокатор, обеспечивающий возможность обнаружения, измерения координат и параметров движения маловысотных воздушных объектов, автоматического сопровождения траекторий целей в заданном секторе); оптико-локационный модуль и модуль радиоэлектронной борьбы. Комплексное построение системы позволяет снизить вероятность ложной тревоги и повысить общую эффективность селекции целей. Предполагается, что цель обнаружена и находится на сопровождении.

Результаты и их анализ. В зависимости от вида используемой информации, комбинированная система обнаружения маловысотных объектов обеспечивает возможность выделения следующей совокупности признаков селекции малоразмерных БПЛА и птиц (рисунок 1).